উচ্চ মাধ্যমিক

# সহজ গণিত



কে. পি. বসু
ডি. আর. ভট্টাচার্য

পশ্চিমবঙ্গ উচ্চ মাধ্যমিক শিক্ষাসংসদ কর্তৃক প্রবর্তিত পাঠক্রম অনুযায়ী
একাদশ ও দ্বাদশ শ্রেণীর জন্য লিখিত

---

# উচ্চ মাধ্যমিক সহজ গণিত

[ একাদশ ও দ্বাদশ শ্রেণী ]

## দ্বিতীয় খণ্ড



**কে. পি. বসু, এম.এ.**

ঢাকা কলেজের ভূতপূর্ব গণিতাধ্যাপক,
'এলজেবরা মেড-ইজি', 'মডার্ন জিওমেট্রি', 'ইণ্টারমিডিয়েট এলেজবরা',
'ইণ্টারমিডিয়েট সলিড জিওমেট্রি' প্রভৃতি
প্রণেতা

এবং

**ধীরেন্দ্ররঞ্জন ভট্টাচার্য, এম.এ.**

প্রধান শিক্ষক, যোধপুর পার্ক বয়েজ স্কুল, কলিকাতা



**কে. পি. বসু পাবলিশিং কোং**

৪২, বিধান সরণী, কলিকাতা-৭০০ ০০৬

প্রকাশক :
শ্রীজয়ন্ত বসু,
৪২, বিধান সরণী,
কলিকাতা-৭০০ ০০৬

Paper used for printing of this book was made available by the Govt. of India at a concessional rate.

প্রথম সংস্করণ : সেপ্টেম্বর, ১৯৭৭
মূল্য : ১৬·০০ টাকা



'কলন গণিত' অংশ—শ্রীতুলসীচরণ বক্সী কর্তৃক ন্যাশনাল প্রিন্টিং ওয়ার্কস, ৩৩/ডি, মদন মিত্র লেন, কলিকাতা-৭০০ ০০৬ এবং 'বলবিদ্যা' অংশ—শ্রীত্রিদিবেশ বসু কর্তৃক কে. পি. বসু প্রিন্টিং ওয়ার্কস, ১১, মহেন্দ্র গোস্বামী লেন, কলিকাতা-৭০০ ০০৬ হইতে মুদ্রিত

# নিবেদন

উচ্চ মাধ্যমিক সহজ গণিতের এই দ্বিতীয় খণ্ড—কলন গণিত ও বলবিদ্যার পাঠ্যবস্তু লইয়া প্রণীত। প্রথম খণ্ডের ভূমিকায় বলা হইয়াছে যে, এই খণ্ডের বলবিদ্যার অংশটুকু শ্রীযুক্ত ধীরেন্দ্ররঞ্জন ভট্টাচার্যের বহুপ্রশংসিত 'বলবিদ্যা-প্রবেশ' হইতে পরিবর্তিত আকারে গৃহীত হইয়াছে। এই খণ্ডের কলন গণিতের অংশটুকুও শ্রীযুক্ত ভট্টাচার্যই প্রণয়ন করিয়াছেন। এই কাজে শ্রীযুক্ত ভট্টাচার্যের সহকর্মী শ্রীযুক্ত মানসকুমার দে তাঁহাকে সর্বতোভাবে সহায়তা করিয়াছেন।

বাংলায় কলন গণিতের আলোচনার অন্যতম প্রধান সঙ্কট হইল, উপযুক্ত ও সর্বজন-স্বীকৃত পরিভাষার অভাব। এ বিষয়ে তাই গ্রন্থকার নিজস্ব বিচারবুদ্ধি-মতো নূতন শব্দ-গঠন করিতে বাধ্য হইয়াছেন। আশা করি, পাশাপাশি ইংরেজী শব্দগুলি প্রয়োগ করায় এইসকল নূতন বাংলা শব্দের প্রকৃত অর্থ বুঝিতে ছাত্র-ছাত্রীদের অসুবিধা হইবে না।

উচ্চ মাধ্যমিক স্তরে কলন গণিতের তত্ত্বঘটিত বিষয়গুলি যাহাতে প্রথম শিক্ষার্থীর নিকট সরল ও সহজবোধ্য হয়, সেইজন্য চিত্র ও স্বজ্ঞার (intuition) উপরই বিশেষভাবে নির্ভর করা হইয়াছে। স্নাতক-স্তরের ছাত্র-ছাত্রীর জন্য রচিত গ্রন্থগুলির আলোচনার সহিত এই স্তরের উপস্থাপনা ও তত্ত্ব-বিশ্লেষণের আলোচনায় পার্থক্য অবশ্যই থাকিবে। উচ্চ মাধ্যমিক শিক্ষাসংসদের পাঠক্রম-সংক্রান্ত বিশদ বিবরণ ও নির্দেশ অনুসারে ইহাই অভিপ্রেত। শিক্ষক-সমাজের একটা অভিযোগ আছে যে, পাঠক্রম অনুযায়ী গ্রন্থ বড়ই দুর্লভ। গ্রন্থকারগণ সময়মতো সংসদের নির্দেশ-পত্র পান নাই। হয়তো, সেই কারণে, তাড়াতাড়ি বাজারের চাহিদা মিটাইতে এক এক জন এক এক রকম বুঝিয়া লিখিয়াছেন। আমাদের গ্রন্থকার এ-বিষয়ে প্রথমে অবহিত হইয়াই কলম ধরিয়াছেন। এইজন্য এই দ্বিতীয় খণ্ডের প্রকাশে বিলম্ব হইলেও, পাঠক্রমের মূল অভীষ্টের সহিত ইহার সঙ্গতি রহিয়াছে বলিয়াই আমাদের বিশ্বাস। ইহার গুণাগুণ শিক্ষক-সমাজ বিচার করিবেন। আমরা তাঁহাদের মূল্যবান মতামতের উপর নির্ভর করিয়া গ্রন্থটির যথোচিত পরিমার্জন ও উৎকর্ষ-বিধানের জন্য সর্বদা সচেষ্ট রহিলাম।

৫ সেপ্টেম্বর, ১৯৭৭

প্রকাশক

## MATHEMATICS

### PAPER II (MARKS—100)

### Elements of Calculus and Mechanics

**Elements of Differential Calculus :—30 marks :**

Rational Numbers. Real Numbers and their geometrical representation. Functions of a single variable including trigonometrical functions. Limit and continuity (geometrical and intuitive approach). Inverse functions. Standard Limits such as

$$\underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\sin x}{x}, \quad \underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{e^x - 1}{x}, \quad \underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\log(1+x)}{x}$$

(Proofs not required)

Fundamental limit theorems (statement only). Differential coefficient of a function and its significances. Rules of differentiation of sum, product and quotient of two functions. Rule of differentiation of function of a function (proof not required). Differential coefficients of $x^n$ ($n$ rational), $\sin x$, $e^x$, $\log x$ from first principles. Second order derivative of a function.

**Integral Calculus and Differential Equations :—30 marks :**

Indefinite Integrals. Standard forms.

Integration by simple substitution. Integral by parts in simple cases. Definite Integral as the limit of a sum and as an area. Fundamental theorem connecting primitive with definite integral (Proof not required). Determination of areas in simple cases.

Solution of first order differential equations by Separation Method.

**Elements of Mechanics :—40 marks :**

Resultant of any two velocities and of any two accelerations of a particle. Relative Velocity :

Expressions for velocity and acceleration of a particle in cartesian co-ordinates. Newton's laws of motion ; Equation of motion. Motion of a particle in a straight line. Simple Harmonic Motion. Vertical Motion under gravity, Motion of a projectile under constant gravity neglecting air-resistance.

Resultant of two concurrent forces, two like parallel forces, two unlike parallel forces ; Couples. Centre of gravity of a uniform plane lamina : simple cases.

Resultant of three or more concurrent forces in a plane, conditions of equilibrium, Triangle of forces.

—

# কলন গণিতে ব্যবহৃত সংকেত-তালিকা

$f(x)$, $g(x)$, $\phi(x)$ ইত্যাদি — $x$-এর অপেক্ষক।

$f^{-1}(x)$, $g^{-1}(x)$, $\phi^{-}(x)$ ইত্যাদি — $x$-এর বিপরীত অপেক্ষক।

$\frac{d}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$, $D$ ইত্যাদি — তদ্ভবক-নির্ণয়ের প্রক্রিয়া চিহ্ন (প্রথম ক্রমের)।

$f'(x)$, $g'(x)$, $\phi'(x)$ ইত্যাদি — $x$-এর অপেক্ষকের প্রথম ক্রমের অবকলনাঙ্ক বা তদ্ভবক।

$f''(x)$, $g''(x)$, $\phi''(x)$ ইত্যাদি — $x$-এর অপেক্ষকের দ্বিতীয় ক্রমের অবকলনাঙ্ক বা তদ্ভবক।

$\frac{d}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $D_2$ ইত্যাদি—দ্বিতীয় ক্রমের তদ্ভবক-নির্ণয়ের প্রক্রিয়া চিহ্ন।

$\int$ —সমাকলন প্রক্রিয়ার সংকেত।

$(a, b)$ বা $]a, b[$ ···$a$ হইতে $b$ পর্যন্ত মুক্ত অবকাশ।

$[a, b]$ ···$a$ " $b$ " বদ্ধ অবকাশ।

$]a, b]$ — অর্ধ-মুক্ত অবকাশ (বাম প্রান্ত মুক্ত, দক্ষিণ প্রান্ত বদ্ধ)।

$[a, b[$ — অর্ধ-মুক্ত অবকাশ (বাম প্রান্ত বদ্ধ, দক্ষিণ প্রান্ত মুক্ত)।

$a > b$ — $a$, $b$ হইতে বৃহত্তর।

$a < b$ — $a$, $b$ " ক্ষুদ্রতর।

$a \geqslant b$ — $a$, $b$ হইতে বৃহত্তর অথবা সমান।

$a \leqslant b$ — $a$, $b$ " ক্ষুদ্রতর " সমান।

$x \not> b$ — $a$, $b$ হইতে বৃহত্তর নয়।

$a \not< b$ — $a$, $b$ " ক্ষুদ্রতর নয়।

$\sum$ — (sigma)—সমষ্টি

$\underset{x \to a}{Lt} f(x)$ — $x$-এর মান $a$-গামী হইলে, $f(x)$-এর সীমান্তমান।

# সূচীপত্র

## কলন গণিত

বিষয় পৃষ্ঠা

### প্রথম অধ্যায় ঃ মূলদ ও বাস্তব সংখ্যা



### দ্বিতীয় অধ্যায় ঃ একটি চলক-সম্বলিত অপেক্ষক





### তৃতীয় অধ্যায় ঃ সীমান্তমান ও সন্ততি

## চতুর্থ অধ্যায় : অপেক্ষকের অবকলনাঙ্ক ও উহার তাৎপর্য



## পঞ্চম অধ্যায় : দ্বিতীয় ক্রমের তন্তুবক



## ষষ্ঠ অধ্যায় : সমাকলন

বিষয় পৃষ্ঠা

## দ্বিতীয় অধ্যায় ঃ বেগ-বিশ্লেষণ ও আপেক্ষিক বেগ



## তৃতীয় অধ্যায়ঃ কার্তেজীয় স্থানাঙ্কে বেগ ও ত্বরণের বিশ্লেষণমূলক রূপ



## চতুর্থ অধ্যায় ঃ একটি বস্তুকণার সরল রেখায় গতি



## পঞ্চম অধ্যায় ঃ অভিকর্ষ ও অভিকর্ষজ ত্বরণ



## ষষ্ঠ অধ্যায় ঃ প্রাস

বিষয় পৃষ্ঠা

## সপ্তম অধ্যায় ঃ নিউটনের গতি সূত্রাবলী





## অষ্টম অধ্যায় ঃ সরল রেখায় সরল সমঞ্জস গতি



# দ্বিতীয়াংশ ঃ স্থিতিবিদ্যা

## নবম অধ্যায় ঃ বল

বিষয় পৃষ্ঠা

## দশম অধ্যায় ঃ বলের বিশ্লেষ



## একাদশ অধ্যায় ঃ সমান্তরাল বল



## দ্বাদশ অধ্যায় ঃ বলের ভ্রামক ও যুগ্মবল

## কয়েকটি প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী

### কলন গণিতে বহুব্যবহৃত কয়েকটি ত্রৈকোণমিতিক সূত্র ঃ

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \sec^2 x = 1 + \tan^2 x$

$\text{cosec}^2 x = 1 + \cot^2 x$

$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$

$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$

$\tan(x \pm y) = \dfrac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

$\tan 2x = \dfrac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}.$

### কয়েকটি আদর্শ সীমান্তমান ঃ

(i) $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ (ii) $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{e^x - 1}{1} = 1$

(iii) $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{\log(1+x)}{x} = 1$ (iv) $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{(1+x)^n - 1}{x} = n$

(v) $\underset{x \to 0}{Lt} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ (vi) $\underset{n \to \infty}{Lt} \dfrac{x^n}{|\underline{n}} = 0$

(vii) $\underset{x \to \infty}{Lt} x^n = 0 \ (-1 < x < 1).$

### অবকলন-এর মৌলিক প্রক্রিয়া সংক্রান্ত সূত্রাবলী ঃ

(i) $\dfrac{d}{dx} \{f(x) + g(x) = \cdots\} = f'(x) + g'(x) + \cdots$

(ii) $\dfrac{d}{dx} \{f(x) \times g(x)\} = g(x) \times f'(x) + f(x) \times g'(x)$

(iii) $\dfrac{d}{dx} \left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\} = \dfrac{g(x) \times f'(x) - f(x) \times g'(x)}{\{g(x)\}^2}.$

### আদর্শ অবকলনাঙ্ক ঃ

$y = k$ (constant), $\dfrac{dy}{dx} = 0$

$y = x^n \qquad \dfrac{dy}{dx} = nx^{n-1}$

$y = \log x \qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}$

$y = e^x \qquad \dfrac{dy}{dx} = e^x$

$y=\sin x \qquad \frac{dy}{dx}=\cos x$

$y=\cos x \qquad \frac{dy}{dx}=-\sin x$

$y=\tan x \qquad \frac{dy}{dx}=\sec^2 x$

$y=\cot x \qquad \frac{dy}{dx}=-\operatorname{cosec}^2 x$

$y=\sin^{-1}x \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$

$y=\cos^{-1}x \qquad \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,(0\leqslant y\leqslant\pi)$

$y=\tan^{-1}x \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+x^2} \quad y=\cot^{-1}x,\ \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{1+x^2}$

$y-\sec^{-1}x \qquad \frac{dx}{dy}=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \quad y=\operatorname{cosec}^{-1}x,\ \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$

**আদর্শ সমাকল ঃ**

$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\,(n\neq-1) \qquad \int\frac{dx}{x}=\log x$

$\int e^x dx=e^x \qquad \int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\log f(x)$

$\int \sin x\,dx=-\cos x$

$\int \cos x\,dx=\sin x$

$\int \sec x\,dx=\log\,(\sec x+\tan x)$

$\int \sec^2 x\,dx=\tan x$

$\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$

$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\sin^{-1}\frac{x}{a}=-\cos^{-1}\frac{x}{a}.$

**অংশত সমাকলন ঃ**

$\int x.dy=xy-\int y.dx.$

# প্রাথমিক কলনগণিত ও বলবিদ্যা

**( Elements of Calculus and Mechanics )**



II (XI—XII)—1

# কলনগণিত ( Calculus )

## প্রথম অধ্যায়

## মূলদ ও বাস্তব সংখ্যা ( Rational and Real Numbers )

1·1. সংখ্যা-শ্রেণী ( Number System ): বিভিন্ন শ্রেণীর সংখ্যা এবং অপেক্ষক সম্বন্ধে সুস্পষ্ট ধারণাই কলনগণিতের ভিত্তিভূমি। সেইজন্য কলনগণিতের প্রবেশিকা হিসাবে সংখ্যাশ্রেণীর প্রকারভেদ এবং তাহাদের মূল তত্ত্বগুলি সম্বন্ধে সংক্ষেপে আলোচনা করা যাইতেছে।

মাধ্যমিক স্তরে, স্বাভাবিক সংখ্যা ( Natural numbers ), অখণ্ড সংখ্যা ( Integers ) এবং খণ্ডসংখ্যা ( Fractional numbers )—এই তিন শ্রেণীর সংখ্যা সম্বন্ধে আলোচনা হইয়া গিয়াছে। 1, 2, 3, 4, ···প্রভৃতি অনন্ত পর্যন্ত যে-সংখ্যাগুলি ব্যাবহারিক জীবনে নিত্যই গোণাগুণির কাজে লাগে তাহাদের প্রস্থটি স্বাভাবিক সংখ্যার প্রস্থ বলিয়া পরিচিত। Natural শব্দের আগুক্ষর N-দ্বারা উহা সূচিত হইয়া থাকে। প্রস্থ বা সেট্ (Set) সূচক সাংকেতিক চিহ্নে ইহাকে লেখা হয় N = (1, 2, 3, 4,···) রূপে। ইহার অর্থ, N এমন একটি সংখ্যা প্রস্থ যাহার উপাদানগুলি হইল 1, 2, 3, 4···প্রভৃতি স্বাভাবিক সংখ্যা। অনুরূপে, ঋণাত্মক ও ধনাত্মক, যাবতীয় অখণ্ড সংখ্যার ( Integers-এর ) প্রস্থটি Integers শব্দের আগুক্ষর I-দ্বারা সূচিত হয় এবং প্রস্থসূচক সাংকেতিক চিহ্নে লিখিত হয়, I = (··· −4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4, ··) রূপে। ইহার অর্থ, অখণ্ড সংখ্যার প্রস্থ I-এর উপাদানগুলি হইল, একদিকে −1, −2, −3, −4,···প্রভৃতি অনন্ত ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা, অন্যদিকে 0, 1, 2, 3, 4··প্রভৃতি অনন্ত ধনসংখ্যা। স্পষ্টত, N = (1, 2, 3, 4,···) বলিয়া N-এর উপাদানগুলি I-এর অন্তর্ভুক্ত। অতএব, সংক্ষেপে বলা যায় যে, N-প্রস্থ I-প্রস্থের অন্তর্ভুক্ত।

খণ্ডসংখ্যার প্রস্থটি অত্যন্ত ব্যাপক। সেই প্রস্থটির আলোচনাই হইল পরবর্তী অনুচ্ছেদ-দুইটির প্রসঙ্গ।

1·2. মূলদ-সংখ্যা ( Rational Numbers ): খণ্ডসংখ্যাগুলির মধ্যে এমন কতকগুলি সংখ্যা রহিয়াছে যাহাদের লব ও হর, উভয়ই অখণ্ডসংখ্যা কিন্তু যাহাদের হরের অখণ্ডসংখ্যাটি কখনও শূন্য হয় না। এই ধরনের খণ্ড সংখ্যাগুলিকেই মূলদ-সংখ্যা বলে। গণিতের ভাষায় বলা চলে, $a$ ও $b$ যদি দুইটি অখণ্ডসংখ্যা হয় এবং $b$ যদি শূন্য না হয় ( অর্থাৎ যদি $b \neq 0$ হয় ), তবে $\frac{a}{b}$ একটি মূলদ-সংখ্যা সূচিত করে।

তাহা হইলে, এই সংজ্ঞা অনুসারে $\frac{a}{b}$ সূচিত মূলদ-সংখ্যার $a=0$ হইতে পারে কিন্তু কোনক্রমেই $b=0$ হইতে পারে না। সুতরাং $\frac{0}{b}=0$ অর্থাৎ 0 একটি মূলদ-সংখ্যা।

আবার, $n$ যদি শূন্যভিন্ন এমন একটি অখণ্ডসংখ্যা হয় যে $a=nb$, তবে $\frac{a}{b}=\frac{nb}{b}=n$ ; সুতরাং $n$-এর বিভিন্ন অখণ্ড মানের জন্য বিভিন্ন অখণ্ডসংখ্যাও মূলদ-সংখ্যা-রূপে গণ্য হইবার যোগ্য। প্রকৃতপক্ষে প্রত্যেক অখণ্ডসংখ্যাকেই $\frac{a}{b}$ আকারে খণ্ডসংখ্যা-রূপে প্রকাশ করা যায়। উদাহরণস্বরূপ $1=\frac{2}{2}=\frac{4}{4}$ ইত্যাদি ; $2=\frac{2}{1}=\frac{10}{5}=\frac{16}{8}=\frac{22}{11}$ প্রভৃতি ; $3=\frac{3}{1}=\frac{6}{2}=\frac{9}{3}$ ইত্যাদি। তাহা হইলে, বলা যায়, অখণ্ডসংখ্যার প্রস্থ I-এর উপাদানগুলি মূলদ-সংখ্যার প্রস্থটির অন্তর্ভুক্ত। প্রত্যেক মূলদ-সংখ্যাকে দুইটি অখণ্ডসংখ্যার ভাগফল বা Quotient-রূপে $\frac{a}{b}$ আকারে লেখা যায় বলিয়া, Quotient-শব্দের আদ্যক্ষর Q-দ্বারা মূলদ-সংখ্যার প্রস্থটি সূচিত। স্পষ্টত $Q=\left(\frac{a}{b}\right.$ ; যেখানে $a$ ও $b$ অখণ্ডসংখ্যা এবং $\left.b\neq 0\right)$ এবং I প্রস্থটি Q-এর অন্তর্ভুক্ত।

মূলদ-সংখ্যা সম্বন্ধে আরেকটি কথা উল্লেখযোগ্য যে উহাদের প্রত্যেকটিকে সংখ্যা রেখার উপর চিত্রিত করা যায়। মাধ্যমিক স্তরে এই তথ্য পূর্বেই আলোচিত হইয়াছে, এই গ্রন্থে 1·5 অনুচ্ছেদে উহার পুনরালোচনা হইবে।

**1·3 অমূলদ-সংখ্যা (Irrational numbers) :** 'মূলদ' শব্দের অর্থ যাহা 'মূল দান করে'। 'অমূলদ' শব্দের অর্থ তাই যাহা 'মূল দান করে না'। $\sqrt{1}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{16}$ প্রভৃতি সংখ্যা যথাক্রমে 1 বা $-1$, 2 বা $-2$, 3 বা $-3$, 4 বা $-4$ প্রভৃতি মূল দান করে। সেইজন্য $\sqrt{1}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{16}$ অর্থাৎ $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$ প্রভৃতি সংখ্যা মূলদ। কিন্তু $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{4}$, প্রভৃতি এমন অগণ্য সংখ্যা আছে যাহারা এইরূপ মূল দান করে না। অর্থাৎ নিঃশেষে ইহাদের মূল নির্ণয় করা সম্ভব হয় না। পাটীগণিতের নিয়মে $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ প্রভৃতি সংখ্যার মূল নির্ণয় করিলে উহাদের প্রত্যেক ক্ষেত্রে একটি অনন্ত দশমিক ভগ্নাংশ পাওয়া যায়। লগারিদ্‌মের সাহায্যে $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[5]{6}$ প্রভৃতি সংখ্যার মূল লইলেও সেইরূপ অনন্ত দশমিক ভগ্নাংশ-সম্বলিত কতগুলি সংখ্যা পাওয়া যায়। সেই কারণে ঐ সকল সংখ্যাকে সঠিক ভাবে $\frac{a}{b}$ আকারে লেখা যায় না।

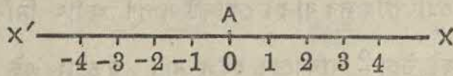
উদাহরণস্বরূপ, $\sqrt{2}=1{\cdot}4142135\cdots$ বলিয়া $\sqrt{2}$-কে $\frac{14142135\cdots}{10000000\cdots}$ রূপে লেখা যাইতে পারে। কিন্তু এই ভগ্নাংশটির লব বা হর কোনটি সম্পূর্ণ অর্থাৎ নির্দিষ্ট মানের অখণ্ড সংখ্যা নহে। কাজেই উহা $\frac{a}{b}$ আকারের হইল না। সুতরাং এই ধরনের যে-সকল সংখ্যার সীমা-নির্দিষ্ট মান নাই এবং যাহাদের অখণ্ড-লব ও শূন্যভিন্ন অখণ্ড-হর সম্বলিত ভগ্নাংশের আকারে লেখা যায় না তাহাদিগকে **অমূলদ** সংখ্যা বলে। সেই হিসাবে $\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{5}}{4}$, ইত্যাদি অগণিত ভগ্নাংশ-সূচিত সংখ্যা অমূলদ। $\sqrt{3}$ যে মূলদ সংখ্যা নয় তাহার একটি পরোক্ষ প্রমাণ উদাহরণমালায় উদা. 2-এ দেখান হইয়াছে। মূলদ সংখ্যার ন্যায় অমূলদ সংখ্যাকেও যে সংখ্যারেখার উপর চিত্রিত করা যায় তাহা 1·5 অনুচ্ছেদে দেখান হইয়াছে।

**1·4. বাস্তব সংখ্যা ( Real Numbers ) :** মূলদ ও অমূলদ, এই দুই প্রকার সংখ্যা লইয়া ব্যাপকতর যে সংখ্যার প্রস্থটি রহিয়াছে তাহাই বাস্তব সংখ্যার প্রস্থরূপে পরিচিত। এই প্রস্থের সংখ্যাগুলিকে বাস্তব সংখ্যা বলা হয়, এই কারণে, যে এই সকল সংখ্যার প্রত্যেকটিকে বাস্তবরেখার উপর চিত্রিত করা যায়। পরবর্তী অনুচ্ছেদের আলোচনা হইতে ইহা স্পষ্ট হইবে। এই প্রসঙ্গে উল্লেখযোগ্য যে, **অমূলদ সংখ্যা বলিতে কেবলমাত্র ধনসংখ্যার অনির্ণেয় মূলই বুঝান হইয়া থাকে।** $\sqrt{-2}, \sqrt{-5}, \sqrt{-7}$ প্রভৃতির ন্যায় ঋণসংখ্যার মূল-কে বলে কাল্পনিক সংখ্যা, কেননা উহাদিগকে বাস্তব সংখ্যা-রেখার উপর চিত্রিত করা যায় না।

সুতরাং **মূলদ ও অমূলদ যে-সকল সংখ্যাকে বাস্তব-রেখার উপর চিত্রিত করা যায়, সেই সকল সংখ্যাকে বলে বাস্তব সংখ্যা ( Real Numbers ) এবং Real শব্দের আদ্যক্ষর R-দ্বারা এইরূপ বাস্তব সংখ্যার প্রস্থটি সূচিত হয়।** স্পষ্টতঃ, মূলদ সংখ্যার প্রস্থ Q অবশ্যই বাস্তব সংখ্যার প্রস্থ R-এর অন্তর্গত। সুতরাং স্বাভাবিক সংখ্যার প্রস্থ N, অখণ্ড সংখ্যার প্রস্থ I, মূলদ সংখ্যার প্রস্থ Q এবং অমূলদ সংখ্যার প্রস্থ—এই সকলগুলি প্রস্থ লইয়াই গঠিত ব্যাপকতর বাস্তব সংখ্যার প্রস্থ R.

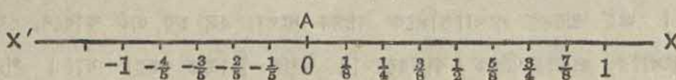
**1·5. বাস্তব সংখ্যার জ্যামিতিক চিত্র ( Geometrical Representation of Real Numbers ) :** সংখ্যা-রেখার উপর যাবতীয় মূলদ সংখ্যা তথা অখণ্ড ও স্বাভাবিক সংখ্যাকে যে চিত্রিত করা যায় তাহা মাধ্যমিক স্তরের পাঠ্যক্রমেই বিবৃত হইয়াছে। পরের পৃষ্ঠার 1নং চিত্রে প্রদর্শিত সংখ্যা-রেখাটির উপর A বিন্দুটিকে 0 (শূন্য)

দ্বারা চিহ্নিত করা হইয়াছে। তাহার পর, যে-কোন একটি দৈর্ঘ্যের একক লইয়া A বিন্দুর ডানদিকে অনন্ত বিস্তৃত $\overrightarrow{AX}$ রেখাংশের উপর পর পর এক একক দৈর্ঘ্যের



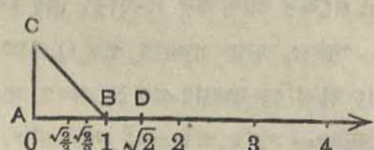

1নং চিত্র

ব্যবধানে অবস্থিত বিন্দুগুলিকে যথাক্রমে 1, 2, 3, 4,··· প্রভৃতির দ্বারা চিহ্নিত করা হইল। অনুরূপে A বিন্দুর বামদিকে প্রসারিত $\overrightarrow{AX'}$ রেখাংশটির উপর পর পর এক একক দৈর্ঘ্যের ব্যবধানে অবস্থিত বিন্দুগুলিকে যথাক্রমে −1, −2, −3, −4,··· প্রভৃতির দ্বারা চিহ্নিত করা হইল। এইভাবে একটি বাস্তবরেখার উপর সংখ্যা দ্বারা চিহ্নিত প্রতিটি বিন্দু উহার সংশ্লিষ্ট মূলদসংখ্যাটির চিত্র। বলা বাহুল্য, ঐ সংখ্যা-রেখার উপর একক দৈর্ঘ্যের $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5},\cdots$ প্রভৃতি খণ্ডদৈর্ঘ্য দ্বারা যাবতীয় মূলদ সংখ্যাকেও চিত্রিত করা যায়। নিম্নের 2নং চিত্র ইহার উদাহরণ।




2নং চিত্র

এইবার দেখান যাইতে পারে যে, $\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{3}$ প্রভৃতির মত যাবতীয় বাস্তব অমূলদ সংখ্যাকেও সংখ্যা-রেখার উপর চিত্রিত করা যায়। 3নং চিত্রে AB দৈর্ঘ্যকে একক ধরিয়া 1, 2, 3, 4··· প্রভৃতি বিন্দুগুলিকে চিহ্নিত করা হইয়াছে। A বিন্দুতে $\overrightarrow{AB}$-এর উপর লম্বরেখাটি হইতে $\overline{AB}$-এর সমান $\overline{AC}$ অংশ কাটিয়া




3নং চিত্র

লইলে, $BC^2 = AB^2 + AC^2 = AB^2 + AB^2 = 2AB^2$ হয়। কিন্তু AB = 1 ধরা হইয়াছে বলিয়া $BC^2 = 2.1^2 = 2$ এবং সেই কারণে $BC = \sqrt{2}$ হইবে। এখন $\overline{BC}$-এর সমান $\overline{AD}$ অংশ কাটিয়া লইলে $AD = \sqrt{2}$ হইবে। সুতরাং D বিন্দু $\sqrt{2}$

সংখ্যাটির চিত্র। স্পষ্টতঃ, $\frac{1}{2}$ AD দ্বারা $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{1}{3}$ AD দ্বারা $\frac{\sqrt{2}}{3}$ বিন্দুর অবস্থান সূচিত করা যায়। এইভাবে সংখ্যারেখার উপর মূলদ ও অমূলদ সকল বাস্তব সংখ্যাকে চিত্রিত করা চলে।

এইখানে মনে রাখা প্রয়োজন যে, $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-3}$ প্রভৃতি কাল্পনিক সংখ্যাকে কখনও বাস্তব-রেখার উপর চিত্রিত করা সম্ভব নহে। সেই কারণেই ঐ সব সংখ্যা বাস্তব সংখ্যার প্রস্থটি হইতে বহির্ভূত।

**1·6. বাস্তব সংখ্যার ধর্ম ( Properties of Real Numbers ) :**

(i) পূর্বের আলোচনা হইতে দেখা যায়, মূলদ বা অমূলদ সকল বাস্তব সংখ্যাকেই জ্যামিতিক চিত্রে একটি বাস্তবরেখার উপর চিত্রিত করা যায়। ধরা যাক, একটি বাস্তব-রেখার উপর একটি নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যকে একক ধরিয়া 1·4 সংখ্যাটিকে চিত্রিত করা হইল। 1·4=14 দশাংশ বলিয়া একক দৈর্ঘ্যের এক দশাংশ পরিমাণ দৈর্ঘ্যের মাপে 0 চিহ্নিত বিন্দুর 14 ঘর দূরস্থিত বিন্দুটি নিশ্চয় 1·4-কে সূচিত করিবে। এইবার এক দশাংশের বদলে এক একক দৈর্ঘ্যের এক শতাংশ পরিমাণ দৈর্ঘ্যের মাপে 1·4 সূচিত বিন্দুটি হইতে ·01 অর্থাৎ এক শতাংশ একক দূরের বিন্দুটি সূচিত করিবে (1·4+·01) বা 1·41 সংখ্যাটিকে। আবার, 1·4 সূচিত বিন্দু হইতে এক এককের সহস্রাংশ পরিমাণ দূরত্বে অর্থাৎ ·001 একক দূরত্বে অবস্থিত বিন্দুটি নিশ্চয় (1·4+·001) বা 1·401 সংখ্যাটিকে সূচিত করিবে। সুতরাং দেখা যায়, 1·4 ও 1·41 সূচিত বিন্দু দুইটির মধ্যে 1·401 সূচিত বিন্দুটি রহিয়াছে। এইভাবে অগ্রসর হইলে দেখা যাইবে যে, 1·4 ও 1·41 সূচিত বিন্দু দুইটির মধ্যবর্তী একটি বিন্দু $\frac{1·4+1·41}{2}$ বা $\frac{2·81}{2}$ বা 1·405 সংখ্যাটিকে এবং 1·4 ও 1·405 সূচিত বিন্দুর মধ্যবর্তী অপর একটি বিন্দু $\frac{1·4+1·405}{2}$ বা $\frac{2·805}{2}$ বা 1·4025 সংখ্যাটিকে সূচিত করিবে। সুতরাং দেখা যাইতেছে 1·4 সূচিত বিন্দু ও 1·41 সূচিত বিন্দু দুইটির মধ্যে 1·401, 1·405, 1·4025 প্রভৃতি সূচিত অসংখ্য বিন্দু রহিয়াছে। দৈর্ঘ্যের একক খুব ছোট হইলে এই সব সংখ্যা দ্বারা সূচিত বিন্দুগুলি এত কাছাকাছি অবস্থিত হইবে যে খালি চোখে উহাদের পার্থক্য ধরা পড়িবে না। কিন্তু বাস্তবরেখাটিকে অণুবীক্ষণ যন্ত্রে স্থাপিত করিলে দেখা যাইবে যে এইরকম খুব কাছাকাছি দুইটি বিন্দুর মধ্যে আরও অসংখ্য বিন্দু রহিয়াছে যাহারা কোনও না কোন বাস্তব সংখ্যাকে সূচিত করে। অর্থাৎ সংখ্যারেখার **প্রত্যেকটি বিন্দু যেমন একটি বাস্তব সংখ্যাকে সূচিত করে, তেমনি**

প্রত্যেকটি বাস্তব সংখ্যাকে চিত্রিত করার জন্যও সংখ্যারেখার উপর একটি বিন্দু পাওয়া যায়। ইহা হইতে বলা যায় বাস্তবরেখার বিন্দুগুলির দ্বারা যাবতীয় বাস্তব সংখ্যাকে সম্পূর্ণরূপে চিত্রিত বা সূচিত করা যায়। কথাটা ঘুরাইয়া বলিলে বলা যায় যে, বাস্তবসংখ্যার প্রস্থটির সমস্তগুলি সংখ্যাকে সম্পূর্ণরূপে একটি বাস্তবরেখার বিন্দুগুলির দ্বারা চিত্রিত করা যায়। বাস্তবসংখ্যার এই ধর্মটিকে বলে **সম্পূর্ণতার ধর্ম** (**Property of Completeness**)। মূলদ সংখ্যার এই ধর্মটি নাই। কারণ দুইটি মূলদ সংখ্যা যত কাছাকাছিই থাকুক না, তাহাদের মধ্যে কিছু সংখ্যক অমূলদ সংখ্যা অবশ্যই থাকিবে। সুতরাং প্রত্যেকটি মূলদ সংখ্যাকে সংখ্যারেখার একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দ্বারা সূচিত করা গেলেও, সংখ্যারেখার প্রত্যেকটি বিন্দুর জন্য একটি মূলদ সংখ্যা নাই। এইখানেই মূলদ সংখ্যার সহিত বাস্তব সংখ্যার বড় একটি পার্থক্য।

(ii) বাস্তবসংখ্যার দ্বিতীয় বৈশিষ্ট্য বা ধর্ম হইল উহাদের **ক্রম-সম্পর্ক** (**Order relation**). যদি $x$ ও $y$ পরস্পরভিন্ন দুইটি বাস্তব সংখ্যা হয় তবে হয় $x>y$, নয়তো $x<y$ হইবেই। উদাহরণস্বরূপ $\cdot11>\cdot09$ কিন্তু $\cdot11<\cdot12$ অর্থাৎ 11 শতাংশ 9 শতাংশ হইতে বড় কিন্তু 12 শতাংশ হইতে ছোট। অনুরূপে $\cdot005>\cdot004$ কিন্তু $\cdot005<\cdot006$ অর্থাৎ 5 সহস্রাংশ 4 সহস্রাংশ হইতে বড় কিন্তু 6 সহস্রাংশ হইতে ছোট।

(iii) বাস্তব সংখ্যার সম্পূর্ণতা ও ক্রম-সম্পর্ক হইতে দেখা যায় যে, কোন দুইটি অতি সন্নিকট বাস্তব সংখ্যার মধ্যেও অসংখ্য সংখ্যা রহিয়াছে। বাস্তবরেখার উপর এই রকম দুইটি সংখ্যাসূচক বিন্দুর মধ্যে গায়ে গায়ে ঘেষিয়া যে-সকল অগণ্য বিন্দু রহিয়াছে তাহারা ঐ দুইটি সংখ্যার মধ্যবর্তী সংখ্যাগুলিকে সূচিত করে। এইভাবে দেখা যায় বাস্তব সংখ্যার সংস্থিতি অত্যন্ত ঘন। এই ঘন-সংস্থিতির ধর্মটিই সংক্ষেপে বাস্তব সংখ্যার **ঘনত্ব-ধর্ম** (**Property of density**) নামে অভিহিত হয়।

কলন গণিতে বাস্তবসংখ্যার উল্লিখিত তিনটি ধর্মই বিশেষ ভাবে উল্লেখযোগ্য। বস্তুতঃ এইগুলিই মূলদ ও অমূলদ সংখ্যার সহিত বাস্তব সংখ্যার পার্থক্য সূচিত করে।

**1·7. ক্রমসম্পর্ক-বিষয়ক কয়েকটি বিশেষ নিয়ম (A few important rules regarding order relation) :**

(i) **যদি $a<b$ অথবা $b>a$ হয় তবে $(b-a)$ সর্বদা ধনাত্মক হইবে।**

$a<b$ অথবা $b>a$ হইলে, ধরা যাক $b=a+h$ যেখানে $h$ একটি ধনাত্মক সংখ্যা। তাহা হইলে,

$b-a=a+h-a=h=$ একটি ধনাত্মক সংখ্যা।

টীকা : এই নিয়মে $a>0$ হইলে $(a-0)$ অবশ্যই ধনাত্মক হইবে। ইহার অর্থ, $a$ ধনাত্মক।

(ii) **$a<b$ এবং $b<c$ হইলে $a<c$ হইবে।**

ধরা যাক, $b=a+h_1$ এবং $c=b+h_2$ যেখানে $h_1$ ও $h_2$ ধনাত্মক সংখ্যা। তাহা হইলে,

$$c=b+h_2$$
$$=a+h_1+h_2$$

অতএব, $a$ সংখ্যাটি $c$ সংখ্যাটি হইতে $(h_1+h_2)$ পরিমাণ ছোট।

অর্থাৎ, $a<c$.

(iii) **$a<b$ হইলে $(a+c)<(b+c)$.**

ধরা যাক, $b=a+h$ যেখানে $h$ একটি ধনাত্মক সংখ্যা

তাহা হইলে, $b+c=a+h+c=(a+c)+h$

$$\therefore \quad (a+c)<(b+c).$$

(iv) **$c>0$ এবং $a<b$ হইলে $ac<bc$ হইবে।**

ধরা যাক, $b=a+h$, যেখানে $h$ একটি ধনাত্মক সংখ্যা।

$\therefore$ উভয়পক্ষকে $c$ দ্বারা গুণ করিলে, $bc=ac+ch$ ;

$$\therefore \quad ac<bc. \qquad [\because \quad ch>0]$$

(v) **$c<0$ এবং $a<b$ হইলে $ac>bc$ হইবে।**

ধরা যাক, $b=a+h$, যেখানে $h$ একটি ধনাত্মক সংখ্যা। উভয় পক্ষকে $c$ দ্বারা গুণ করিলে $bc=ac+ch$ বা $ac=bc-ch$.

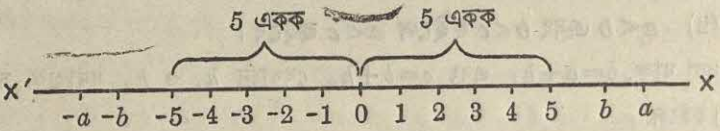
এখন $c<0$ বলিয়া $ch<0$ অর্থাৎ $ch$ ঋণাত্মক। কাজেই $-ch$ ধনাত্মক। $-ch$ যেন একটি ধনাত্মক সংখ্যা $d$-এর সমান। তাহা হইলে, $ac=bc+d$ অর্থাৎ $ac$-র মান $bc$ অপেক্ষা $d$ পরিমাণ বড়। $\therefore \quad ac>bc$.

**1'8. মডিউলাস বা পরমমান ( Modulus or Absolute Value ) :**

বাস্তব সংখ্যার সাংখ্যমানকে উহার মডিউলাস বা পরমমান বলে। উদাহরণ স্বরূপ 5 ও $-5$ উভয়েরই চিহ্নবর্জিত সাংখ্যমান 5 ; কাজেই 5-এর যেমন, তেমনি $-5$-এরও পরমমান 5 হইবে। সাংকেতিক ভাষায় 5-এর পরমমান $|5|$ এবং $-5$-এর পরমমান $|-5|$ —এইরূপ লেখা হয়।

জ্যামিতিক চিত্রে সংখ্যা-রেখার উপর মূলবিন্দু অর্থাৎ 0 চিহ্নিত বিন্দু হইতে বিন্দুবিশেষের দূরত্ব দ্বারাই ঐ বিন্দুসূচিত সংখ্যার পরমমান সূচিত হইয়া থাকে। বলা বাহুল্য নিছক দূরত্ব বিচারে দিকের কোন সম্পর্ক নাই। কাজেই এই দূরত্বের

পরমমান সর্বদা ধনাত্মক হইবেই। প্রত্যেক সংখ্যার সাংখ্যমানও সেইরূপ চিহ্নবর্জিত বলিয়া কার্যত ধনাত্মক। নিচের চিত্রে দেখা যায়, 0 বিন্দু হইতে 5-এর বিন্দুটির যেমন,




4নং চিত্র

তেমনি −5 চিহ্নিত বিন্দুটিরও দূরত্ব 5 একক। সুতরাং পরমমান দূরত্বসূচক বলিয়া $|5|=5$ এবং $|-5|=5$.

অতএব, $|x|=7$ হইলে $x$-এর মান 7-ও হইতে পারে, আবার −7-ও হইতে পারে। কারণ 0-বিন্দু হইতে 7 ও −7 চিহ্নিত বিন্দুদুইটির প্রত্যেকটির দূরত্ব 7 একক। সুতরাং সাধারণভাবে বলা যায় যে,

$|x|=a$ **হইলে** $x$-**এর মান** $a$ **বা** $-a$.

এ সম্বন্ধে স্পষ্টতর ধারণার জন্য 1·10 অনুচ্ছেদের (i), (ii) ও (iii) দ্রষ্টব্য।

**19. দুইটি সংখ্যার অন্তরফল ও সমষ্টির পরমমান ( Modulus or Absolute value of the difference and the sum of two numbers ) :**

(a) 4নং চিত্রে দেখা যায় $b$ হইতে $a$ বিন্দুর দূরত্ব যত, $a$ হইতে $b$ বিন্দুর দূরত্ব ঠিক ততটুকু। সুতরাং $|b-a|$ যে-দূরত্ব সূচিত করে, $|a-b|$-ও সেই দূরত্বই সূচিত করিবে। অর্থাৎ

$|b-a|=|a-b|=a-b$, যেখানে $a>b$.

গণিতের নিয়মেও, পরমমানের সংজ্ঞা হইতে দেখা যায়,

$|b-a|=|-(a-b)|=a-b$.

এখন, চিত্র হইতে দেখা যায় যে, $a$ বিন্দু ও $-b$ বিন্দুর দূরত্ব $=|a-(-b)|$ $=|a+b|=a+b$.

স্পষ্টতঃ, $a$ হইতে $b$ বিন্দুর দূরত্ব $(a-b)$ একক, $a$ হইতে $-b$ বিন্দুর দূরত্ব $(a+b)$ একক হইতে ক্ষুদ্রতর। অর্থাৎ

$|a-b|<(a+b)$ অর্থাৎ $|a-b|<(|a|+|b|)$ ...(i)

[$\because$ $|a|=a$ এবং $|b|=b$]

আবার, $b=0$ হইলে,

$|a-b|=|a-0|=|a|$ এবং $|a|+|b|=a+0=a$

$\therefore$ এক্ষেত্রে, $|a-b|=|a|+|b|$ ... ... (ii)

অতএব, (i) ও (ii) সূত্র একত্রে লইলে বলা যায়,

$$|a-b| \leqslant |a| + |b|.$$

(b) দ্বিতীয়ত, 4নং চিত্র হইতে দেখা যায়, $a$ ধনাত্মক হইলে $-a$ অবশ্যই ঋণাত্মক। তাহা হইলে,

$a = |a|$ এবং $-a < |a|$ $[\because \; |a| = a]$

ইহার অর্থ, $a$ ধনাত্মক হইলে $a = |a|$ এবং উহা ঋণাত্মক হইলে

$$a < |a|.$$

সুতরাং এই দুইটি ফলকে যুক্ত করিলে দাঁড়ায়

$a \leqslant |a|$ ... (iii)

অনুরূপে, $b \leqslant |b|$ ... (iv)

অতএব, (iii) ও (iv) হইতে

$$(a+b) \leqslant |a| + |b|$$

অর্থাৎ, $|a+b| \leqslant |a| + |b|$ $[\because \; |a+b| = a+b]$

সুতরাং, দুইটি সংখ্যার অন্তরফল বা সমষ্টির পরমমান ঐ সংখ্যা দুইটির পরমমানের সমষ্টি হইতে ক্ষুদ্রতর অথবা সেই সংখ্যা দুইটির পরমমানের সমষ্টির সমান।

**1·10. পরমমান-সংক্রান্ত কয়েকটি উল্লেখযোগ্য সিদ্ধান্ত :**

(i) $x > 0$ **হইলে** অর্থাৎ $x$ ধনাত্মক হইলে, $|x| = x$.

(ii) $x = 0$ **হইলে,** $|x| = x = 0$.

(iii) যখন $x < 0$ অর্থাৎ $x$ ঋণাত্মক তখন উহা যেন $= -a$, যেখানে $a$ ধনাত্মক। তাহা হইলে,

$$|x| = |-a| = a = -(-a) = -x.$$

সুতরাং, $x < 0$ **হইলে,** $|x| = -x$.

(iv) $x > 0$ হইলে, $-|x| = -x$ এবং $|-x| = x$ বলিয়া

$$-|x| < |-x|;$$

কিন্তু $x = 0$ হইলে $-|x| = -x = 0$ এবং $|-x| = x = 0$

সুতরাং, $-|x| \leqslant |-x|$

(v) আবার যেহেতু, $|-x| = x = |x|$,

সেইহেতু $-|x| \leqslant |x|$.

সুতরাং (iv) ও (v) হইতে দেখা যায়

$$-|x| \leqslant |\pm x|$$

## উদাহরণমালা

উদা. 1. দৃষ্টান্তের সাহায্যে দেখাও যে আবৃত্ত দশমিক সংখ্যা মূলদ।

$\dot{.4}$ একটি আবৃত্ত দশমিক সংখ্যা এবং $.\dot{4} = .4444\cdots$

$\therefore\quad 10\times.\dot{4} = 10\times.4444\cdots = 4.4444\cdots$

এবং $\quad 1\times.\dot{4} = 1\times.4444 \quad = .4444\cdots$

বিয়োগ করিয়া $(10-1)\times.\dot{4} \quad = 4.0000\cdots$

অর্থাৎ $\quad 9\times.\dot{4} = 4.$ সুতরাং $.\dot{4} = \frac{4}{9} \quad \cdots \quad (1)$

অনুরূপে, $.\dot{3}0\dot{5}$ একটি আবৃত্ত দশমিক সংখ্যা এবং $.\dot{3}0\dot{5} = .305305305\cdots$

$\therefore\quad 1000\times.\dot{3}0\dot{5} = 1000\times.305305305\cdots = 305.305305\cdots$

$1\times.\dot{3}0\dot{5} = 1\times.305\ 305\ 305\cdots = .305305305\cdots$

বিয়োগ করিয়া $999\times.\dot{3}0\dot{5} \quad = 305.000000000\cdots$

$\therefore\quad .\dot{3}0\dot{5} = \frac{305}{999}. \quad \cdots \quad (ii)$

(i) ও (ii)-এর দৃষ্টান্ত হইতে দেখা যায় $.\dot{4}$ ও $\dot{3}0\dot{5}$ যথাক্রমে দুইটি মূলদ সংখ্যা $\frac{4}{9}$ এবং $\frac{305}{999}$. এইরূপে দেখা যায় যে আবৃত্ত দশমিক সংখ্যা দুইটিকে $\frac{a}{b}$ আকারে লেখা যায়, যেখানে $a$ ও $b$ অখণ্ড সংখ্যা এবং $b\neq 0$.

এইভাবে দেখান যায় যে, আবৃত্ত দশমিক সংখ্যামাত্রই মূলদ সংখ্যা।

**টীকা :** আবৃত্ত দশমিক সংখ্যা বলিতে সেই সব দশমিক সংখ্যাকে বুঝায়, দশমিক বিন্দুর পর যাহাদের এক বা একাধিক অঙ্ক পর পর আবৃত্ত হয় বা ঘুরিয়া ঘুরিয়া আসে। উপরের উদাহরণে $.444\ldots$ সংখ্যাটিকে দশমিক বিন্দুর পর 4 অঙ্কটি বারবার ঘুরিয়া আসিতেছে এবং $.305\ 305\ 305\cdots$ সংখ্যাটিতে $\overline{305}$ অংশটি বার বার ঘুরিয়া আসিতেছে। এইভাবে যে অংশটি আবৃত্ত হয়, একটি অঙ্ক হইলে তাহার মাথায়, একাধিক অঙ্ক হইলে তাহার প্রথম ও শেষ অঙ্কটির মাথায় ফুটকি চিহ্ন দিয়া আবৃত্ত অংশটিকে সূচিত করা হয়।

উদা. 2. দেখাও যে $.23\dot{4}\dot{5}$ সংখ্যাটি একটি মূলদ সংখ্যা।

$.23\dot{4}\dot{5} = .23 + .00\dot{4}\dot{5} = \frac{100(.23 + .00\dot{4}\dot{5})}{100}$

$= \frac{100\times.23 + 100\times.00\dot{4}\dot{5}}{100} = \frac{23 + .\dot{4}\dot{5}}{100}$

এখন, $100\times .\dot{4}\dot{5}=100\times .45\ 45\ 45\cdots=45.45\ 45\ 45\cdots$

এবং $1\times .\dot{4}\dot{5}=1\times .45\ 45\ 45\cdots=.45\ 45\ 45\cdots$

বিয়োগ করিয়া $99\times .\dot{4}\dot{5}=45.000000\cdots$

$$\therefore\quad .\dot{4}\dot{5}=\frac{45}{99}=\frac{5}{11}.$$

$$\therefore\quad .23\dot{4}\dot{5}=\frac{23+.\dot{4}\dot{5}}{100}=\frac{23+5/11}{100}=\frac{258/11}{100}=\frac{129}{11\times 50}=\frac{129}{550}.$$

স্পষ্টত $\frac{129}{550}$, বা $.23\dot{4}\dot{5}$ একটি মূলদ সংখ্যা।

**টীকা :** (i) উদা. 1-এর আবৃত্ত দশমিক সংখ্যাগুলিতে দশমিক বিন্দুর অব্যবহিত পরেই আবৃত্ত অংশ সুরু হইয়াছে। লক্ষ্ণীয়, এইরূপ সংখ্যার আবৃত্ত অংশে যতগুলি অঙ্ক থাকে ততগুলি 9 হরে বসাইয়া আবৃত্ত অংশের সংখ্যাটিকে লবে বসাইলেই সংখ্যাটি ভগ্নাংশে রূপান্তরিত হয়।

(ii) উদা. 2-এর সংখ্যাটিতে আবৃত্ত অংশ দশমিক বিন্দুর দুইঘর পরে সুরু হইয়াছে। সেইজন্য সংখ্যাটিকে 100 দিয়া যুগপৎ গুণ ও ভাগ করিয়া লব ভাগে সংখ্যাটির দশমিক বিন্দুকে আবৃত্ত অংশের অব্যবহিত পূর্বে সরাইয়া দেওয়া হইয়াছে। তাহার পর (i) এর নিয়মে আবৃত্ত অংশকে ভগ্নাংশে পরিণত করা হইয়াছে এবং সর্বশেষে সরল করিয়া লঘিষ্ঠ আকারের একটি ভগ্নাংশ পাওয়া গিয়াছে।

আবৃত্ত দশমিককে অন্য উপায়েও ভগ্নাংশে পরিণত করা যায়।

**উদা. 3. দেখাও যে, $\sqrt{3}$ একটি অমূলদ সংখ্যা।**

$\sqrt{3}$ যদি মূলদ হয় তবে যেন,

$\sqrt{3}=\frac{p}{q}$ যেখানে $p$ ও $q$ অখণ্ড সংখ্যা, $q\neq 0$ এবং $\frac{p}{q}$ একটি লঘিষ্ঠ আকারের ভগ্নাংশ।

তাহা হইলে, $p$ ও $q$-এর মধ্যে 1 ভিন্ন কোন সাধারণ উৎপাদক নাই।

স্পষ্টত:, $p^2=3q^2$ এবং সেই কারণে $p^2$ একটি 3-এর গুণিতক সংখ্যা। কিন্তু $p$ ও যদি 3-এর গুণিতক না হয় তবে $p^2$ কখনই 3-এর গুণিতক হইতে পারে না। পারিলে ধরা যাক $p=3k+1$ অথবা $3k+2$।

অর্থাৎ $p^2=9k^2+2.3k.1+1$ অথবা $9k^2+2.3k.2+4$

$=3(3k^2+2k)+1$ অথবা $3(3k^2+4k+1)+1$

স্পষ্টতঃ $3(3k^2+2k)+1$ অথবা $3(3k^2+4k+1)+1$—কোনটিই 3-এর গুণিতক নহে। সেই কারণে $p^2$ ও 3-এর গুণিতক হইবে না। কিন্তু কল্পনা অনুসারে $p^2$-কে 3-এর গুণিতক ধরা হইয়াছে। দেখা যাইতেছে, $p$ যদি 3-এর গুণিতক হয় তবেই ইহা সম্ভব। সুতরাং $p^2$ যেহেতু 3-এর গুণিতক সেইহেতু $p$-ও নিশ্চয় 3-এর গুণিতক। ধরা যাক, $p=3n$.

তাহা হইলে, $p^2=9n^2=3q^2$ অর্থাৎ $q^2=3n^2$.

অর্থাৎ $q^2$ এবং সেই কারণে $q$-ও অবশ্যই 3-এর গুণিতক। সেক্ষেত্রে $\frac{p}{q}$ লঘিষ্ঠ আকারের ভগ্নাংশ থাকে না, কারণ উহার লব $p$ ও হর $q$—উভয়ের মধ্যে 3 একটি উৎপাদক হয়। কিন্তু ইহা কল্পনা-বিরুদ্ধ। সুতরাং $\sqrt{3}$-কে $\frac{p}{q}$-এর আকারে লঘিষ্ঠ ভগ্নাংশে লেখা যায় না এবং সেই কারণে $\sqrt{3}$ মূলদ নহে, অমূলদ সংখ্যা।

**উদা. 4.** $-5$ ও 2 চিহ্নিত বিন্দুদুইটির মধ্যবর্তী বিন্দুটি কোন্ বাস্তব সংখ্যা সূচিত করে?

$-5$ হইতে 2 চিহ্নিত বিন্দুর দূরত্ব $=|-5-2|=|-7|=7$. এই দূরত্বের অর্ধেক $=\frac{1}{2}.7=\frac{7}{2}$.

$-5$ হইতে 2-এর দিকে $\frac{7}{2}$ একক দূরবর্তী বিন্দুটি $-5+\frac{7}{2}$ বা $\frac{-10+7}{2}$ বা $\frac{-3}{2}$ বিন্দুটি সূচিত করিবে। কাজেই $-5$ ও 2 চিহ্নিত বিন্দু দুইটির মধ্যবিন্দু $\frac{-7}{2}$ বাস্তব সংখ্যাটিকে সূচিত করে।

**টীকা:** 2-চিহ্নিত বিন্দু হইতে $-5$ চিহ্নিত বিন্দুর দিকে ঐ দুই বিন্দুর মধ্যবর্তী বিন্দুটিও $\left(2-\frac{7}{2}\right)$ বা $\frac{4-7}{2}$ বা $\frac{-3}{2}$ বাস্তব সংখ্যাই সূচিত করে।

**উদা. 5.** $a<b$ এবং $a$ ও $b$ অখণ্ড হইলে $a^2$ ও $b^2$-এর তুলনা কর।

(i) $a>0$ হইলে অর্থাৎ ধন-সংখ্যা হইলে, ধরা যাক্ $a+h=b$ যেখানে $h>0$ অর্থাৎ $h$ ধনাত্মক।

তাহা হইলে $(a+h)^2=b^2$ অথবা $a^2+2ah+h^2=b^2$

$\therefore\ a^2<b^2$ [ $\because\ 2ah+h^2=$ একটি ধনসংখ্যা ]

(ii) কিন্তু যদি $a<0$ অর্থাৎ $a$ ঋণসংখ্যা হয় তবে ধরা যাক $a=-k$ এবং $a+h=b$ যেখানে $k$ ও $h$ ধনসংখ্যা। সেক্ষেত্রে

$(a+h)^2=b^2$. $\therefore\ (h-k)^2=b^2$

অথবা, $h^2-2hk+k^2=b^2$

অথবা, $k^2+h(h-2k)=b^2$.

এখন, $h=2k$ হইলে, $h(h-2k)=0$

$\therefore\ a^2=k^2=b^2$

কিন্তু $h>2k$ হইলে $h(h-2k)$ ধনাত্মক কাজেই $b^2>k^2$ বা $a^2$.

কিন্তু $h<2k$ হইলে $h(h-2k)$ ঋণাত্মক এবং সেই কারণে $k^2$ বা $a^2>b^2$.

সুতরাং $a<b$ এবং $a<0$ হইলে, $a^2$ এবং $b^2$-এর মধ্যে সঠিক কোন ক্রম-সম্পর্ক বাহির করা যাইবে না।

## প্রশ্নমালা 1

1. নিম্নলিখিত সংখ্যাগুলির মধ্যে কোন্‌গুলি মূলদ এবং কোন্‌গুলিই বা অমূলদ ?

(i) $\cdot 00125$ ; (ii) $\cdot 0125\cdots$ ; (iii) $0\cdot 12555\cdots$ ;

(iv) $0\cdot 51551555\cdots$ ; (v) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$ ; (vi) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ ;

(vii) $\cdot 71\dot{5}$ ; (viii) $\cdot\dot{8}\dot{1}$ ; (ix) $\frac{\cdot 5\dot{8}}{\cdot 85}$ ;

(x) $\frac{5\sqrt{2}}{3\times 1\cdot 4142135\cdots}$.

2. প্রমাণ কর যে, নিম্নলিখিত সংখ্যা দুইটির প্রত্যেকটি অমূলদ সংখ্যা ;

(i) $\sqrt{2}$ ; (ii) $\sqrt{5}$.

3. $\frac{6}{7}$ এবং $\frac{7}{8}$-এর মধ্যবর্তী 4টি মূলদ সংখ্যা নির্ণয় কর।

4. $\frac{1}{2}$ ও $\frac{2}{3}$-কে দশমিক ভগ্নাংশে রূপান্তরিত করিয়া তাহাদের মধ্যবর্তী 2টি মূলদ সংখ্যা এবং ঐ দুইটি মূলদ সংখ্যার মধ্যবর্তী দুইটি অমূলদ সংখ্যা নির্ণয় কর।

5. মানের উর্ধ্ব-ক্রমানুসারে সাজাও :

(i) $\cdot 428571$, $\frac{2}{7}$, $\cdot 28578$, $\cdot 28581$, $\cdot 28671$.

(ii) $\cdot 35612\cdots$, $\cdot 35621\cdots$, $\cdot 35554\cdots$.

6. সংখ্যা-রেখার উপর $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ও $\sqrt{7}$-কে চিহ্নিত কর।

7. তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত অঙ্কসমন্বিত এমন দুইটি মূলদ সংখ্যা নির্ণয় কর যাহারা $\sqrt{2}$-এর সন্নিকট এবং $\sqrt{2}$ যাহাদের মধ্যবর্তী।

[সংকেত : $(1\cdot 4)^2 = 1\cdot 96$ এবং $(1\cdot 5)^2 = 2\cdot 25$ এবং $(\sqrt{2})^2 = 2$.

$\therefore$ বর্গমূল লইয়া, $1\cdot 4 < \sqrt{2} < 1\cdot 5$ ; আবার $(1\cdot 41)^2 = 1\cdot 9881$, $(1\cdot 411)^2 = 1\cdot 990911$ ইত্যাদিক্রমে $(1\cdot 414)^2 = 1\cdot 999396$ কিন্তু $(1\cdot 415)^2 = 2\cdot 002225$। অর্থাৎ $1\cdot 414 < \sqrt{2} < 1\cdot 415$ ইত্যাদি ]

8. $x$ একটি বাস্তব সংখ্যা হইলে দেখাও যে,

(i) $-|x| \leqslant |-x|$ ; (ii) $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$.

9. $x$ যে-কোন বাস্তব সংখ্যা এবং $h$ যদি এমন কোন ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা হয় যে $|x| \leqslant h$, তবে,

(i) দেখাও যে, $-h \leqslant x \leqslant h$ ;

(ii) বিপরীত ক্রমে দেখাও যে, $-h \leqslant x \leqslant h$ হইলে $|x| \leqslant h$.

[সংকেত : $x \geqslant 0$ হইলে $|x| = x$ এবং $x < 0$ হইলে $|x| = -x$ ধরিয়া অগ্রসর হও। ]

10. $|x| = 5$ হইলে $x$-এর মান কি হইতে পারে ?

11. $|5x| = 5x$ হইলে $x$-এর মান কি হইবে ?

12. $|x| \leqslant 5$ হইলে দেখাও যে, $-5 \leqslant x \leqslant 5$.

13. $|5x| \geqslant 5$ হইলে দেখাও $x$-এর মান যে-কোন বাস্তব সংখ্যা।

14. $x$ ও $y$ বাস্তব সংখ্যা এবং $x < y$ হইলে, কারণসহ কোন্‌টি সত্য এবং কোন্‌টি সত্য নয় তাহা দেখাও :

(i) $(x+3) \leqslant (y+2)$ ; (ii) $(x-3) < (y-2)$ ;

(iii) $\frac{x}{5} < \frac{y}{5}$ ; (iv) $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$ ; (v) $x < \frac{x+y}{2} < y$.

15. $x$ বাস্তব সংখ্যা হইলে যুক্তি দ্বারা প্রমাণ কর যে,

(i) $|x| = \sqrt{x^2}$ এবং (ii) $|x|$-এর মান $x$ ও $-x$-এর মধ্যে যে-টি বড় সেইটির সমান।

# দ্বিতীয় অধ্যায়

## একটি চলক-সম্বলিত অপেক্ষক

## ( Functions of a Single Variable )

**2·1. চলক ( Variable ) :**

($a$) যে-রাশির মান সর্বদা নির্দিষ্ট ও অপরিবর্তনীয় তাহাকে **ধ্রুবক** এবং যে-রাশির মান ( পরিবর্তনশীল অর্থে ) চলমান তাহাকে **চলরাশি বা চলক** বলে।

ধ্রুবক সংখ্যাগুলি 1, 2, 3 প্রভৃতি যে-কোন সংখ্যা এবং $a, b, c \cdots k, l, m, n$ প্রভৃতি অক্ষর দ্বারা সূচিত করা হয়। **চলক** সংখ্যাকে সূচিত করা হয়, $x, y, z, u, v$ প্রভৃতি অক্ষর দ্বারা।

($b$) **চলকের অবকাশ ( Interval of a Variable ) :**

প্রত্যেক চলকের মান সমূহ যে-দুইটি প্রান্তিক মানের মধ্যে সীমাবদ্ধ থাকে সেই দুইটি প্রান্তিক মানের মধ্যবর্তী বিস্তারকে বলে উহার অবকাশ। উদাহরণস্বরূপ, $x$-চলকটির মান-সমূহ দুইটি ধ্রুবক $a$ ও $b$-এর মধ্যবর্তী এবং $a<b$ হইলে $x$-এর অবকাশ হইবে $(b-a)$ পরিমাণ বিস্তৃত।

(i) **বদ্ধ অবকাশ ( Closed Interval ) :** আলোচ্য ক্ষেত্রে যদি $a \leqslant x \leqslant b$ হয়, তবে, $x$-এর অবকাশটিকে বলা হয় **বদ্ধ অবকাশ** এবং তাহাকে সাংকেতিক চিহ্নে লেখা হয় $[a, b]$-রূপে।

(ii) **মুক্ত অবকাশ ( Open Interval ) :** কিন্তু যদি $a<x<b$ হয় তবে $x$-চলকটির নিম্ন ও উর্ধ্ব সীমা নির্দিষ্ট হইল না। $x$-এর ক্ষুদ্রতম মান $a$ হইতে বড় কিন্তু ঠিক কত তাহা নির্দিষ্ট নহে। তেমনি উহার বৃহত্তম মান $b$ হইতে ক্ষুদ্রতর কিন্তু ঠিক কত তাহা নির্দিষ্ট নহে। এইরূপ ক্ষেত্রে $x$-এর অবকাশটিকে বলা হয় **মুক্ত অবকাশ** এবং তাহাকে সাংকেতিক চিহ্নে লেখা হয় $]a, b[$ এইরূপে।

(ii) **অর্ধবদ্ধ বা অর্ধমুক্ত অবকাশ ( Semi-closed or Semi-open Interval ) :** $a \leqslant x<b$ এবং $a<x \leqslant b$ এই দুইটি সম্পর্কের মধ্যে দেখা যায় প্রথমটিতে $x$-এর ক্ষুদ্রতম মান এবং দ্বিতীয়টিতে $x$-এর বৃহত্তম মান নির্দিষ্ট। কিন্তু প্রথমটিতে $x$-এর বৃহত্তম মান এবং দ্বিতীয়টিতে ক্ষুদ্রতম মান নির্দিষ্ট নহে। এই রকম ক্ষেত্রে $x$-এর অবকাশকে বলে **অর্ধবদ্ধ** বা **অর্ধমুক্ত**। $a \leqslant x<b$ হইলে, সাংকেতিক চিহ্নে $x$-এর অর্ধবদ্ধ বা অর্ধমুক্ত অবকাশ হইবে $[a, b[$ এবং $a<x \leqslant b$ হইলে $x$-এর অর্ধবদ্ধ বা অর্ধমুক্ত অবকাশ হইবে $]a, b]$.

(c) **নিরপেক্ষ ও সাপেক্ষ চলক** (**Independent and Dependent Variable**)**:**

অনেক সময় একটি চলক সম্বলিত একটি রাশির মান হিসাবে অপর একটি চলক কল্পিত হয়। উদাহরণস্বরূপ $x$-চলকটি সম্বলিত $x-5$ রাশিটির মান $x$-এর বিভিন্ন মানের জন্য বিভিন্ন হইতে পারে। অতএব রাশিটির মান $x$-এর মান সাপেক্ষ অপর একটি চলক $y$-রূপে কল্পিত হইতে পারে এবং লেখা যাইতে পারে যে, $y=x-5$. স্পষ্টত এক্ষেত্রে $x$ প্রদত্ত এবং উহার মান **নিরপেক্ষ** ভাবে পরিবর্তনশীল ; কাজেই উহাকে **নিরপেক্ষ-চলক** বলা হয়। কিন্তু দেখা যায়, $y$ এখানে $x$-এর মান সাপেক্ষে প্রাপ্ত মান ; অর্থাৎ উহার মান $x$-এর মানের উপর নির্ভরশীল। সেই কারণে এইরূপ ক্ষেত্রে $y$-কে বলে **সাপেক্ষ চলক**।

**2·2. একটি চলক-সম্বলিত অপেক্ষক (Function of a single Variable) :**

(i) অপেক্ষকের আলোচনার সূচনায় প্রথমে একটি প্রশ্ন বিচার করা যাইতে পারে। প্রশ্নটি যেন এইরূপ :

একটি বাস্তব সংখ্যাকে 2 দিয়া গুণ করিয়া প্রাপ্ত গুণফলের সহিত 1 যোগ করিলে অপর একটি বাস্তব সংখ্যা পাওয়া যায়। প্রদত্ত সংখ্যাটির সহিত উহা হইতে উল্লিখিত নিয়মে প্রাপ্ত সংখ্যাটির সম্পর্ক কিরূপ ?

এখানে প্রথমোক্ত সংখ্যাটিকে $x$ ধরিলে, $x$-এর মান যে-কোন বাস্তব সংখ্যা হইতে পারে। সেক্ষেত্রে $x$ একটি চলক এবং উহার অবকাশ $]-\infty, \infty[$, অর্থাৎ $-\infty$ হইতে $\infty$ পর্যন্ত বিস্তারিত। অর্থাৎ $-\infty < x < \infty$.

তাহা হইলে প্রদত্ত নিয়মটি হইল : "$x$-এর অবকাশ সীমায় উহার প্রত্যেকটি মানকে 2 দিয়া গুণ করিয়া প্রাপ্ত গুণফলের সহিত 1 যোগ করিতে হইবে।" এই নিয়ম অনুসারে, $x$-এর প্রতিটি মান হইতে $2x+1$ আকারের একটি মান পাওয়া যাইবে। কথার ভাষায় লিখিত এই সম্পর্কটিকে সাংকেতিক ভাষায় লেখা হয় এইভাবে : $x \to 2x+1$ এবং তাহার অর্থ $x$ হইতে প্রদত্ত নিয়মে প্রাপ্ত মান $2x+1$.

(ii) উল্লিখিত সম্পর্কটিকে তালিকার আকারেও প্রকাশ করা যায়। যথা—

0 হইতে প্রদত্ত নিয়মে প্রাপ্ত মান $1(=2\times0+1)$.

অনুরূপে, 1 হইতে 3 $(=2\times1+1)$,

2 " 5 $(=2\times2+1)$,

3 " 7 $(=2\times3+1)$,

4 " 9 $(=2\times4+1)$,

5 " 11 $(=2\times5+1)$,

ইত্যাদিক্রমে $x$ " $2x+1\,(=2\times x+1)$ পাওয়া যায়।

সুতরাং দেখা যাইতেছে যে (0,1), (1,3), (2,5), (3,7), (4,9), (5,11) প্রভৃতির মত সাধারণভাবে ( $x, 2x+1$) একই সম্পর্কে সংশ্লিষ্ট। আরও দেখা যায় যে, এইরূপ প্রত্যেক জোড়া মানের প্রথমটি হইতে প্রদত্ত নিয়মে যে একটি এবং মাত্র একটিই সংখ্যা পাওয়া যায় তাহাই হইল উহার সহিত সংশ্লিষ্ট বা বন্ধনীর ভিতর জোটবদ্ধ দ্বিতীয় সংখ্যাটি। এইভাবেই, 1-এর সহিত 3, 2-এর সহিত 5, 3-এর সহিত 7, 4-এর সহিত 9, 5-এর সহিত 11 এবং সাধারণভাবে $x$-এর সহিত $2x+1$ সংখ্যাটি সম্পর্কিত ও বন্ধনীভুক্ত হইয়াছে। একটির সহিত একটির এইরূপ সম্পর্ককে তাই **এক-এক বা ঐকৈক সম্পর্ক** বলে। সম্পর্কটির দ্বিতীয় বৈশিষ্ট্য হইল এই যে, প্রথম সংখ্যাটির মান হইতে প্রদত্ত নিয়মে প্রাপ্ত দ্বিতীয় সংখ্যাটির মান প্রথমোক্ত সংখ্যাটির মানের উপরই নির্ভরশীল বা অপেক্ষক। এই কারণে উল্লিখিত ঐকৈক সম্পর্কটিকে গণিতের ভাষায় বলে **অপেক্ষক**।

(iii) সুতরাং উপরের (i) ও (ii) বিভাগের আলোচনার আলোকে অপেক্ষক সম্বন্ধে, এইবার, নিম্নরূপ একটি সংজ্ঞা দেওয়া যায়ঃ

**একটি চলকের অবকাশ সীমার মধ্যে উহার বিভিন্ন মানের প্রত্যেকটি হইতে যখন প্রদত্ত একটি নিয়মে অপর একটি এবং মাত্র একটিই সংখ্যা পাওয়া যায় তখন ঐ চলকের মান ও উহা হইতে প্রাপ্ত সংখ্যার সম্পর্কটিকে বলে একটি চলক-সম্বলিত অপেক্ষক।**

এখানে উল্লেখযোগ্য **অপেক্ষক বলিতে এই গ্রন্থে সর্বদা বাস্তব অপেক্ষকই বুঝান হইবে।**

(iv) এই অনুচ্ছেদের (ii) বিভাগের আলোচনা হইতে দেখা যায়, (1, 3), (2, 5), (3, 7), (4, 9), (5, 11) প্রভৃতি বন্ধনীভুক্ত প্রতিজোড়া মানের মধ্যে প্রদত্ত সংজ্ঞায় এক ও অভিন্ন যে-একটি ঐকৈক সম্পর্ক রহিয়াছে তাহাকেই অপেক্ষক বলা হয়। তাহা হইলে বলা যায়, প্রদত্ত সংজ্ঞা বা নিয়মে বদ্ধ কতগুলি যুগলমানকে লইয়াই একটি অপেক্ষক গঠিত। সেই বিচারে,

**অপেক্ষক মাত্রই সংজ্ঞাবদ্ধ নিয়মে সম্পর্কিত যুগলমানের সমবায়।**

**2 3. অপেক্ষকের সাংকেতিক চিহ্ন ( Function Notation ):**

(a) অপেক্ষক কথাটি ইংরাজি function-এর প্রতিশব্দ। সেই কারণে function-এর আদ্যক্ষর $f$-দ্বারা একটি অপেক্ষক সূচিত হইয়া থাকে। অনেক ক্ষেত্রে অবশ্য $f$-এর বদলে, $g$, $h$, $\phi$, $s$, প্রভৃতি অন্যান্য অক্ষর দ্বারাও অপেক্ষক সূচিত হয়।

পূর্বের আলোচনা অনুসারে, দেখা গিয়াছে যে বাস্তব সংখ্যা $x$ হইতে প্রাপ্ত $2x+1$

একটি বাস্তব সংখ্যা। এই $x$ ও $(2x+1)$-এর সম্পর্কটি একটি অপেক্ষক বুঝায়। এখন এই অপেক্ষকটিকে যদি $f$-দ্বারা সূচিত করা হয় তবে উহাকে সাংকেতিক ভাষায় নিম্নলিখিত যে-কোন একটি উপায়ে প্রকাশ করা যায় :

(i) $f$ এমন একটি অপেক্ষক যাহা $f(x)=2x+1$ সমীকরণ দ্বারা সংজ্ঞাবদ্ধ ;

(ii) $f$ এমন একটি অপেক্ষক যাহার সংজ্ঞা $y=2x+1$ ;

(iii) $f$ এমন একটি অপেক্ষক যাহার সংজ্ঞা $x \to 2x+1$

( অর্থাৎ $x$ হইতেছে $2x+1$ )।

(iv) $f(x)=2x+1$ একটি অপেক্ষক।

তাহা হইলে, যখন $x=0$, তখন $f(0)=2\times 0+1=1$,

„ $x=1$, „ $f(1)=2\times 1+1=3$,

„ $x=2$, „ $f(2)=2\times 2+1=5$,

„ $x=3$, „ $f(3)=2\times 3+1=7$,

ইত্যাদি ক্রমে, „ $x=x$ „ $f(x)=2\times x+1=2x+1$.

অনুরূপে, যদি $g$ অপেক্ষকটির সংজ্ঞা হয়, $g(x)=\sqrt{16-x^2}$-এর ধনাত্মক মূল তবে,

$$g(-4)=\sqrt{16-(-4)^2}=\sqrt{16-16}=0,$$
$$g(-3)=\sqrt{16-(-3)^2}=\sqrt{16-9}=\sqrt{7},$$
$$g(-2)=\sqrt{16-(-2)^2}=\sqrt{16-4}=\sqrt{12}=2\sqrt{3},$$
$$g(-1)=\sqrt{16-(-1)^2}=\sqrt{16-1}=\sqrt{15},$$
$$g(0)=\sqrt{16-0^2}=\sqrt{16}=4$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$g(4)=\sqrt{16-4^2}=\sqrt{16-16}=0.$$

এইভাবে দেখা যায় $f(x)$ দ্বারা $x$ হইতে প্রাপ্ত একটি মান বুঝায়। **কাজেই $f(x)$-এর অর্থ যেমন $f\times(x)$ নহে, তেমনি উহাকে $x$-এর অপেক্ষক বলাও সঙ্গত নহে।** কারণ $x$ ও $f(x)$-এর সম্পর্কটিকেই অপেক্ষক বলে এবং তাহা $f$ দ্বারা সূচিত হয়। অনুরূপে $g(x)=\sqrt{16-x^2}$ সংজ্ঞায় $g$ একটি অপেক্ষক।

($b$) অপেক্ষক সকল সময় একটি মাত্র সমীকরণের সংজ্ঞায় সূচিত হয় না। বস্তুতঃ এমন কিছু অপেক্ষক আছে যাহাদের বৈজিক রাশির সম্পর্ক দ্বারা আদৌ প্রকাশ করা যায় না ; তাহাদের কথার ভাষায় বা লেখ-দ্বারা প্রকাশ করিতে হয়। এই ধরনের অপেক্ষকের আলোচনা পরে আসিবে।

আপাততঃ, এই কথাটি মনে রাখা প্রয়োজন যে একটিমাত্র সমীকরণের সংজ্ঞা দ্বারা একটি অপেক্ষক প্রকাশ করিতেই হইবে, এমন কোন কথা নাই। আবশ্যিক ইহাই যে একটি অপেক্ষকের সম্পর্কিত মান-যুগল সর্বদা একটি নিয়মের সংজ্ঞায় আবদ্ধ থাকিবে।

$f(x) = |x|$ অপেক্ষকটিকে বিচার করা যাইতে পারে। যেহেতু, $|x| = x$, যখন $x \geqslant 0$ এবং $|x| = -x$, যখন $x < 0$, সেইহেতু আলোচ্য $f$ অপেক্ষকটিকে নিচের মত দুইভাগে প্রকাশ করা যায়।

$f(x) = x$, যখন $x \geqslant 0$ এবং $f(x) = -x$, যখন $x < 0$. সংক্ষেপে, এই অপেক্ষকটিকে সাংকেতিক চিহ্নে লেখা যায় এইভাবে :

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

## 2·4. অপেক্ষকের ব্যাপ্তি ও প্রসার ( Domain and Range of a function ) :

অপেক্ষকের সংজ্ঞাটি বিশ্লেষণ করিলে দেখা যায় যে উহার মধ্যে, (i) একটি অবকাশ সীমায় উল্লিখিত চলকের বিভিন্ন মান সম্বলিত এক প্রস্থ সংখ্যা, (ii) অপেক্ষকটির সংজ্ঞাসূচক একটি নিয়ম এবং (iii) প্রথমোক্ত সংখ্যাগুলি হইতে প্রাপ্ত অপেক্ষক-সম্পর্কে সম্পর্কিত আরেক প্রস্থ সংখ্যার ধারণা নিহিত রহিয়াছে।

ইহাদের মধ্যে প্রথমোক্ত প্রস্থের অর্থাৎ **প্রদত্ত চলকের অবকাশটিকে বলা হয় অপেক্ষকটির ব্যাপ্তি ( Domain ) এবং প্রথমোক্ত প্রস্থ হইতে প্রদত্ত নিয়মে প্রাপ্ত সংখ্যাগুলির শেষোক্ত প্রস্থটির অবকাশকে বলা হয় অপেক্ষকটির প্রসার (Range).**

(i) এই সংজ্ঞা অনুসারে, যদি $f(x) = 2x + 1$ হয়, যেখানে $x$ একটি বাস্তব সংখ্যা, তবে অপেক্ষক $f$-এর ব্যাপ্তি $]-\infty, \infty[$ অর্থাৎ বাস্তব সংখ্যার প্রস্থ R ; কেননা $x$-এর মান বাস্তব সংখ্যার প্রস্থে $-\infty$ হইতে $\infty$ পর্যন্ত উভয়দিকে মুক্ত অবকাশে বিস্তৃত। অনুরূপে $x$-এর প্রতিটি মানের জন্য যে $f(x)$-মানটি পাওয়া যাইবে তাহাও সমগ্র বাস্তবসংখ্যার প্রস্থটির মধ্যে প্রসারিত ; কাজেই এক্ষেত্রে $f$-এর প্রসারও $]-\infty, \infty[$.

(ii) কিন্তু $g(x) = +\sqrt{16 - x^2}$ সংজ্ঞায় বিবৃত $g$ অপেক্ষকটির বেলায় দেখা যায় $x$-এর মান $-4$ হইতে ক্ষুদ্রতর বা 4 হইতে বৃহত্তর হইতে পারে না। কারণ $x$-এর মান $-4$ হইতে ক্ষুদ্রতর বা 4 হইতে বৃহত্তর হইলেই $x^2$-এর মান 16 হইতে বৃহত্তর হইবে। তখন $16 - x^2$ ঋণাত্মক এবং সেই কারণে $+\sqrt{16 - x^2}$ একটি কাল্পনিক সংখ্যা হইয়া পড়িবে। পূর্বেই বলা হইয়াছে যে, অপেক্ষক বলিতে আমরা বাস্তব সংখ্যার সম্পর্কই

বুঝিব। অতএব $x$-এর মান এখানে $-4$ ও $4$—এর মধ্যে সীমাবদ্ধ অর্থাৎ এখানে $-4 \leqslant x \leqslant 4$. অতএব এক্ষেত্রে $g$-এর ব্যাপ্তি $[-4, 4]$.

আবার দেখা যায় $g(x)$-এর বৃহত্তম মান হইল $g(0)=\sqrt{16-0^2}=4$ এবং $g(4)=+\sqrt{16-4^2}=0$ ও $g(-4)=+\sqrt{16-(-4)^2}=0$ বলিয়া $g(x)$—এর ক্ষুদ্রতম মান$=0$. সুতরাং $g$-এর প্রসার $[0,4]$.

টীকা : এখানে লক্ষণীয় যে (i) এর $f$ অপেক্ষকটির ব্যাপ্তি, "$x$ একটি বাস্তব সংখ্যা" কথাটির মধ্যে ব্যক্ত কিন্তু (ii) এর $g$ অপেক্ষকটির ব্যাপ্তি অনুক্ত। $g$-এর সংজ্ঞা হইতে উহার ব্যাপ্তি নির্ণয় করা হইয়াছে।

(iii) $y=\dfrac{1+x}{5-x}$ সংজ্ঞায় প্রকাশিত $f$ অপেক্ষকটিতে যদি $x=5$ হয় তবে $y=\dfrac{1+x}{0}$ হইয়া পড়ে। সেক্ষেত্রে $y$-এর অর্থাৎ $f(x)$-এর কোন মানই পাওয়া যায় না। সুতরাং $y=\dfrac{1+x}{5-x}$ সূচিত অপেক্ষকটির ব্যাপ্তির মধ্যে 5 সংখ্যাটি অবর্তমান। $x$-এর মান তাই, 5 ছাড়া যে কোন বাস্তব সংখ্যা হইতে পারে। সুতরাং 5-বর্জিত বাস্তব সংখ্যার প্রস্থটিই এখানে ব্যাপ্তি। সংকেতিক ভাষায় বাস্তব সংখ্যার প্রস্থ R-দ্বারা সূচিত হয় ; সেই কারণে 5 বর্জিত R—কে সূচিত করা হয় $R \sim 5$ সংকেত দ্বারা।

অতএব $y=\dfrac{1+x}{5-x}$-এর ব্যাপ্তি $R \sim 5$। কিন্তু অপেক্ষকটির প্রসার 5 বর্জিত নহে। কারণ, $x=4$ হইলে $x=\dfrac{1+4}{5-4}=\dfrac{5}{1}=5$ ; অতএব অপেক্ষকটির প্রসার R প্রস্থ

বা $]-\infty, \infty[$.

(iv) $f(x)=\sqrt{(1-x)(x-3)}$-এর ধনাত্মক মূল লইলে $x=1$ বা, $x=3$-এর জন্য $f(x)=0$. কিন্তু $x<1$ বা $x>3$-এর জন্য $f(x)$ কাল্পনিক হইয়া পড়ে। সেই কারণে এখানে $f$-এর ব্যাপ্তি $[1, 3]$.

(v) কিন্তু $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{(1-x)(x-3)}}$ সূচিত $g$ অপেক্ষকটিতে $\left(\sqrt{(1-x)(x-3)}\right.$ ধনাত্মক ধরিলে$\left.\right)$ $x=1$ বা $x=3$ হইতে পারে না, কেননা $x$-এর মান 1 বা 3 হইলে $g(x)=\dfrac{1}{0}$ হইয়া পড়ে এবং সেক্ষেত্রে $g(x)$-এর কোন মান পাওয়া যায় না। সুতরাং $x$-এর মান এখানে এইরূপ যে $1<x<3$ অর্থাৎ এক্ষেত্রে $g$-এর ব্যাপ্তি $]1, 3[$.

**2·5. অপেক্ষকত্ব-বিচার ( Examinatiom of functionality ) ঃ**

কোন সমীকরণ একটি অপেক্ষক সূচিত করে কিনা তাহা বিচার করিবার সময় প্রথমেই দেখিতে হইবে উহার মধ্যে কোনটি নিরপেক্ষ চলক। দ্বিতীয়তঃ ঐ নিরপেক্ষ চলকটির ব্যাপ্তি নির্ণয় করিতে হইবে। তৃতীয়তঃ, দেখিতে হইবে ঐ ব্যাপ্তির সীমায় নিরপেক্ষ চলকটির প্রত্যেকটি মান হইতে প্রদত্ত সমীকরণের নিয়মে একটি এবং মাত্র একটিই মান পাওয়া যায় কিনা। যদি যায়, তবেই সমীকরণটি একটি অপেক্ষক সূচিত করিবে।

এই প্রসঙ্গে মনে রাখা প্রয়োজন, যে-কোন অপেক্ষকের ব্যাপ্তির মধ্যস্থ একাধিক মান হইতে প্রদত্ত নিয়মে প্রসারের একই মান পাওয়া যাইতে পারে। উদাহরণস্বরূপ, $f(x)=x^2$ অপেক্ষকটির ব্যাপ্তি বাস্তবসংখ্যার প্রস্থ R অর্থাৎ $]-\infty, \infty[$. উহার $x=1$ হইতে $f(x)=1$ এবং $x=-1$ হইতেও $f(x)=1$ পাওয়া যায়। সুতরাং $(1, 1)$ এবং $(-1, 1)$ উভয়ই $f$-এর অন্তর্ভুক্ত। অনুরূপে $(2, 4)$, $(-2, 4)$, $(3, 9)$ $(-3, 9)$ ইত্যাদি প্রত্যেকটি যুগলমান $f$-এর অন্তর্ভুক্ত। এইরূপ বন্ধনীভুক্ত প্রতিটি যুগলমানের প্রথমটি $f$ অপেক্ষকের ব্যাপ্তির এবং দ্বিতীয়টি ( প্রথমটি হইতে প্রাপ্ত ) প্রসারভুক্ত মান। অপেক্ষকের সংজ্ঞায় কোথায়ও এমন কথা নাই যে প্রসার-ভুক্ত একটি মান ব্যাপ্তির একাধিক মান হইতে উৎপন্ন হইতে পারে না। বলা হইয়াছে শুধু ইহাই যে ব্যাপ্তির প্রতিটি মান হইতে প্রসারের মধ্যে একটির বেশী মান থাকিতে পারিবে না। আলোচ্য ক্ষেত্রে 1 হইতে প্রদত্ত নিয়মে 1 ছাড়া দ্বিতীয় কোন সংখ্যা পাওয়া যায় না। তেমনি $-1$ হইতেও প্রদত্ত নিয়মে একটির বেশী মান পাওয়া যায় না, হউক না তাহা সেই 1. সুতরাং দেখিতে হইবে শুধু এই যে, একাধিক বন্ধনীভুক্ত যুগলমানের মধ্যে যেন ব্যাপ্তিভুক্ত প্রথম মানটি না থাকে। তাহা হইলেই অপেক্ষকত্ব সম্বন্ধে কৃতনিশ্চয় হওয়া যাইবে। এই নিয়মে $(2, 4)$ ও $(-2, 4)$ একটি অপেক্ষকের অন্তর্ভুক্ত যুগলমান হইতে পারে। কিন্তু $(4, 2)$ ও $(4, -2)$ কখনও একটি অপেক্ষকের যুগলমান হইতে পারে না, কেননা সেক্ষেত্রে 4 হইতে 2 ও $-2$, এই দুইটি মান পাওয়া যায়।

অপেক্ষক সম্বন্ধে উপরের আলোচনাটুকু সর্বপ্রযত্নে মনে রাখিয়া এইবার কয়েকটি সমীকরণের অপেক্ষকত্ব বিচার করা যাইতে পারে।

(i) $y^2=x$ সমীকরণটিতে $x$ যদি ধনাত্মক বাস্তব মান হয় অর্থাৎ $x$-এর অবকাশ যদি $[0, \infty[$ হয় তবে $y=\pm\sqrt{x}$. সুতরাং $x$-এর প্রতিটি মান হইতে উহার ধনাত্মক ও ঋণাত্মক, এই দুইটি বর্গমূল পাওয়া যায়। অর্থাৎ সেক্ষেত্রে $x$ হইতে

$+\sqrt{x}$ ও $-\sqrt{x}$ এই দুইটি মান পাওয়া যায়। অতএব $y^2=x$ একটি অপেক্ষক সূচিত করিতে পারে না।

(ii) কিন্তু $y=+\sqrt{x}$ সমীকরণে $x$-এর ব্যাপ্তি যদি $[0, \infty[$ হয় তবে $x$-এর প্রতিটি ধনাত্মক বাস্তব মান হইতে উহার ধনাত্মক বর্গমূল হিসাবে একটিই এবং একটি মাত্র মান পাওয়া যাইবে। অতএব উহা একটি অপেক্ষক সূচিত করিবে।

অনুরূপে, $x \geqslant 0$ হইলে $y=-\sqrt{x}$ একটি অপেক্ষক সূচিত করিবে।

(iii) $|y|=x$ হইলে $y=x$ বা $-x$ হইতে পারে। কারণ $|x|=x$ এবং $|-x|=x$. সুতরাং $x$-এর প্রতিটি মান হইতে এখানে দুইটি ভিন্ন মান পাওয়া যায়। অতএব $|y|=x$ একটি অপেক্ষক নহে।

কিন্তু $y=|x|$ একটি অপেক্ষক ; কেননা $x$-এর যে-কোন বাস্তব মান $a$ বা $-a$ হইলে $|a|=a$ এবং $|-a|=a$. অর্থাৎ $(a, a)$ বা $(-a, a)$ আকারের একাধিক যুগলমানে কখনও প্রথম মানটি পুনরাবৃত্ত হইবে না। ইহার অর্থ $x$-এর প্রতিটি বাস্তব মান হইতে একটি এবং মাত্র একটিই ধনাত্মক বাস্তব মান পাওয়া যাইবে।

(iv) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ সমীকরণটি কি শর্তে একটি অপেক্ষক সূচিত করিবে?

$x=0$ হইলে $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{0}}=\dfrac{1}{0}$ হইয়া পড়ে। সেক্ষেত্রে $f(x)$-এর কোন মান পাওয়া যাইবে না। সেইরূপ $x<0$ হইলে $\sqrt{x}$ কাল্পনিক হইয়া পড়ে। তৃতীয়তঃ, $x>0$ হইলেও $\sqrt{x}$-এর দুইটি বর্গমূলের জন্য $f(x)$-এর দুইটি মান পাওয়া যাইবে বলিয়া $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ অপেক্ষক হইবে না ; অতএব $x>0$ হইলে এবং $\sqrt{x}$ দ্বারা $x$-এর ধনাত্মক বর্গমূল বুঝাইলেই $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ একটি অপেক্ষক সূচিত করিবে।

## উদাহরণমালা

**উদা. 1.** প্রতিটি স্বাভাবিক সংখ্যার সহিত উহার অব্যবহিত পরবর্তী সংখ্যাটি অপেক্ষক-সম্পর্কে সম্পর্কিত ; সাংকেতিক সূত্রে এই অপেক্ষকটি প্রকাশ কর। ঐ সূত্রের সাহায্যে 3, 5 ও 11 হইতে প্রাপ্ত মানগুলিকে কিভাবে প্রকাশ করা যায়?

$n$ যে-কোন একটি স্বাভাবিক সংখ্যা হইলে, উহার অব্যবহিত পরের সংখ্যাটি হইবে $n+1$ ; সুতরাং $n$-এর সহিত $(n+1)$-এর সম্পর্কটিকে $f$ অপেক্ষক দ্বারা সূচিত করিয়া লেখা যায়,

$f(n)=n+1$, যেখানে $n$ একটি স্বাভাবিক সংখ্যা। এই সূত্র অনুসারে 3, 5 ও 11 হইতে প্রাপ্ত মানগুলিকে নিম্নরূপে প্রকাশ করা যায় :

$$f(3)=3+1=4$$
$$f(5)=5+1=6$$
$$f(11)=11+1=12.$$

উদা. 2. নিম্নলিখিত সম্পর্ক দুইটিকে গণিতের ভাষায় প্রকাশ কর এবং তাহাদের কোন্‌টি অপেক্ষক ও কোন্‌টি অপেক্ষক নয় তাহা কারণসহ বল।

(i) প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় প্রভৃতি স্বাভাবিক সংখ্যার সহিত 1-এর পরবর্তী প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় প্রভৃতি বিজোড় সংখ্যার সম্পর্ক।

(ii) যে-কোন বাস্তব সংখ্যার সহিত উহার বর্গসংখ্যার বর্গমূলের সম্পর্ক।

(i) এখানে, প্রথম বিজোড় সংখ্যা $=3=2\times1+1$,

দ্বিতীয় " " $=5=2\times2+1$,

তৃতীয় " " $=7=2\times3+1$,

$n$-তম " " $=2\times n+1$ ইত্যাদি ?

$\therefore$ $n$ স্বাভাবিক সংখ্যা হইলে $n$-তম বিজোড় সংখ্যা হইবে $2n+1$ এবং উহার মান $y$ হইলে,

$$f(n)=2n+1$$
$$\text{বা,}\quad y=2n+1$$

ইহা হইতে দেখা যায় $n$-এর 1, 2, 3, প্রভৃতি প্রতিটি মান হইতে $2n+1$-এর একটি এবং মাত্র একটিই মান পাওয়া যায়। সুতরাং,

$y=2n+1$, ( যেখানে $n$ একটি স্বাভাবিক সংখ্যা ) একটি অপেক্ষকের সংজ্ঞা।

(ii) $x$ যে-কোন একটি বাস্তব সংখ্যা হইলে উহার বর্গসংখ্যা $x^2$. এই $x^2$-এর বর্গমূল $\sqrt{x^2}$ ; কাজেই $\sqrt{x^2}$-এর মান $y$ ধরিলে,

$y=\sqrt{x^2}$, যেখানে $x$ একটি বাস্তবসংখ্যা।

যেহেতু $\sqrt{x^2}=\pm x$ সেইহেতু $x$-এর প্রতিটি বাস্তব মানের জন্য $\sqrt{x^2}$ অর্থাৎ $y$-এর দুইটি মান পাওয়া যাইবে। সেইজন্য, এখানে

$y=\sqrt{x^2}$ একটি অপেক্ষক নহে।

উদা. 3. $f(x)=x^2-x+1$ হইলে নিম্নলিখিত মানগুলি নির্ণয় কর :

(i) $f(3)+f(1)$ ; (ii) $f(3+1)$ ; (iii) $f(2).f(3)$ ; (iv) $f(2.3)$ ; (v) $f(4)\div f(2)$ ; (vi) $f(4\div 2)$.

(i) $f(3)=3^2-3+1==7$ এবং $f(1)=1^2-1+1=1$

$\therefore\ f(3)+f(1)=7+1=8.$

(ii) $f(3+1)=f(4)=4^2-4+1=13.$

(iii) $f(2)=2^2-2+1=3$ এবং $f(3)=7$

$\therefore\ f(2).\,f(3)=3\times7=21$ ;

(iv) $f(2.3)=f(6)=6^2-6+1=31$ ;

(v) $f(4)\div f(2)=\dfrac{f(4)}{f(2)}=\dfrac{4^2-4+1}{2^2-2+1}=\dfrac{13}{3}=4\frac{1}{3}$ ;

(vi) $f(4\div2)=f(2)=3.$

উদা. 4. $g(x)=x+1$ এবং $h(x)=2x-1$ হইলে নিম্নলিখিত মানগুলি নির্ণয় কর ;

(i) $g(h(2))$ ; (ii) $h(g(2))$ ; (iii) $g(4)+h(1)$ ;

(iv) $g\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\ h\left(\frac{1}{5}\right)$ ; (v) $h(3)^{g(-2)}$.

(i) $h(2)=2\cdot2-1=3$ ; $\therefore\ g(h(2))=g(3)=3+1=4$ ;

(ii) $g(2)=2+1=3$ ; $\therefore\ h(g(2))=h(3)=2.3-1=5$ ;

(iii) $g(4)=4+1=5$ ; $h(1)=2.1-1=1$ ;

$\therefore\ g(4)+h(1)=5+1=6$ ;

(iv) $g\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}$ এবং $h\left(\frac{1}{5}\right)=2.\frac{1}{5}-1=\frac{-3}{5}$ ;

$\therefore\ g\left(\frac{1}{4}\right).h\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{5}{4}\times\frac{-3}{5}=\frac{-3}{4}$ ;

(v) $h(3)=2\times3-1=5$ ; $g(-2)=-2+1=-1$ ;

$\therefore\ h(3)^{g(-2)}=5^{-1}=\frac{1}{5}.$

উদা. 5. নিম্নলিখিত প্রত্যেকটি অপেক্ষকের অন্তর্ভুক্ত ব্যাপ্তি ও প্রসার নির্ণয় কর ঃ

(i) $f(x)=\frac{1}{x}$ ; (ii $f(x)=\sqrt{9-x^2}.$

(i) $x=0$ হইলে ; $f(x)=\frac{1}{0}$ বলিয়া $x=0$-এর জন্য $f(x)$-এর কোন মান পাওয়া যাইবে না। $x$-এর অন্য প্রত্যেকটি বাস্তব মানের জন্য $f(x)$-এর একটি বাস্তব মান পাওয়া যাইবে। আবার $x$-এর শূন্য ভিন্ন কোন বাস্তব মানের জন্যই $\frac{1}{x}$-এর মান 0 হইবে না।

সুতরাং এক্ষেত্রে $f$-এর ব্যাপ্তি ও প্রসার উভয়ই 0-বর্জিত বাস্তব-সংখ্যার প্রস্থ অর্থাৎ $R \sim 0$.

(i) এখানে, $f(0)=\sqrt{9-0}=\sqrt{9}=3$ এবং $f(\pm 3)=\sqrt{9-(\pm 3)^2}$
$=\sqrt{9-9}=0.$

এখানে $x<-3$ বা $x>3$ হইলে $\sqrt{9-x^2}$-এর মান কাল্পনিক হইয়া পড়ে। আবার $\sqrt{9-x^2}$-এর সর্বোচ্চ বাস্তব মান 3 এবং সর্বনিম্ন বাস্তব মান 0.

সুতরাং $f$-এর ব্যাপ্তি $[-3, 3]$ এবং প্রসার $[0, 3]$.

**টীকা :** লক্ষ্যণীয় যে এখানে $\sqrt{9-x^2}$ দ্বারা ধনাত্মক বর্গমূল সাপেক্ষেই $f$ একটি অপেক্ষক।

**উদা. 6.** $f(k)$ যদি 2 হইতে 12-এর মধ্যে $k$-তম অখণ্ড সংখ্যার 1 ভিন্ন মৌলিক উৎপাদকগুলির সংখ্যা সূচিত করে তবে $f$-এর ব্যাপ্তি ও প্রসার কত?

$f(3)+f(12)-f(6)$-এর মান কত?

2 হইতে 12 পর্যন্ত 11টি অখণ্ড সংখ্যার যে-কোনটি $k$-এর মান হইতে পারে। সুতরাং এক্ষেত্রে $f$-এর ব্যাপ্তি $[2, 12]$, যখন $k$ অখণ্ড সংখ্যা। আবার, 2 হইতে 12 পর্যন্ত কোন সংখ্যার মধ্যে একটির কম বা 3টির বেশী উৎপাদক নাই। সুতরাং এক্ষেত্রে $f$-এর প্রসার $[1, 3]$.

তৃতীয়তঃ, $f(3)=1$, $f(12)=f(3.2.2)=3$ এবং $f(6)=f(2.3)=2$

$\therefore \quad f(3)+f(12)-f(6)=1+3-2=2.$

## প্রশ্নমালা 2

**1.** নিচের প্রত্যেকটি প্রশ্নে একটি অপেক্ষক সম্পর্ক বিবৃত হইয়াছে। উহাকে সাংকেতিক ভাষায় প্রকাশ কর :

(i) স্বাভাবিক সংখ্যার প্রস্থে প্রত্যেকটি সংখ্যা হইতে উহার সহিত একৈক সম্পর্কে সংশ্লিষ্ট একটি অখণ্ড জোড়সংখ্যা পাওয়া যায়।

(ii) প্রত্যেকটি অখণ্ড জোড়সংখ্যা হইতে একৈক-সম্পর্কে সম্পর্কিত একটি অখণ্ড বিজোড় সংখ্যা আছে।

(iii) প্রত্যেক ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হইতে উহার দ্বিগুণ অপেক্ষা 1 কম, এমন একটি অখণ্ড ধনসংখ্যা পাওয়া যায়।

(iv) প্রত্যেকটি স্বাভাবিক সংখ্যার একটি অন্যোন্যক আছে।

(v) দুই অঙ্কের প্রতিটি অখণ্ড ধনসংখ্যা উহার অঙ্ক দুইটির সমষ্টির সহিত একৈক সম্পর্কে সম্পর্কিত।

2. 1 নম্বর প্রশ্নের অন্তর্গত প্রতিটি অপেক্ষকের ব্যাপ্তি ও প্রসার নির্ণয় কর।

3. নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলিতে বিবৃত সম্পর্কগুলির কোন্‌টি অপেক্ষক এবং কোনটি অপেক্ষক নয় তাহা কারণসহ বল :

(i) [1, 2] অবকাশে প্রত্যেকটি বাস্তব সংখ্যার সহিত উহার অর্ধেক বাস্তব সংখ্যার সম্পর্ক।

(ii) প্রত্যেকটি স্বাভাবিক সংখ্যার সহিত প্রত্যেকটি মৌলিক স্বাভাবিক সংখ্যার সম্পর্ক।

(iii) যে-কোন বাস্তবসংখ্যার সহিত উহার ঘনমানের সম্পর্ক।

(iv) একটি বাড়ির প্রত্যেকটি ঘরে 4টি জানালা থাকিলে প্রতিবাড়ির ঘরের সংখ্যার সহিত মোট জানালার সংখ্যার সম্পর্ক।

(v) প্রত্যেকটি ধনাত্মক বাস্তবসংখ্যার সহিত উহার চতুর্থ মূলের সম্পর্ক।

(vi) $y = +\sqrt{x}$, $x$ বাস্তব সংখ্যা।

(vii) $y = \sqrt{x}$, $x$ অখণ্ড ধনসংখ্যা।

(viii) $y^3 = x$, $x$ বাস্তবসংখ্যা।

(ix) $y = \dfrac{3x^2}{x}$, $x$ বাস্তবসংখ্যা।

(x) দুই অঙ্কের সংখ্যাগুলির প্রতিটির অঙ্ক-দুইটির সমষ্টির সহিত ঐ সংখ্যার সম্পর্ক।

4. $f(x) = 2x^2 - 5$ হইলে নিম্নলিখিত মানগুলি নির্ণয় কর :

(i) $f(1)$; (ii) $f(2)$; (iii) $f(3) + f(3)$; (iv) $f(3+3)$; (v) $2f(2)$; (vi) $f(1).f(2)$; (vii) $f(1.2)$; (viii) $f(4) \div f(2)$; (x) $f(4 \div 2)$; (xi) $f\left(\frac{1}{2}\right)$; (xi) $\dfrac{1}{f(2)}$.

5. $f(x) = x + 1$ এবং $g(x) = 2x - 1$ হইলে নিম্নলিখিত মানগুলি নির্ণয় কর :

(i) $f(g(1))$; (ii) $g(f(1))$;

(iii) $g(1) - f(1)$; (iv) $f(2) - g(1)$;

(v) $f(1).\, g(1)$; (vi) $f(9) \div g(3)$

(vii) $\dfrac{f(1).\, g(2)}{g(1).f(2)}$; (viii) $\dfrac{f(1)}{g(1)} + \dfrac{f(4)}{g(3)}$;

(ix) $f(2)^{g(0)}$; (x) $g(2)^{f(1)}$.

6. $a_0x^9+a_1x^8+a_2x^7+\cdots+a_8x+a_9$. এই রাশিমালাটির $k$-তম পদে $x$-উৎপাদকটির সংখ্যা যদি $f(k)$ দ্বারা সূচিত হয়, তবে,

(i) $f$-এর ব্যাপ্তি কি? (ii) $f$-এর প্রসার কত? (iii) $f(7)+f(5)-f(4)-f(9)$ – এর মান কত?

7. "এক-প্রস্থ সংখ্যার একটির সহিত আরেক প্রস্থ সংখ্যার একটির, এক হইতে একের সম্পর্ককে ঐকৈক-সম্পর্ক বলে।"—এই বাক্যটির $n$-তম শব্দে 'ক'-অক্ষরটির সংখ্যা যদি $g(n)$-দ্বারা সূচিত হয়, তবে,

(i) $g$-এর ব্যাপ্তি, (ii) $g$-এর প্রসার এবং (iii) $\dfrac{g(11)+g(13)-g(12)}{g(1)-g(3)+g(5)}$-এর মান নির্ণয় কর।

8. নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলির অনুক্ত ব্যাপ্তি ও প্রসার নির্ণয় কর :

(i) $f(x)=x^2+1$ ; (ii) $f(x)=2x$ ;

(iii) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ ; (iv) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$ ;

(v) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$ ; (vi) $f(x)=\dfrac{x^2-3x-1}{x-3}$ ;

(vii) $f(x)=x$ ; (vii) $f(x)=\dfrac{x^2}{x}$ ;

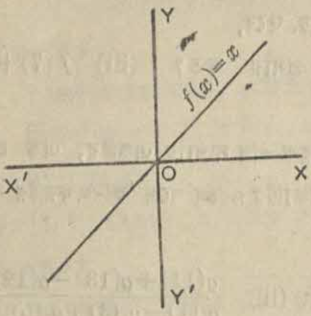
(ix) $f(x)=\sqrt{1-x}$ ; (x) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$.

## 2·6. একটি চলকবিশিষ্ট বিভিন্ন প্রকারের অপেক্ষক (Different kinds of Single-valued functions) :

অপেক্ষকের প্রকারভেদ জ্যামিতিক চিত্র দ্বারা প্রত্যক্ষ করা যাইতে পারে। ইতিপূর্বে 2·2 অনুচ্ছেদের (iv) বিভাগে দেখা গিয়াছে যে, অপেক্ষকমাত্রই উহার সংজ্ঞানির্দিষ্ট সম্পর্কে বদ্ধ যুগলমান সমূহ লইয়া গঠিত।

সুতরাং $f$ যদি $x$-সম্বলিত কোন একটি অপেক্ষক সূচিত করে, তবে $x$-এর প্রতিটি মান হইতে একটি $f(x)$-মান এবং তাহা হইতে $(x, f(x))$ আকারের কতকগুলি যুগলমান পাওয়া যাইবে। এইরূপ প্রতিটি যুগলমানের প্রথমটিকে ভুজের এবং দ্বিতীয়টিকে কোটির মান ধরিলে কার্তেজীয় অক্ষতন্ত্রে একটি বিন্দু পাওয়া যাইবে। এইভাবে প্রাপ্ত বিন্দুগুলিকে যুক্ত করিলে $f$-এর একটি লেখ চিত্রিত হইবে। বলা বাহুল্য উহাই হইবে $f$-এর জ্যামিতিক চিত্র এবং তাহা হইতে $f$-এর স্বরূপ প্রত্যক্ষ হইবে। নিচে এইরূপ চিত্রের সাহায্যে অপেক্ষকের প্রকার ভেদ আলোচনা করা যাইতেছে।

(a) **অভেদ অপেক্ষক** ( **Identity function** ) :

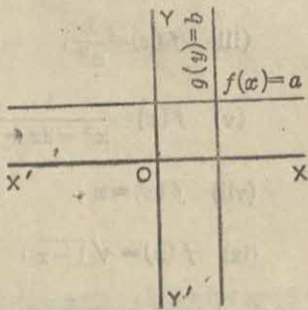



চিত্র—5

$x \to x$, $y = x$ অথবা $f(x) = x$ আকারের অপেক্ষককে অভেদ অপেক্ষক বলে। স্পষ্টতঃ, এইরূপ অপেক্ষকের ব্যাপ্তি ও প্রসার উভয়ই বাস্তব সংখ্যার গ্রস্থ R. 5নং চিত্রে উহার লেখ প্রদর্শিত হইয়াছে।

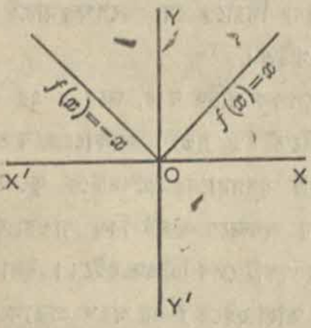
(b) **ধ্রুবক অপেক্ষক** (**Constant function**) :

$f(x) = a$ এবং $g(y) = b$ আকারের যে-সকল অপেক্ষকে $a$ ও $b$ ধ্রুবক, সেই সকল অপেক্ষককে **ধ্রুবক অপেক্ষক** বলে। 6নং চিত্রে $f$-এর লেখটি হইতে দেখা যায়, $f(-3) = a$, $f(-1) = a$, $f(0) = a$, $f(1) = a$, $f(2) = a$ ইত্যাদি-ক্রমে $x$-এর যে-কোন বাস্তব মানের জন্য $f(x) = a$.




চিত্র—6

অনুরূপে $g$-এর লেখটি হইতে দেখা যায় $y$-এর যে কোন বাস্তব মানের জন্য সর্বদা $g(y) = b$. স্পষ্টতঃ $f$ ও $g$ উভয়ের ব্যাপ্তি R, কিন্তু $f$-এর প্রসার $[a]$ এবং $g$-এর প্রসার $[b]$.




চিত্র—7

(c) **পরমমান বিশিষ্ট অপেক্ষক** ( **Absolute function** ) :

$f(x) = |x|$ বা $y = |x|$ আকারের অপেক্ষক পরমমান বিশিষ্ট।

যেহেতু, $|x| = x$, যখন $x \geqslant 0$.

এবং $|x| = -x$ যখন $x < 0$,

সেইহেতু, $f(x) = |x|$ সূচিত অপেক্ষকটির লেখ দুইটি শাখায় বিভক্ত উহারা নিম্নলিখিত দুইটি সমীকরণ দ্বারা

সূচিত : $f(x)=x$ যখন $x\geqslant 0$ এবং $f(x)=-x$ যখন $x<0$. 7নং চিত্র হইতে দেখা যায়, $f(x)=x$-এর লেখটির উপরিস্থ প্রত্যেক বিন্দুর ভুজ ও কোটির মান সমান ; কাজেই উহা YOX কোণের সমদ্বিখণ্ডক। আবার $x<0$ হইলে $f(x)=-x$-এর লেখটির উপরিস্থ প্রতিটি বিন্দুর ভুজ ঋণাত্মক এবং কোটি ধনাত্মক। কিন্তু সাংখ্যমানে ঐ ভুজ ও কোটি সমান। সুতরাং এক্ষেত্রে লেখটি YOX′ কোণের সমদ্বিখণ্ডক।

লক্ষণীয় যে $x>0$ হইলে $x$ এবং $x<0$ হইলে $-x$ ধনাত্মক এবং সেই কারণে $f(x)$ সর্বদা ধনাত্মক।

অতএব $f(x)=|x|$-এর লেখচিত্রের দুইটি শাখা একত্রে বিচার করিলে $f$-এর ব্যাপ্তি R এবং প্রসার $[0,\infty[$.

(d) **গরিষ্ঠ অখণ্ডসংখ্যা-জ্ঞাপক অপেক্ষক ( Greatest Integer function ) :**

3·14 হইতে ক্ষুদ্রতর অখণ্ড সংখ্যাগুলি হইল 3, 2, 1, 0, −1, −2···ইত্যাদি। ইহাদের মধ্যে গরিষ্ঠ অখণ্ড সংখ্যাটি হইতেছে 3 ; অনুরূপে −3·14 হইতে ক্ষুদ্রতর অখণ্ড-সংখ্যা −4, −5, −6···প্রভৃতির মধ্যে গরিষ্ঠ অখণ্ডসংখ্যাটি হইতেছে −4. আবার −5-এর সমান বা উহা হইতে ক্ষুদ্রতর অখণ্ডসংখ্যা −5, −6, −7,···প্রভৃতির −5-ই গরিষ্ঠ। সেইরূপে 4-এর সমান বা উহা হইতে ক্ষুদ্রতর অখণ্ড সংখ্যাগুলির মধ্যে 4ই গরিষ্ঠ। সুতরাং কোন সংখ্যা $x$-এর সমান বা উহা হইতে ক্ষুদ্রতর অখণ্ড সংখ্যাগুলির মধ্যে গরিষ্ঠ অখণ্ডসংখ্যাটি যদি $n$ হয় তবে তাহাকে সাংকেতিক চিহ্নে লেখা হয় $[[x]]=n$ ; স্পষ্টতঃ, $[[x]]=n$ হইলে, $n\leqslant x$.

অতএব, $[[\pi]]=[[3\cdot 14\cdots]]=3$, $[[\sqrt{3}]]=[[1\cdot 7\cdots]]=1$,

$\left[\left[\frac{1}{2}\right]\right]=0$, $[[2]]=2$, $[[-2]]=-2$, $[[-3\cdot 5]]=-4$, ইত্যাদি।

$f(x)=[[x]]$ আকারের অপেক্ষককে গরিষ্ঠ অখণ্ডসংখ্যা-জ্ঞাপক অপেক্ষক বলে।

স্পষ্টতঃ, $-3\leqslant x<-2$ হইলে $f(x)=-3$

$-2\leqslant x<-1$ ,, ,, $=-2$

$-1\leqslant x<0$ ,, ,, $=-1$

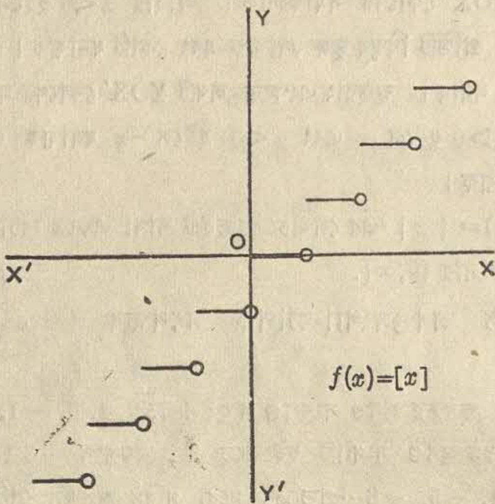
$0\leqslant x<1$ ,, ,, $=0$

$1\leqslant x<2$ ,, ,, $=1$

$2\leqslant x<3$ ,, ,, $=2$ ইত্যাদি।

8নং চিত্র হইতে দেখা যায় যে এক্ষেত্রে $f$-এর লেখটি ধাপে ধাপে −3 হইতে −2-এর কাছাকাছি, −2 হইতে −1-এর কাছাকাছি, −1 হইতে 0-এর কাছাকাছি,

0 হইতে 1-এর কাছাকাছি, 1 হইতে 2-এর কাছাকাছি, 2 হইতে 3-এর কাছাকাছি পর্যন্ত বিস্তারিত কতকগুলি সোপানের মত অনুভূমিক রেখার সমবায়ে গঠিত। এইজন্য




চিত্র—8

অখণ্ড-সংখ্যাজ্ঞাপক অপেক্ষকের আরেকটি নাম হইল সোপান অপেক্ষক ( Step function )। লক্ষণীয় যে আলোচ্য অপেক্ষকের খণ্ডলেখগুলির ডানদিকের প্রান্ত যে অখণ্ডসংখ্যা-সূচক বিন্দুর নিকটবর্তী সেই বিন্দুটি ফাঁকা।

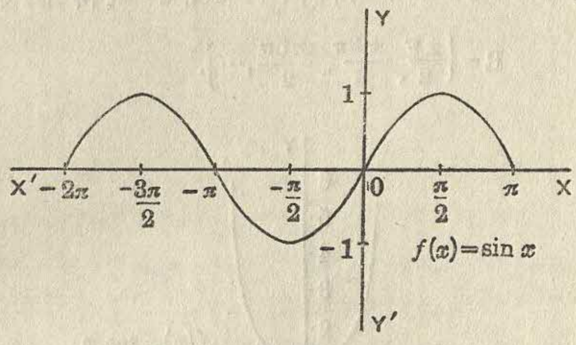
(e) **ত্রৈকোণমিতিক অপেক্ষক ( Trigonometrical function ) :**

ত্রৈকোণমিতিক অনুপাত-সম্বলিত অপেক্ষককে ত্রৈকোণমিতিক অপেক্ষক বলে। উদাহরণস্বরূপ, $f(x)=\sin x$, $y=\cos x$, $f(x)=\tan x$ প্রভৃতির প্রত্যেকটি ত্রৈকোণমিতিক অপেক্ষকের সমীকরণ।

**কলনগণিতে, ত্রৈকোণমিতিক অপেক্ষকের কোণের মান রেডিয়ানে ধরিতে হয়।** সেইজন্য 38 পৃষ্ঠায় রেডিয়ানে প্রকাশিত বিভিন্ন মানের কোণসমূহের ত্রৈকোণমিতিক অনুপাতগুলির মানের একটি সারণী দেওয়া হইল। মনে রাখা প্রয়োজন যে, রেডিয়ান মানে $\pi=\frac{22}{7}=3{\cdot}\dot{1}4285\dot{7}$. সুতরাং দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত, $\pi=3{\cdot}14$, $\frac{\pi}{2}=1{\cdot}57$ ইত্যাদি।

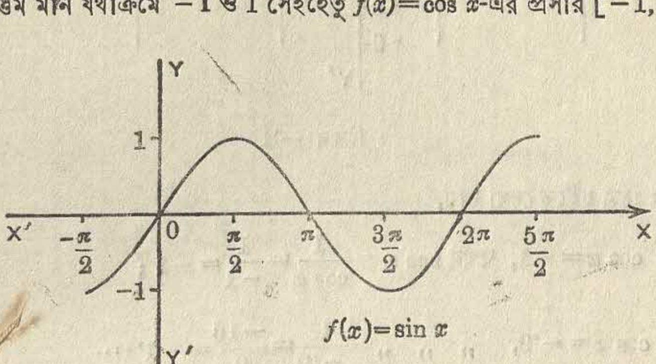
উল্লিখিত সারণীর সাহায্য লইয়া অনায়াসে ত্রৈকোণমিতিক অপেক্ষকের লেখ অঙ্কন করা যায়।

(i) এখন $x$-এর একটি নির্দিষ্ট বাস্তব মানের জন্য $\sin x$ হইতে একটি এবং একটিই মাত্র মান পাওয়া যায়। সুতরাং $f(x)=\sin x$ একটি অপেক্ষক এবং উহার ব্যাপ্তি বাস্তবসংখ্যার প্রস্থ R অর্থাৎ $]-\infty, \infty[$. ত্রিকোণমিতি আলোচনা তথা 9নং চিত্র হইতে দেখা যায় $\sin x$-এর নিম্নতম মান $-1$ এবং উর্ধ্বতম মান 1 হইতে পারে। সেইজন্য $f(x)=\sin x$-এর প্রসার $[-1, 1]$.




চিত্র নং—9

(ii) দ্বিতীয়তঃ, $x$-এর প্রতিটি বাস্তব মান হইতে $\cos x$-এরও একটি এবং মাত্র একটিই মান পাওয়া যায়। সুতরাং $f(x)=\cos x$ ও একটি অপেক্ষক। 10নং চিত্র হইতে দেখা যায় যে, এই অপেক্ষকটিরও ব্যাপ্তি R অর্থাৎ $]-\infty, \infty[$ ; কারণ $x$-এর মান যে-কোন বাস্তবসংখ্যা হইতে পারে। আবার যেহেতু $\cos x$-এর ক্ষুদ্রতম ও বৃহত্তম মান যথাক্রমে $-1$ ও 1 সেইহেতু $f(x)=\cos x$-এর প্রসার $[-1, 1]$.

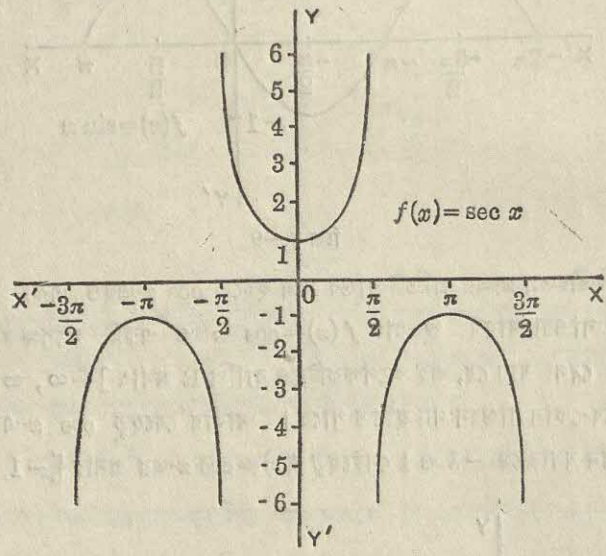



চিত্র নং—10

(iii) $\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$ বলিয়া $\cos x=0$ হইলে $\sec x$-এর কোন মান পাওয়া যায়

না। $x$-এর মান $= \pm\frac{\pi}{2}$ বা $\pm\frac{\pi}{2}$-এর যে-কোন বিজোড় গুণিতক হইলে $\cos x = 0$ হয়। $x$-এর অন্য প্রত্যেকটি বাস্তব মানের জন্যই $\sec x$-এর একটি এবং মাত্র একটিই মান পাওয়া যায়। সেই কারণে $x$-এর $\left\{\frac{\pm\pi}{2}, \frac{\pm 3\pi}{2}, \frac{\pm 5\pi}{2} \cdots \text{প্রভৃতি}\right\}$ বর্জিত মানের জন্য $f(x) = \sec x$ একটি অপেক্ষক। স্পষ্টতঃ, এই অপেক্ষকটির ব্যাপ্তি

$$R \sim \left\{\frac{\pm\pi}{2}, \frac{\pm 3\pi}{2}, \frac{\pm 5\pi}{2}, \cdots\right\}.$$




চিত্র নং—11

11নং চিত্র হইতে দেখা যায়,

যখন $\cos x = -1$, তখন $\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{-1} = -1$;

„ $\cos x = -{\cdot}9$, „ „ „ $= \frac{1}{-{\cdot}9} = \frac{-10}{9} = -1{\cdot}1\cdots$

„ $\cos x = -{\cdot}1$, „ „ „ „ $= \frac{1}{-{\cdot}1} = -\frac{10}{1} = -10$;

ইত্যাদি ইত্যাদি।

অর্থাৎ cos $x$-এর মান $-1$ হইতে বাড়িতে বাড়িতে যতই 0-এর নিকটবর্তী হইবে sec $x$-এর মান $-1$ হইতে ততই কমিতে থাকিবে।

আবার, যখন $\cos x = \cdot 1$, তখন $\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cdot 1} = \frac{10}{1} = 10$

" $\cos x = \cdot 5$, " " " " $= \frac{1}{\cdot 5} = \frac{10}{5} = 2$

" $\cos x = \cdot 9$, " " " " $= \frac{1}{\cdot 9} = \frac{10}{9} = 1\cdot 1$

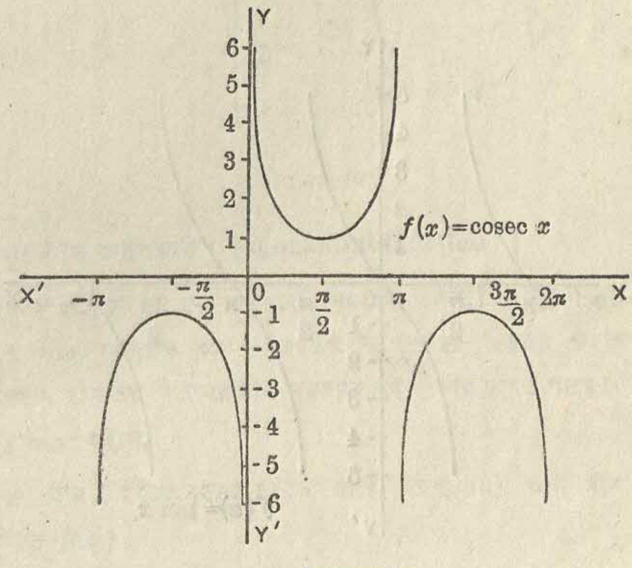
" $\cos x = 1$, " " " " $= \frac{1}{1} = 1.$

সুতরাং cos $x$-এর মান 0 হইতে বাড়িতে বাড়িতে গিয়া যখন 1-এ দাঁড়াইবে তখন sec $x$-এর মান কমিতে কমিতে আসিয়া 1-এ পরিণত হইবে।

তাহা হইলে দেখা যায়, sec $x$-এর মান কখনও $-1$-এর বড় বা 1-এর কম হইতে পারে না। অর্থাৎ উহা $-1$ ও 1-এর মধ্যবর্তী হইতে পারে না।

$\therefore$ $f(x) = \sec x$-এর প্রসার $-1$ হইতে 1 পর্যন্ত সকল বাস্তব সংখ্যা বর্জিত; অর্থাৎ ঐ প্রসার $R \sim ]-1, 1[$.

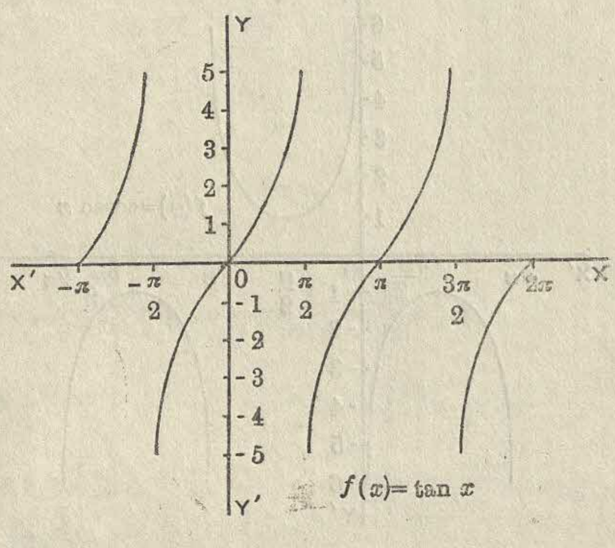
(iv) $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$ বলিয়া $\sin x = 0$ হইলে cosec $x$-এর কোন মান পাওয়া




চিত্র নং—12

যায় না। এখন, $x$-এর মান $\pm\pi$ বা $\pm\pi$-এর যে-কোন গুণিতক হইলেই এইভাবে $\sin x = 0$ হয়। সুতরাং $x$-এর মান $\{\pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi \cdots$প্রভৃতি$\}$ বর্জিত বাস্তব-সংখ্যার প্রস্থ হইতে $x$-এর প্রতিটি মানের জন্য $\operatorname{cosec} x$-এর একটি এবং মাত্র একটিই মান পাওয়া যাইবে। সেই কারণে $f(x) = \operatorname{cosec} x$ একটি অপেক্ষক। 12নং চিত্র হইতে দেখা যায় যে, এই অপেক্ষকটির ব্যাপ্তি $R \sim \{\pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi\}$. চিত্রটি হইতে আরও দেখা যায় যে, $\sec x$-এর মান কখনও $-1$ ও $1$-এর মধ্যবর্তী হয় না। সুতরাং $f(x) = \sec x$ -এর প্রসার $R \sim ]-1, 1[$.

(v) $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ বলিয়া $\cos x = 0$ হইলে $\tan x$-এর কোন মান পাওয়া যায় না। অতএব (iii)-এর আলোচনা হইতে স্পষ্ট হইবে যে, $R \sim \left\{\dfrac{\pm\pi}{2}, \dfrac{\pm 3\pi}{2}, \dfrac{\pm 5\pi}{2} \ldots\right\}$ সূচিত প্রস্থটির যে-কোন একটি বাস্তব মান হইতে $\tan x$-এর একটি এবং মাত্র একটি মান পাওয়া যাইবে। সুতরাং $f(x) = \tan x$ একটি অপেক্ষক এবং উহার ব্যাপ্তি $R \sim \left\{\dfrac{\pm\pi}{2}, \dfrac{\pm 3\pi}{2}, \dfrac{\pm 5\pi}{2} \ldots\right\}$. 13নং চিত্র তথা ত্রিকোণমিতির স্বাভাবিক tan-তালিকা হইতে দেখা যায় যে, $f(x) = \tan x$-এর প্রসার $]-\infty, \infty[$.

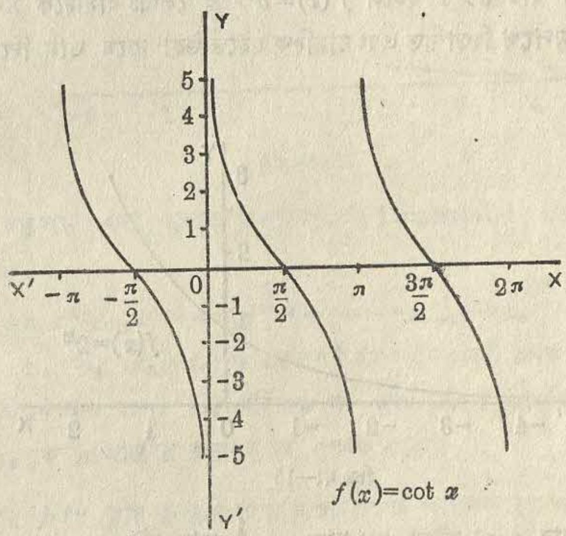



চিত্র নং—13

(vi) $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ বলিয়া যখন $\sin x = 0$ তখন $\cot x$-এর কোন মান থাকে না। সুতরাং $\{\pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \cdots\}$ বর্জিত বাস্তবসংখ্যার প্রস্থিত যে-কোন মান হইতে $\cot x$-এর একটি এবং একটিই মাত্র মান পাওয়া যাইবে। অতএব,

$f(x) = \cot x$ একটি অপেক্ষক এবং উহার ব্যাপ্তি $R \sim \{\pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi \cdots\}$. 13নং চিত্র তথা ত্রিকোণমিতির স্বাভাবিক cot-তালিকা হইতে দেখা যায় যে—;

$f(x) = \cot x$-এর প্রসার $]-\infty, \infty[$.




চিত্র নং—14

### (f) সূচকীয় অপেক্ষক ( Exponential function ) :

$f(x) = a^x$ আকারের যে-অপেক্ষকে নিরপেক্ষ চলকটি একটি নিধানের সূচক তাহাকে সূচকীয় অপেক্ষক বলে। এইরূপ অপেক্ষকের চিত্ররূপ উহার অন্তর্গত চলকটির অর্থাৎ সূচকটির নিধানের মান অনুসারে দুই প্রকার হইতে পারে। উদাহরণ-স্বরূপ, $f(x) = a^x$ হইলে,

(i) $a$-র মান 1 হইতে বৃহত্তর হইতে পারে অথবা (ii) $a$-র মান 1 হইতে ক্ষুদ্রতর হইতে পারে।

(i) এখন, $a > 1$ হইলে ধরা যাক্ $a = 2$.

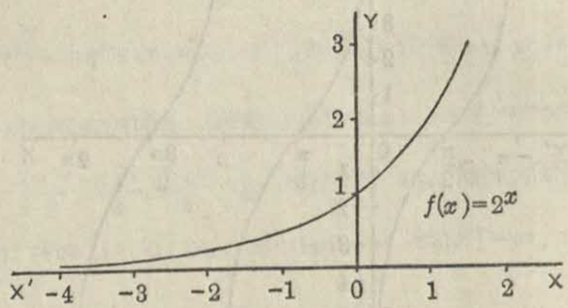
তাহা হইলে,

$f(-2)=2^{-2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}='25$ ;

$f(-1)=2^{-1}=\frac{1}{2}='5$

$f(0)=2^0=1$ ; $f(1)=2^1=2$ ইত্যাদি।

সুতরাং $(-2, '25)$, $(-1, '5)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$ প্রভৃতি বিন্দুগুলি চিহ্নিত করিয়া যুক্ত করিলে 15নং চিত্রে $f(x)=2^x$-এর লেখটি পাওয়া যাইতেছে। এইভাবে দেখা যায় $a>1$ হইলে $f(x)=a^x$-এর লেখটি বামদিকে X-অক্ষের গা-ঘেঁষিয়া **অসীমপথে** বিস্তারিত এবং বামদিক হইতে উহা ক্রমে ডান দিকে উর্ধ্বমুখে ক্রমবর্ধমান।




চিত্র নং—15

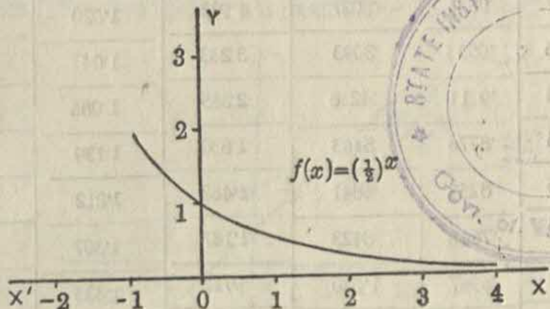
(ii) আবার, $a<1$ হইলে ধরা যাক $a=\frac{1}{2}$. তাহা হইলে,

$f(-1)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$ ; $f(0)=\left(\frac{1}{2}\right)^0=1$

$f(1)=\left(\frac{1}{2}\right)^1='5$ ; $f(2)=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}='25$ ইত্যাদি।

সুতরাং $(-1, 2)$, $(0, 1)$, $(1, '5)$, $(2, '25)$ প্রভৃতি বিন্দুগুলি চিহ্নিত ও যুক্ত করিয়া 16নং চিত্রে $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$-এর লেখটি পাওয়া যায়। এইভাবে দেখা যায়, $a<1$ হইলে $f(x)=a^x$-এর লেখটি বামদিকের অনন্ত সীমা হইতে ক্রমাগত নিম্নাভিমুখী হইয়া X অক্ষের গা-ঘেঁষিয়া **অসীম পথে** বিস্তারিত।

স্পষ্টতঃ, উভয়ক্ষেত্র $f(x)=a^x$-এর ব্যাপ্তি $]-\infty;\ \infty[$ এবং প্রসার $]0,\ \infty[$ অর্থাৎ $x$-এর মান বাস্তবসংখ্যার প্রস্থ R-এর যে কোন একটি হইতে পারে, কিন্তু $f(x)$-এর মান সর্বদা ধনাত্মক এবং 0-হইতে বৃহত্তর।




চিত্র নং—16

(g) **বহুপদ এবং মূলদ অপেক্ষক ( Polynomial and Rational functious ) :**

$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$ আকারের যে-অপেক্ষকে $a_0,\ a_1,\ a_2\cdots$প্রভৃতি প্রত্যেকটি সহগ এক একটি ধ্রুবক সংখ্যা, তাহাকে **বহুপদ অপেক্ষক** বলে। $a_0$ যদি শূন্য না হয়, তবে $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$-কে $n$-মাত্রার বহুপদ অপেক্ষক বলে।

উপরের $f$-এর ন্যায় $\phi$ যদি অপর একটি বহুপদ অপেক্ষক হয় অর্থাৎ যদি $\phi(x)=k_0x^m+k_1x^{m-1}+\cdots+k_n$ হয়, তবে $s(x)=\dfrac{f(x)}{\phi(x)}$-কে একটি **মূলদ অপেক্ষক** বলে।

## ত্রৈকোণমিতিক অপেক্ষকসংক্রান্ত সারণী

$\pi=\dfrac{22}{7}=3{\cdot}142857$ বলিয়া দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান, $\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{3{\cdot}14}{2}=1{\cdot}57,\quad \dfrac{\pi}{3}=\dfrac{3{\cdot}\ 4}{3}=1{\cdot}04,\ \dfrac{50\pi}{157}=\dfrac{50\times3{\cdot}14}{157}=1,\ \dfrac{\pi}{6}=\dfrac{3{\cdot}14}{6}={\cdot}52$ ইত্যাদি। এইভাবে $\pi$ এর নিরিখে প্রকাশিত সমস্ত কোণের রেডিয়ান মান বাস্তবসংখ্যা দ্বারা প্রকাশ করা যায়। পরের পৃষ্ঠায় সারণীটিতে বাস্তবসংখ্যায় প্রকাশিত কোণের রেডিয়ানমান হইতে প্রাপ্ত বিভিন্ন ত্রৈকোণমিতিক অনুপাতের মান দেওয়া হইয়াছে

| $x$ | $\sin x$ | $\cos x$ | $\tan x$ | $\cot x$ | $\sec x$ | $\operatorname{cosec} x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0·0 | ·0000 | 1·0000 | ·0000 | — | 1·0000 | — |
| 0·1 | ·0998 | ·9950 | ·1003 | 9·967 | 1·005 | 10·02 |
| 0·2 | ·1987 | ·9801 | ·2027 | 4·933 | 1·020 | 5·033 |
| 0·3 | ·2955 | ·9553 | ·3093 | 3·233 | 1·047 | 3·384 |
| 0·4 | ·3894 | ·9211 | ·4228 | 2·365 | 1·086 | 2·568 |
| 0·5 | 4794 | ·8776 | ·5463 | 1·830 | 1·139 | 2·086 |
| 0·6 | ·5646 | ·8253 | ·6841 | 1·462 | 1·212 | 1·771 |
| 0·7 | ·6442 | ·7648 | 8423 | 1·187 | 1·307 | 1·552 |
| 0·8 | ·7174 | ·6967 | 1·030 | ·9712 | 1·435 | 1·394 |
| 0·9 | ·7833 | ·6216 | 1·260 | ·7936 | 1·609 | 1·277 |
| 1·0 | ·8415 | ·5403 | 1·557 | ·6421 | 1·851 | 1·188 |
| 1·1 | ·8912 | ·4536 | 1·965 | ·5090 | 2·205 | 1·122 |
| 1·2 | ·9320 | ·3624 | 2·572 | ·3888 | 2·760 | 1·073 |
| 1·3 | ·9636 | ·2675 | 3·602 | ·2776 | 3·738 | 1·038 |
| 1·4 | ·9854 | ·1700 | 5·798 | ·1725 | 5·883 | 1·015 |
| 1·5 | ·9975 | ·0707 | 14·101 | ·0709 | 14·137 | 1·003 |
| 1·6 | ·9996 | −·0292 | −34·233 | −·0292 | −34·25 | 1·000 |

## উদাহরণমালা

**উদা. 1.** $f(x)=\dfrac{x^2-\cdot25}{x-\cdot5}$-এর লেখটি অঙ্কন কর।

$f(x)=\dfrac{x^2-\cdot25}{x-\cdot5}=\dfrac{x^2-(\cdot5)^2}{x-\cdot5}=\dfrac{(x+\cdot5)(x-\cdot5)}{x-\cdot5}$ বলিয়া $x=\cdot5$

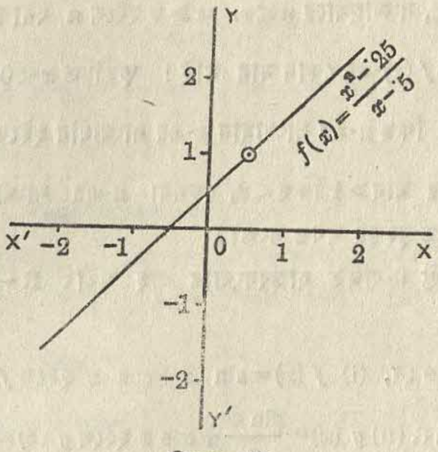
অর্থাৎ $x-\cdot5=0$ হইলে $f(x)=\dfrac{(\cdot5+5)\times0}{0}=\dfrac{1\times0}{0}=\dfrac{0}{0}$ হইয়া পড়ে এবং সেই কারণে $x=\cdot5$-এর জন্য $f(x)$-এর কোন মান নাই। কিন্তু $x\neq\cdot5$ হইলে,

$f(x)=\dfrac{(x+\cdot5)(x-\cdot5)}{x-\cdot5}=x+\cdot5$ হয়। সেক্ষেত্রে

| যখন $x=-1\cdot5$ | $-1$ | $-\cdot5$ | $0$ |
|---|---|---|---|
| তখন $f(x)=-1$ | $-\cdot5$ | $0$ | $\cdot5$ |

এবং $x=\cdot5$ – এর জন্য $f(x)$-এর মান নাই।

সুতরাং নিচে (17নং চিত্রে) চিত্রিত $\overleftrightarrow{AB}$ লেখটির উপর ('5, 1) বিন্দুটি নাই।

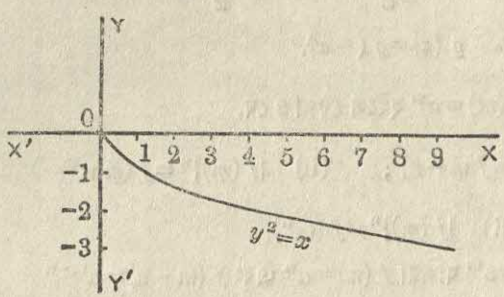



চিত্র নং—17

$\therefore$ ('5, 1) বর্জিত $\overleftrightarrow{AB}$ রেখাটিই নির্ণেয় লেখ।

উদা. 2. $y^2=x$ – এর ব্যাপ্তি $[0, \infty[$; এবং প্রসার $]-\infty, 0]$ হইলে অপেক্ষকটির লেখ অঙ্কন কর।

$y^2=x$ বা $y=\sqrt{x}$. প্রশ্নানুসারে, এখানে $x$-এর মান সর্বদা ধনাত্মক এবং $y$-এর মান ঋণাত্মক বা শূন্য। অর্থাৎ $y=-\sqrt{x}$ যখন $x>0$.




চিত্র নং—18

| যখন $x=0$ | $1$ | $4$ | $9$ |
|---|---|---|---|
| তখন, $y=0$ | $-1$ | $-2$ | $-3\cdots$ |

∴ (18নং) চিত্রে প্রদর্শিত নির্ণেয় লেখটি 0 হইতে P-এর দিকে বক্ররেখায় প্রসারিত।

**উদা. 3.** $f(x)=\frac{[[x]]}{x}$ হইলে $f$-এর ব্যাপ্তি ও প্রসার কত?

$[[x]]=n$ ধরিলে, সংজ্ঞানুসারে $n\leqslant x$. $x>0$ হইলে $n$ ধনাত্মক এবং $f(x)=\frac{n}{x}\leqslant 1$. $n=0$ হইলে $f(x)$-এর কোন মান নাই। তৃতীয়ত $x<0$ হইলে $n<0$ এবং $f(x)=\frac{n}{x}$ ধনাত্মক। কিন্তু $n$-এর সাংখ্যমান $x$-এর সাংখ্যমান হইতে বড়।

সেক্ষেত্রে $f(x)$এর মান$>1$ কিন্তু$<2$, কেননা $n$-এর সাংখ্যমান তখন $x$-এর সাংখ্যমানের অব্যবহিত বৃহত্তর অখণ্ড সংখ্যা।

∴ $f$-এর ব্যাপ্তি 0-বর্জিত বাস্তবসংখ্যার প্রস্থ অর্থাৎ $R\sim\{0\}$. এবং $f$-এর প্রসার $]0, 2[$.

**উদা. 4.** দেখাও যে, (i) $f(x)=\sin x+\cos x$ হইলে $f(2x)-f(-2x)=4\sin x\cos x$ এবং (ii) $g(x)=\frac{\sin x}{x}+\cos x$ হইলে $g(x)=g(-x)$.

(i) $f(x)=\sin x+\cos x$ বলিয়া $f(2x)-f(-2x)$

$$=\sin 2x+\cos 2x-\sin(-2x)-\cos(-2x)$$

$$=\sin 2x+\cos 2x+\sin 2x-\cos 2x=2\sin 2x=4\sin x\cos x.$$

(ii) $\because\ g(x)=\frac{\sin x}{x}+\cos x,\quad \therefore\ g(-x)=\frac{\sin(-x)}{-x}+\cos(-x)$

$$=\frac{-\sin x}{-x}+\cos x=\frac{\sin x}{x}+\cos x$$

$$\therefore\ g(x)=g(-x).$$

**উদা. 5.** $f(m)=a^m$ হইলে দেখাও যে,

(i) $\frac{f(m)}{f(n)}=f(m-n)$; (ii) $\{f(m)\}^n=f(m\,n)$

কিন্তু (iii) $\{f(m)\}^n\neq f(m^n)$.

(i) $f(m)=a^m$ বলিয়া $f(n)=a^n$ এবং $f(m-n)=a^{m-n}$

$$\therefore\ \frac{f(m)}{f(n)}=\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}=f(m-n).$$

(ii) $\{f(m)\}^n=(a^m)^n=a^{mn}=f(mn).$

(iii) $f(m^n)=a^{mn}$ এবং $\{f(m)\}^n=(a^m)^n=a^{mn}$.

$\because \quad a^{mn} \neq a^{mn}$,

$\therefore \quad \{f(m)\}^n \neq f(m^n)$.

## প্রশ্নমালা 3

1. নিম্নলিখিত প্রত্যেকটি অপেক্ষকের লেখ অঙ্কন কর:

(i) $f(x)=2x$ ; (ii) $y=\dfrac{x^2-4}{x+2}$ ;

(iii) $g(x)=x^2$-এর ধনাত্মক বর্গমূল ;

(iv) $y=(\cdot 2)^x$ ; (v) $f(x)=|2x|$, যখন $x>0$.

2. (i) $x \leqslant 0$ হইলে $f(x)=x^2$-এর এবং (ii) $1 \leqslant x < \infty$ হইলে $g(x)=\frac{1}{x}$ - এর লেখ অঙ্কন কর।

3. প্রমাণ কর যে, $f(x)=\sqrt[3]{x^3}$ একটি অভেদ অপেক্ষক। $f$-এর ব্যাপ্তি কত?

4. কোন অপেক্ষক $j$ হইতে $(-3, -3)$, $(-1, -1)$, $(1, 1)$ প্রভৃতি যুগলমান পাওয়া যায়। দেখাও যে, $j$ একটি অভেদ অপেক্ষক।

5. $g(x)=x^3+3x^2-2x+1$ এবং $j$ একটি অভেদ অপেক্ষক হইলে দেখাও যে (i) $j(1)=g(0)$ ; (ii) $g(-1)-g(1)=j(2)$.

6. $f$ একটি ধ্রুবক অপেক্ষক এবং $f(7)=7$ হইলে $f(0)$, $f(3)$, $f(8)$ এবং $f(x)$-এর মান কত?

7. $f$ একটি ধ্রুবক অপেক্ষক হইলে, (i) কখন $f(-x)=-f(x)$ এবং (ii) কখনই বা $f(-x) \neq -f(x)$ হইবে?

8. $f$ একটি ধ্রুবক অপেক্ষক হইলে দেখাও যে, $x$-এর যে-কোন মানের জন্য $f(x)=f(-x)$.

9. $f(x)=[[x]]$ এবং $1 \leqslant x < 7$ হইলে, (i) $f$-এর প্রসারের মানগুলি নির্ণয় কর। (ii) $f(2\cdot 5)$ এবং $f(5\cdot 2)$-এর মান কত?

10. $f(x)=\dfrac{x}{[[x]]}$ হইলে $f(4\cdot 5)$ এবং $f(-4\cdot 5)$-এর মান কত?

11. $f(x)=1-x^2$ হইলে, (i) $\sqrt{f(\sin x)}$ ; (ii) $\sqrt{f(\cos x)}$ ; (iii) $\sin f(1)$ ; (iv) $\cos f(1)$ ; (v) $\sqrt{f(\sec x)}$-এর মান নির্ণয় কর।

12. $f(x)=\sin x+\cos x$ হইলে দেখাও যে, (i) $f\left(\frac{x}{2}\right).f\left(-\frac{x}{2}\right)=\cos x$ এবং (ii) $\frac{f(x)^2-f(-x)^2}{2}=\sin 2x$.

13. (i) $f(x)=\cos x-x\sin x$; (ii) $f(x)=\sec x+\operatorname{cosec}^2 x$; (iii) $f(x)=\frac{\sin x}{x}+\cos x$; (iv) $f(x)=1+\sin x\tan x$; এবং (v) $f(x)=\cos x+\sec x$ হইলে দেখাও যে, প্রত্যেক ক্ষেত্রে $f(x)=f(-x)$.

14. নিম্নলিখিত প্রত্যেকটি অপেক্ষকের ব্যাপ্তি ও প্রসার নির্ণয় কর :

(i) $f(x)=1+\sin x$; (ii) $f(x)=\cos x-1$.

15. $f(x)=e^x$ হইলে দেখাও যে, (i) $f(a+b)=f(a)f(b)$; (ii) $f(-m)=1/f(m)$; (iii) $\{f(m)\}^{\frac{1}{m}}=f(1)$; (iv) $\sqrt{f(2)}=\pm f(1)$.

16. [0, 3] ব্যাপ্তির মধ্যে নিচের প্রত্যেকটি অপেক্ষকের লেখ অঙ্কন কর :

(i) $f(x)=\frac{[[x]]}{x}$; (ii) $g(x)=[[x]]+x$;

(iii) $s(x)=[[x]]-x$; (iv) $[[x+1]]$; (v) $[[x]]+1$.

## 2·7. বিপরীত অপেক্ষক (Inverse Function) :

একটি চলকবিশিষ্ট অপেক্ষকের আলোচনা হইতে একথা স্পষ্ট হইয়া থাকিবে যে, উহার ব্যাপ্তির মধ্যে চলকটির প্রতিটি মান হইতে অপেক্ষকটির সংজ্ঞা অনুসারে একটি এবং মাত্র একটিই মান পাওয়া যাইবে। ইহাও আলোচিত হইয়াছে যে, যে-সকল যুগলমান লইয়া বিশেষ একটি অপেক্ষক গঠিত তাহাদের মধ্যে একাধিক যুগলমানে প্রথম সদস্যটি একই হইতে পারে না। দ্বিতীয় সদস্যটি অবশ্য একাধিক যুগলমানে এক ও অভিন্ন হইতে পারে। 2·5 অনুচ্ছেদে $f(x)=x^2$-এর আলোচনায় দেখা গিয়াছে $f$-এর ব্যাপ্তি $]-\infty, \infty[$ হইলে,

| | |
|---|---|
| যখন $x=-3$, | তখন, $f(x)=9$ |
| " $x=3$, | " $f(x)=9$ |
| " $x=-2$, | " $f(x)=4$ |
| " $x=2$, | " $f(x)=4$ |
| " $x=-1$, | " $f(x)=1$ |
| " $x=1$, | " $f(x)=1$ |
| " $x=0$, | " $f(x)=0$, ইত্যাদি। |

$\therefore$ এখানে $f$-এর প্রসারও $]-\infty, \infty[$. এবং $(-3, 9)$, $(3, 9)$ $(-2, 4)$, $(2, 4)$, $(-1, 1)$, $(1, 1)$, $(0, 0)$ প্রভৃতি লইয়া $f$ গঠিত অর্থাৎ $f$-এর লেখটির উপর উল্লিখিত যুগলমানগুলি সূচিত বিন্দুগুলি অবস্থিত। এক্ষেত্রে দেখা যায়, $-3$ ও $3$-এর প্রত্যেকটি হইতে $9$, $-2$ এবং $2$-এর প্রত্যেকটি হইতে $4$, $-1$ ও $1$ এর প্রত্যেকটি হইতে $1$ উৎপন্ন হয়। অতএব প্রত্যেক $x$-এর একাধিক পরস্পর ভিন্ন মান হইতে $f(x)$-এর একই মান থাকা সম্ভব। ইহাতে অপেক্ষকত্ব সম্পর্ক ক্ষুণ্ণ হয় না।

এখন, $f(x)=x^2$-এর ব্যাপ্তি $]-\infty, \infty[$ না হইয়া যদি $[0, \infty[$ হয় অর্থাৎ $x$ যদি সর্বদা ধনাত্মক বাস্তবসংখ্যা হয়, তবে দেখা যায় যে, $f(x)$ ও সর্বদা ধনাত্মক বাস্তবসংখ্যা হইবে। কারণ,

যখন, $x=0$, তখন $f(x)=0$,
" $x=1$, " $f(x)=1$,
" $x=2$, " $f(x)=4$,
" $x=3$, " $f(x)=9$ ইত্যাদি হয়।

সুতরাং, এক্ষেত্রে $(0, 0)$, $(1, 1)$ $(2, 4)$, $(3, 9)$ প্রভৃতি যুগলমানের কোন দুইটিতেই দ্বিতীয় সদস্য দুইটি এক হইতেছে না। ইহাদের মধ্যে সাধারণভাবে যে-কোন একটি যুগলমান যদি $(p, q)$ হয় তবে বলা যায় $f$-এর ব্যাপ্তিভুক্ত $p$ হইতে যেমন উহার প্রসারভুক্ত একটি এবং একটিই মাত্র মান $q$ পাওয়া যায়, তেমনি $f$-এর প্রসারভুক্ত $q$ হইতেও উহার ব্যাপ্তিভুক্ত একটি এবং একটিই মাত্র মান $p$ পাওয়া যায়।

সুতরাং আলোচ্য ক্ষেত্রে $f$-এর প্রসারকে ব্যাপ্তি এবং ব্যাপ্তিকে প্রসার ধরিয়া $f$-এর বিপরীত প্রকৃতির আরেকটি অপেক্ষক পাওয়া যাইতেছে। এই দ্বিতীয় অপেক্ষকটি যদি $g$ হয়, তবে $g$-এর ব্যাপ্তিভুক্ত মান $f(x)$ এবং প্রসারভুক্ত মান হইবে $x^2$, অর্থাৎ অপেক্ষকটি হইবে $g\{f(x)\}=x^2$.

এইরূপ ক্ষেত্রে $g$-কে $f$-এর বিপরীত অপেক্ষক বলে। আলোচ্য উদাহরণে $x^2$-এর স্থলে $y$ লিখিলে, সাধারণভাবে বলা যায়,

**যদি $f(x)=y$ সাপেক্ষে $g(y)=x$ হয়, তবে $g$-কে $f$-এর বিপরীত অপেক্ষক বলে।**

[ লক্ষণীয় যে, আলোচ্য ক্ষেত্রে $y=x^2$ বা $x=\sqrt{y}$ এবং $y$ ধনাত্মক।

$\therefore$ $g(y)=\sqrt{y}$.

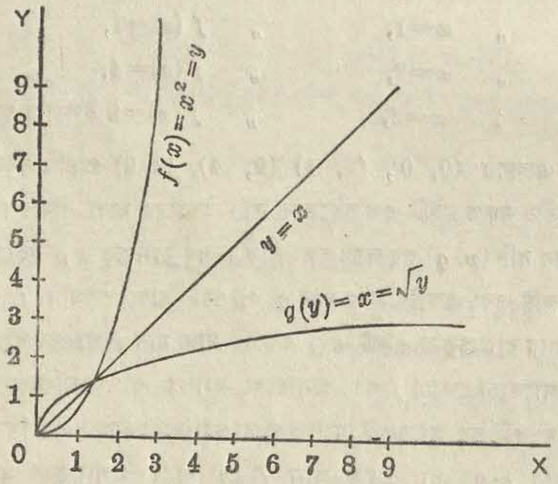
মনে রাখা প্রয়োজন যে, অপেক্ষকবিশেষের লেখ অঙ্কনের সময় উহার **ব্যাপ্তির মানসমূহকে মূলবিন্দু হইতে X-অক্ষ বরাবর দূরত্ব দ্বারা এবং প্রসারের**

মানগুলিকে মূলবিন্দু হইতে Y-অক্ষ বরাবর দূরত্ব দ্বারা সর্বদা সূচিত করা হয়।

আলোচ্য ক্ষেত্রে $f$-এর ব্যাপ্তিভুক্ত মান হইল 0, 1, 2, 3, প্রভৃতি যে-কোন ধনসংখ্যা। এবং উহার প্রসারভুক্ত মান হইল 0, 1, 4, 9, প্রভৃতি ধনসংখ্যা।

সুতরাং $f$-এর বিপরীত অপেক্ষক $g$-এর ব্যাপ্তিভুক্ত মানগুলি হইবে 0, 1, 4, 9, প্রভৃতি ধনসংখ্যা এবং উহার প্রসারভুক্ত মানগুলি হইবে, 0, 1, 2, 3, প্রভৃতি যে-কোন ধনসংখ্যা।

অতএব, (0, 0), (1, 1) (2, 4), (3, 9) প্রভৃতি বিন্দু $f$-এর উপর অবস্থিত এবং (0, 0), (1, 1), (4, 2) (9, 3) বিন্দু $f$-এর বিপরীত অপেক্ষক $g$-এর উপর অবস্থিত। 19নং চিত্রে $f$ ও $g$-এর লেখ প্রদর্শিত হইয়াছে।




চিত্র নং—19

এখানে $f$-এর বিপরীত অপেক্ষক $g$ দ্বারা সূচিত। কখনও কখনও $f$-এর বিপরীত অপেক্ষক $f^{-1}$ সংকেতে প্রকাশিত হয়। এইরূপ সংকেতে $s$-এর বিপরীত অপেক্ষক $s^{-1}$, $g$-এর বিপরীত অপেক্ষক $g^{-1}$ ইত্যাদি আকারে লেখা হয়। বলা বাহুল্য $f^{-1}$ যেমন $f$-এর বিপরীত অপেক্ষক, $f$ ও তেমনি $f^{-1}$-এর বিপরীত অপেক্ষক।

## 2.8. বিপরীত অপেক্ষকের কয়েকটি উদাহরণ

পূর্বের অনুচ্ছেদ হইতে একথা স্পষ্ট হইয়া থাকিবে যে, কোনও অপেক্ষক $f$-এর ব্যাপ্তিভুক্ত প্রতিটি মান হইতে যেমন উহার প্রসারভুক্ত একটি এবং মাত্র একটিই মান

পাওয়া যায় তেমনি যদি উহার প্রসার ভুক্ত প্রতিটি মান হইতেও উহার ব্যাপ্তিভুক্ত একটি এবং মাত্র একটিই মান পাওয়া যায়, তবেই $f$-এর একটি বিপরীত অপেক্ষক $g$ পাওয়া যাইতে পারে। সুতরাং $f$ এর বিপরীত অপেক্ষক $g$ থাকার শর্ত এই যে $f$-এর ব্যাপ্তি $g$-এর প্রসার এবং $f$-এর প্রসার $g$-এর ব্যাপ্তি হইবে।

**উদাহরণস্বরূপ ঃ**

(i) $f(x)=\sqrt{x+1}$ হইলে $x$-এর মান $-1$ হইতে ক্ষুদ্রতর হইতে পারে না; কেননা $x<-1$ হইলে $\sqrt{x+1}$ কাল্পনিক হইয়া পড়ে। সুতরাং $f$-এর ব্যাপ্তি এখানে $[-1, \infty[$. স্পষ্টতঃ এখানে,

$x=-1$ হইলে, $f(x)=0$,

$x=\ 0$ „ $f(x)=1$

... ... ...

$x=\ 8$ „ $f(x)=3$, ইত্যাদি।

সুতরাং $x$-এর প্রতিটি মান হইতে এখানে যেমন $f(x)$-এর $[0, \infty[$ অবকাশে একটি মাত্র মান পাওয়া যায়, তেমনি $[0, \infty[$ অবকাশে $f(x)$-এর প্রতিটি মান হইতে $[-1, \infty[$ অবকাশে $x$-এর একটিই মাত্র মান পাওয়া যায়। অতএব $f$-এর একটি বিপরীত এমন একটি অপেক্ষক $g$ বা $f^{-1}$ থাকিতে পারে, যাহার ব্যাপ্তি $[0, \infty[$ এবং প্রসার $[-1, \infty[$.

(ii) $\phi(x)=x^2-1$ এবং $\phi$-এর ব্যাপ্তি $[-2, 2]$ হইলে,

| যখন $x=$ | $-2$ | $-1$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|
| তখন $y=$ | $3$ | $0$ | $0$ | $3$ |

এখন, $\phi$-এর প্রসার-ভুক্ত $\phi(x)$-এর মান 0 হইতে $\phi$ এর ব্যাপ্তিভুক্ত দুইটিমান $-1$ ও $1$ পাওয়া যায়। কাজেই $\phi$-এর প্রসার $[0, 3]$-কে ব্যপ্তি এবং উহার ব্যাপ্তিকে প্রসার ধরিয়া কোন বিপরীত অপেক্ষক থাকিতে পারে না।

কিন্তু $\phi(x)=x^2-1$ সংজ্ঞায় বিবৃত $\phi$-এর ব্যাপ্তি যদি $[1, 2]$ হয়, তবে

| যখন $x=$ | 1 | 1·1 | 1·2 | 1·3 | 1·9 | 2. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| তখন $\phi(x)=$ | 0 | ·21 | ·44 | ·69 | 2·61 | 3. |

স্পষ্টতঃ এখানে $\phi$-এর প্রসার $[0,3]$. এই প্রসারের প্রত্যেকটি মান হইতে উহার ব্যাপ্তির একটি এবং মাত্র একটিই মান পাওয়া যায়। সুতরাং $\phi$-এর একটি বিপরীত অপেক্ষক $\phi^{-1}$ আছে যাহার ব্যাপ্তি $[0, 3]$ এবং প্রসার $[1, 2]$.

(iii) অনুরূপে দেখা যায়, $s(x)=|x|$ এবং $s$-এর ব্যাপ্তি যদি $[-1, 1]$ হয় তবে $s$-এর বিপরীত অপেক্ষক থাকিবে না। কারণ সেক্ষেত্রে,

$x=-1$ হইলে $s(x)=|-1|=1$

$x=\ 0$ „ $s(x)=|\ 0|=0$

$x=\ 1$ „ $s(x)=|\ 1|=1$

অর্থাৎ $s$-এর প্রসার $[0, 1]$ ভুক্তমান 1 হইতে উহার ব্যাপ্তি $[-1, 1]$-এর মধ্যে $-1$ ও 1 এই দুইটি পরস্পর ভিন্ন মান পাওয়া যায়।

পক্ষান্তরে $s$-এর ব্যাপ্তি যদি $[-1, 0]$ হয় তবে

যখন $x=-1$, তখন $S(x)=|-1|=1$

„ $x=-\cdot1$ „ „ $=|-\cdot1|=\cdot1$

„ $x=-\cdot3$ „ „ $=|-\cdot3|=\cdot3$

„ $x=-\cdot9$ „ „ $=|-\cdot9|=\cdot9$

„ $x=0$ „ „ $=|\ 0|=0$

সুতরাং এক্ষেত্রে $s$-এর $[0, 1]$ প্রসারভুক্ত প্রতিটি মান হইতে উহার ব্যাপ্তিভুক্ত একটি এবং একটিমাত্র মান পাওয়া যাইতেছে এবং সেই কারণে $s$-এর এমন একটি বিপরীত অপেক্ষক $s^{-1}$ আছে, যাহার ব্যাপ্তি $[0, 1]$ এবং প্রসার $[-1, 0]$.

## 2.9. বিপরীত অপেক্ষকের লেখ (Graph of an Inverse function) :

2·7 অনুচ্ছেদের আলোচনা হইতে দেখা যায়, কোন অপেক্ষক $f$-এর লেখটির উপর যদি $(p, q)$ বিন্দুটি অবস্থিত হয়, তবে $f$-এর বিপরীত অপেক্ষক $f^{-1}$-এর উপর $(q, p)$ বিন্দুটি অবশ্যই অবস্থিত হইবে।

বিশ্লেষণমূলক জ্যামিতির বিচারে $(p, q)$ বিন্দু $y=x$ অক্ষে প্রতিফলিত হইলে $(q, p)$ বিন্দু চিত্রিত হয়। এখন $f$-এর লেখটি $(p, q)$ বিন্দুর সঞ্চার পথ এবং $f^{-1}$-এর লেখটি হইল $(q, p)$ বিন্দুর সঞ্চার পথ। সুতরাং $f^{-1}$-এর লেখ $y=x$ অক্ষে প্রতিফলিত $f$ এর লেখটির প্রতিবিম্ব হইবে।

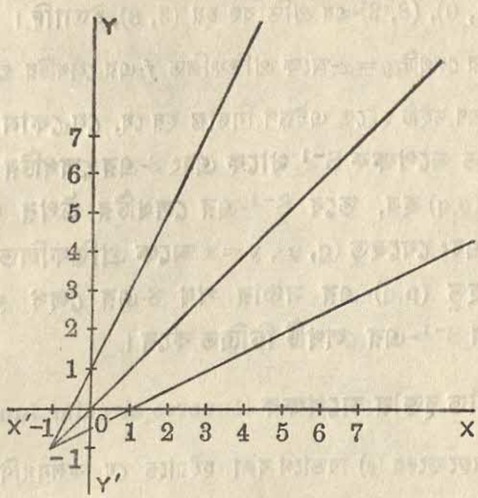
**উদাহরণস্বরূপ :**

(1) $f(x)=2x+1$ হইলে,

| যখন, $x=$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | ...... |
|---|---|---|---|---|---|---|
| তখন, $f(x)=$ | $-1$ | 1 | 3 | 5 | 7 | ...... |

সুতরাং $(-1,-1)$, $(0,1)$ $(1,3)$, $(2,5)$ $(3,7)$ প্রভৃতি বিন্দুগুলি $f$-এর লেখ-এর উপর অবস্থিত। বিপরীতক্রমে $(-1,-1)$, $(1,0)$, $(3,1)$, $(5,2)$, $(7,3)$ প্রভৃতি বিন্দুগুলি $f^{-1}$-এর লেখটির উপর অবস্থিত।

20 নং চিত্র হইতে দেখা যায়, $y=x$ অক্ষে প্রতিফলিত $f$-এর লেখটির প্রতিবিম্বই $f^{-1}$-এর লেখটি চিত্রিত করিয়াছে।




চিত্র নং—20

অনুরূপে 2·8 অনুচ্ছেদের (i) হইতে দেখা যায়, $f(x)=\sqrt{x+1}$ হইলে $f$-এর যুগল-মানগুলি হয়, $(-1,0)$, $(0,1)$, $(8,3)$ প্রভৃতি। সুতরাং $f$-এর বিপরীত অপেক্ষক $f^{-1}$-

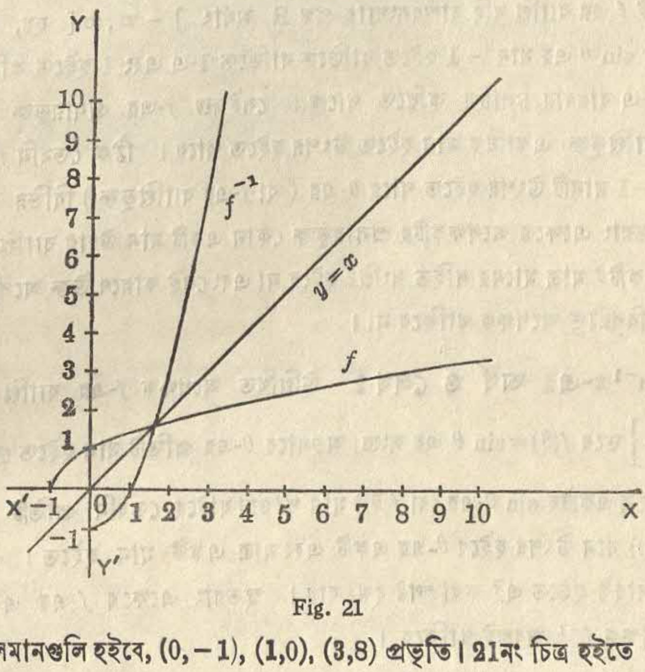



Fig. 21

এর যুগলমানগুলি হইবে, $(0,-1)$, $(1,0)$, $(3,8)$ প্রভৃতি। 21নং চিত্র হইতে দেখা যায়,

$y=x$ অক্ষে প্রতিফলিত করিলে, $(-1,0)$-এর প্রতিবিম্ব হয় $(0,-1)$, $(0,1)$ এর প্রতিবিম্ব হয় $(1, 0)$, $(8, 3)$-এর প্রতিবিম্ব হয় $(3, 8)$, ইত্যাদি।

সুতরাং $f^{-1}$-এর লেখটি $y=x$-অক্ষে প্রতিফলিত $f$-এর লেখটির প্রতিবিম্ব।

উল্লিখিত উদাহরণ দুইটি হইতে এইরূপ সিদ্ধান্ত হয় যে, **যে-কোন অপেক্ষক S-এর যদি বিপরীত অপেক্ষক $S^{-1}$ থাকে এবং S-এর লেখটির উপরিস্থ যে-কোন বিন্দু যদি (p,q) হয়, তবে $S^{-1}$-এর লেখটির উপর (q,p) বিন্দুটি অবস্থিত, হইবে এবং যেহেতু (q, p), y=x অক্ষে প্রতিফলিত (p,q) বিন্দুর প্রতিবিম্ব সেইহেতু (p,q)-এর সঞ্চার পথ S-এর লেখ y=x অক্ষে প্রতিফলিত হইয়া $S^{-1}$-এর লেখটি চিত্রিত করে।**

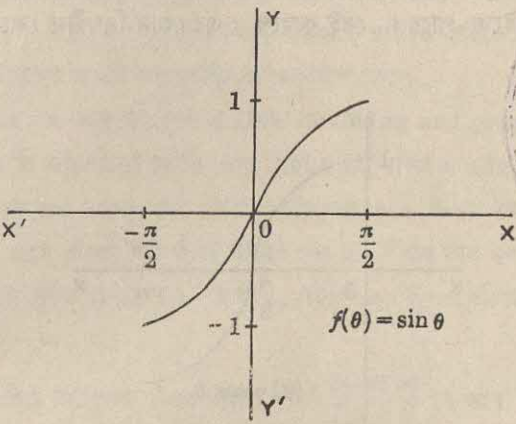
## 2·10. বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষক (Inverse circular function)

ইতিপূর্বে 2·6 অনুচ্ছেদের (e) বিভাগে বলা হইয়াছে যে কলনগণিতে ত্রৈকোণমিতিক অপেক্ষকের মান সর্বদা রেডিয়ানে ধরা হয়। রেডিয়ান বৃত্তীয় মান বলিয়া উহার নিরিখে প্রকাশিত প্রত্যেক ত্রৈকোণমিতিক অপেক্ষক-কে বৃত্তীয় অপেক্ষক বলা চলে। সুতরাং $f(\theta)=\sin\theta$ হইলে $f$ একটি বৃত্তীয় অপেক্ষক।

এখন এই $f$ এর ব্যাপ্তি যদি বাস্তবসংখ্যার প্রস্থ R অর্থাৎ $]-\infty,\infty[$ হয়, তবে $f(\theta)$ অর্থাৎ $\sin\theta$ এর মান $-1$ হইতে বাড়িতে বাড়িতে 1-এ এবং 1 হইতে কমিতে কমিতে $-1$-এ বারবার চলাচল করিতে থাকে। সেইজন্য $f$-এর প্রসারভুক্ত মান 1 উহার ব্যাপ্তিভুক্ত একাধিক মান হইতে উৎপন্ন হইতে পারে। ঠিক তেমনি $f$-এর প্রসারভুক্ত $-1$ মানটি উৎপন্ন হইতে পারে $\theta$-এর ( বা $f$-এর ব্যাপ্তিভুক্ত ) বিভিন্ন মান হইতে। সুতরাং এক্ষেত্রে অপেক্ষকটির প্রসারভুক্ত কোন একটি মান উহার ব্যাপ্তিভুক্ত একটি এবং একটিই মাত্র মানের সহিত সংশ্লিষ্ট হইবে না এবং সেই কারণে উক্ত অপেক্ষক $f$-এর কোন বিপরীত অপেক্ষক থাকিবে না।

(i) **$\sin^{-1}x$-এর অর্থ ও লেখ :** উল্লিখিত অপেক্ষক $f$-এর ব্যাপ্তি যদি হয় $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ তবে $f(\theta)=\sin\theta$ এর সংজ্ঞা অনুসারে $\theta$-এর প্রতিটি মান হইতে যেমন একটি এবং মাত্র একটিই $\sin\theta$-এর (বা $f(\theta)$) মান পাওয়া যাইবে, তেমনি প্রতিটি $\sin\theta$-এর (বা $f(\theta)$) মান উৎপন্ন হইবে $\theta$-এর একটি এবং মাত্র একটি মান হইতে। ...... পৃষ্ঠায় প্রদত্ত সারণী হইতে এই কথা স্পষ্ট বুঝা যায়। সুতরাং এক্ষেত্রে $f$-এর একটি বিপরীত অপেক্ষক $f^{-1}$ অবশ্যই থাকিবে।

লক্ষণীয় যে, $f(\theta)=\sin\theta$-এর ব্যাপ্তি যখন $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ তখন উহার প্রসার $[-1, 1]$ ; কাজেই $f^{-1}$ এর ব্যাপ্তি $[-1, 1]$ এবং প্রসার $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

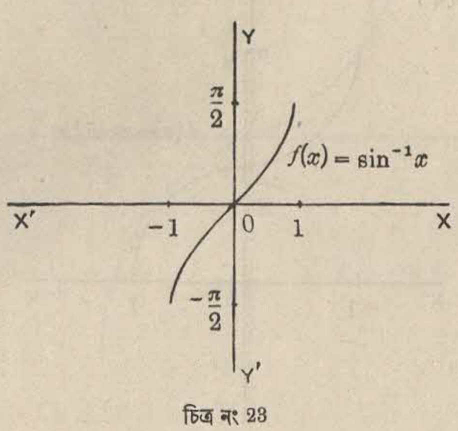



চিত্র নং 22

22নং চিত্রে $f$ এবং 23নং চিত্রে $f^{-1}$ এর চিত্র অঙ্কিত হইয়াছে।

একই চিত্রে উভয়কে চিত্রিত করিলে দেখা যাইবে যে, $y=x$ অক্ষে $f$-এর প্রতিফলিত লেখই $f^{-1}$ এর চিত্র।

এখন $f(\theta)=\sin\theta=x$ ধরিলে, $\theta=f^{-1}(x)$ লেখা যায়। $f$ এখানে sin অপেক্ষক সূচিত করে বলিয়া $f^{-1}(x)$-কে $\sin^{-1}x$ রূপে প্রকাশ করা যায়। বস্তুত

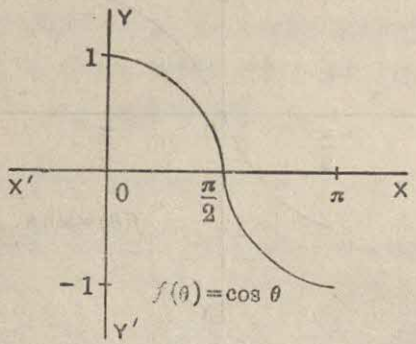



চিত্র নং 23

ত্রিকোণমিতিতে $x=\sin\theta$-এর বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষক $\theta=\sin^{-1}x$ সংজ্ঞাতেই সুপরিচিত।

### (ii) $\cos^{-1}x$-এর তাৎপর্য ও লেখ (Meaning and graph of $\cos^{-1}x$)

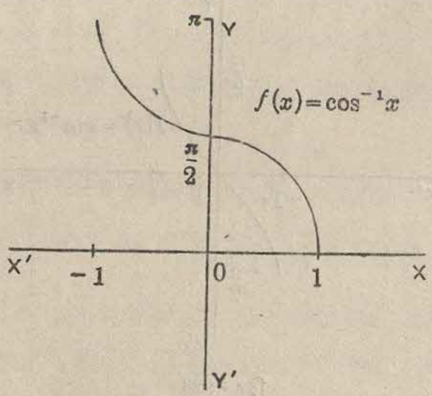
$f(\theta)=\cos\theta=x$ হইলে $\theta$-এর বিভিন্ন মান হইতে $\cos\theta$-এর যে বিভিন্ন মানগুলি পাওয়া যায়, তাহারা $-1$ ও $1$-এর মধ্যে সীমাবদ্ধ। কাজেই $f$-এর ব্যাপ্তি যদি R হয়, তবে উহার প্রসার $[-1, 1]$. কিন্তু এই প্রসারের প্রতিটি $f(\theta)$ মান $\theta$-এর বিভিন্ন মান হইতে উৎপন্ন হইতে পারে। সেই কারণে $f$-এর কোন বিপরীত অপেক্ষক থাকিতে পারে না।




চিত্র নং 24

কিন্তু উল্লিখিত অপেক্ষক $f$-এর ব্যাপ্তি যদি $[0, \pi]$ হয়, তবে 38 পৃষ্ঠার সারণী এবং 24নং চিত্র হইতে দেখা যাইবে যে, তখন $f$-এর প্রসার হইবে $[1, -1]$.

এক্ষেত্রে অবশ্য $f$-এর প্রসারভুক্ত প্রতিটি মান $f(\theta)$ উহার ব্যাপ্তিভুক্ত $\theta$-এর একটি এবং একটিমাত্র মান হইতেই উৎপন্ন হইবে এবং সেই কারণে $f$-এর একটি বিপরীত অপেক্ষক $f^{-1}$ থাকিবে।




চিত্র নং 25

সেক্ষেত্রে $f^{-1}$ এর সংজ্ঞা হইবে $\theta=f^{-1}(x)$; কিন্তু $f$ এখানে cos অপেক্ষক

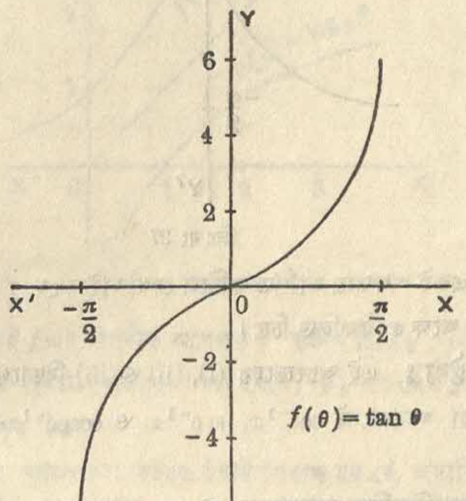
বুঝাইতেছে বলিয়া $f^{-1}(x)$ এবং $\cos^{-1}x$ সমার্থক। সুতরাং $\theta=f^{-1}(x)=\cos^{-1}x$ একটি বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষক সূচিত করে।

25নং চিত্রে এখানে $f^{-1}$-এর লেখটি চিত্রিত হইয়াছে। 24 ও 25নং চিত্রের যথাক্রমে $f$ ও $f^{-1}$ এর লেখ দুইটিকে একই অক্ষতন্ত্রে স্থাপিত করিলে দেখা যাইবে যে, $y=x$ অক্ষে উহাদের একটি আরেকটির প্রতিফলিত চিত্র।

(iii) **$\tan^{-1}x$-এর তাৎপর্য ও লেখ (Meaning and graph of $\tan^{-1}x$)**

ত্রিকোণমিতি আলোচনা হইতে দেখা গিয়াছে যে, বাস্তব সংখ্যার প্রস্থে $\theta$-এর যে সকল মানের জন্য $\cos\theta=0$ সেই সকল মানের জন্য $\tan\theta$-এর কোন মান নাই। বাস্তবসংখ্যার প্রস্থে $\theta$-এর অন্য সকল মানের জন্য $\tan\theta$ এর মান ঋণাত্মক ও ধনাত্মক উভয়দিকে অনন্ত পর্যন্ত প্রসারিত। সুতরাং, $f(\theta)=\tan\theta=x$ ধরিলে, এক্ষেত্রে $f$-এর প্রসার হইবে $[-\infty, \infty]$

কিন্তু উল্লিখিত অপেক্ষক $f$-এর ব্যাপ্তি যদি $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ হয় তবে 38 পৃষ্ঠার সারণী হইতে দেখা যায় যে, $f$-এর প্রসার হইবে $]-\infty, \infty[$. অর্থাৎ $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ অবকাশে




চিত্র নং 26

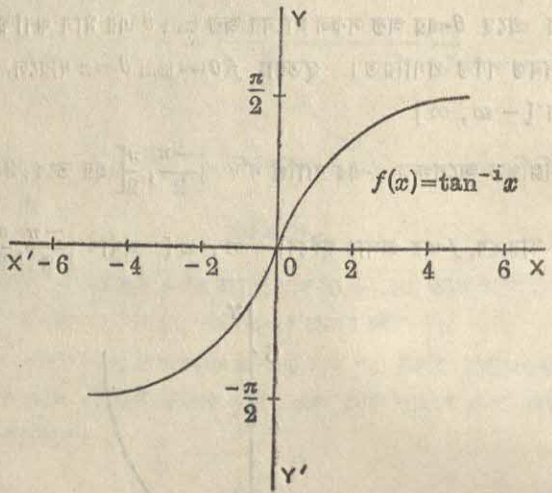
$\theta$-এর মান সমূহের জন্য $\tan\theta$-এর মানসমূহ $]-\infty, \infty[$ অবকাশে প্রসারিত হইবে। এই ক্ষেত্রে দেখা যাইবে যে, $\tan\theta$-এর প্রতিটি মান $\theta$-এর একটি এবং একটিই মাত্র

মান হইতে উৎপন্ন হয়। সেই কারণে $f$-এর প্রসারকে ব্যাপ্তি এবং ব্যাপ্তিকে প্রসার ধরিয়া উহার বিপরীত অপেক্ষক $f^{-1}$ পাওয়া যাইবে।

26নং চিত্রে $f(\theta)=\tan\theta=x$ হইতে $f$-এর লেখ অঙ্কিত হইয়াছে। [ $\theta$-এর মানসমূহ $x$-অক্ষ বরাবর এবং $\tan\theta$-এর মানসমূহ $y$-অক্ষ বরাবর ধরা হইয়াছে ]।

স্পষ্টতঃ, $f$-এর বিপরীত অপেক্ষক $f^{-1}$ এর সংজ্ঞা হইবে, $\theta=f^{-1}(x)=\tan^{-1}x$.

এখানে $f^{-1}$-এর ব্যাপ্তি $]-\infty, \infty[$ এবং প্রসার $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. $x$ ( অর্থাৎ $\tan\theta$) এর মানসমূহ $x$-অক্ষ বরাবর এবং $\theta$-এর মানসমূহ $y$-অক্ষ বরাবর ধরাইয়া, 27 নং চিত্রে $f^{-1}$-এর চিত্র অঙ্কিত হইয়াছে।




চিত্র নং 27

এক্ষেত্রেও একই অক্ষতন্ত্রে স্থাপিত করিলে দেখা যাইবে যে, $f$ ও $f^{-1}$-এর প্রত্যেকটি অপরটির $y=x$ অক্ষে প্রতিফলিত চিত্র।

**বিশেষ দ্রষ্টব্য :** এই অনুচ্ছেদের (i), (ii) ও (iii) বিভাগের আলোচনার ধারা অনুসরণ করিয়া অনায়াসেই $\cot^{-1}x$, $\sec^{-1}x$ ও $\operatorname{cosec}^{-1}x$-এর লেখ অঙ্কন করা যাইতে পারে।

## 2.11. লগারিদ্‌মিক অপেক্ষক (Logarithmic function)

2·6 অনুচ্ছেদের (f) বিভাগে $f(x)=a^x$ সমীকরণ হইতে $f$-এর লেখটি 15 নং চিত্রে প্রদর্শিত হইয়াছে। অনুরূপে $f(y)=e^y$ হইতেও $f$-এর লেখটি অঙ্কন করা যায়।

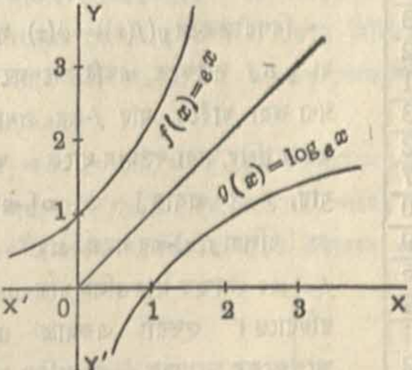
এখানে $e=2\cdot718$ (প্রায়) এবং $y$-এর বিভিন্ন মানের জন্য $e^y$-এর বিভিন্ন

মানগুলি 54 পৃষ্ঠার 2নং সারণী হইতে গ্রহণ করা যায়। এইভাবে 2নং সারণী হইতে প্রাপ্ত $(y, e^y)$ আকারের বিভিন্ন যুগলমানগুলিকে কার্তেজীয় অক্ষতন্ত্রে স্থাপিত ও যুক্ত করিয়া 28নং চিত্রে $f(y)=e^y$ সংজ্ঞাসূচিত $f$-এর লেখটি অঙ্কন করা হইয়াছে। [ এখানে ব্যাপ্তিভুক্ত মান $y$-কে $x$-অক্ষ বরাবর এবং প্রসার ভুক্ত মান $e^y$ কে $y$-অক্ষ বরাবর মাপা হইয়াছে।]

এখন, $f(y)=e^y=x$ ধরিলে $y=\log_e x$ হইবে। সেক্ষেত্রে $y=g(x)$ ধরিলে $y=g(x)=\log_e x$.

**স্পষ্টত :** $g$ এখানে এমন একটি অপেক্ষক যাহার ব্যাপ্তি $x$-এর মানগুলি দ্বারা সূচিত এবং প্রসার $\log_e x$-এর মানগুলি দ্বারা প্রকাশিত হইবে।

কিন্তু $x=e$ বলিয়া সূচকীয় লেখ $f$-এর প্রসারভুক্ত $e^y$-এর মানগুলিই $g$-এর ব্যাপ্তিভুক্ত মান। আবার $\log_e x=y$ বলিয়া $f$-এর ব্যাপ্তিভুক্ত $y$-এর মানগুলিই $g$-এর প্রসারভুক্ত মান।




চিত্র নং 28

অতএব $g$ অবশ্যই $f$-এর বিপরীত অপেক্ষক। 28নং চিত্রে $g$ এর লেখটি অঙ্কিত হইয়াছে। ঐ চিত্র হইতে প্রত্যক্ষ হইবে যে, $f$ ও $g$-এর লেখ $y=x$ অক্ষে একটি আরেকটির প্রতিফলিত চিত্র।

এই অনুচ্ছেদের আলোচনা হইতে ইহাই সিদ্ধান্ত হয় যে, লগারিদমিক অপেক্ষক মাত্রই উহার সংশ্লিষ্ট একটি সূচকীয় অপেক্ষকের বিপরীত অপেক্ষক।

**বিঃ দ্রষ্টব্য :** $f(y)=e^y$ বলিয়া $y$-এর স্থলে $x$ বসাইয়া $f(x)=e^x$ পাওয়া যায় এবং সেই কারণে $f$-এর লেখটি 28নং চিত্রে $f(x)=e^x$ দ্বারা সূচিত হইয়াছে।

## 2.12. অপেক্ষকের অপেক্ষক (Function of a function] :

2 নং সারণী

| $x$ | $e^y$ |
|---|---|
| −1 | ·3494 |
| −·5 | ·6065 |
| 0·0 | 1·0000 |
| 0·1 | 1·1052 |
| 0·2 | 1·2214 |
| 0·3 | 1·3499 |
| 0·4 | 1·4918 |
| 0·5 | 1·6487 |
| 0·6 | 1·8221 |
| 0·7 | 2·038 |
| 0·8 | 2·2255 |
| 0·9 | 2·4596 |
| 1·0 | 2·7183 |
| 1·1 | 3·0042 |
| 1·2 | 3·3201 |
| 1·3 | 3·6693 |
| 1·4 | 4·0552 |
| 1·5 | 4·4817 |
| 1·6 | 4·9530 |
| 1·7 | 5·4739 |
| 1·8 | 6·0496 |
| 1·9 | 6·6859 |
| 2·0 | 7·3891 |
| 2·1 | 8·1662 |
| 2·2 | 9·0250 |
| 2·3 | 9·9742 |
| 2·4 | 11·023 |
| 2·5 | 12·182 |
| 2·6 | 13·464 |
| 2·7 | 14·880 |
| 2·8 | 16·445 |
| 2·9 | 18·174 |
| 3·0 | 20·086 |

$f(x)=x+1$ এবং $g(x)=\sqrt{x}$ এই সমীকরণ দুইটি দ্বারা সূচিত অপেক্ষক দুইটি যথাক্রমে $f$ ও $g$. স্পষ্টতঃ, $g$-এর প্রসারভুক্ত মানের প্রস্থটি $]0, \infty[$ এবং $f$-এর ব্যাপ্তিভুক্ত মানের প্রস্থটি $]-\infty, \infty[$ বা R. সুতরাং $f$-এর ব্যাপ্তির মধ্যে $g$-এর প্রসারভুক্ত মানসমূহের প্রস্থটি অন্তর্ভুক্ত। সেই কারণে $x$-এর স্থলে $g(x)$ বসাইয়া $f(g(x))$ মানটি পাওয়া যাইবে এবং $f(g(x))=S(x)$ সংজ্ঞায় তৃতীয় একটি অপেক্ষক S পাওয়া যাইবে। এই ভাবে S হইবে $g$-এর $f$ বা সাংকেতিক ভাষায় $f\,o\,g$ সংজ্ঞায় প্রকাশিত একটি অপেক্ষকের অপেক্ষক।

বিপরীতক্রমে $g(f(x))=\phi(x)$ সংজ্ঞায় $\phi$কে $f$-এর $g$ বা $g\,o\,f$ সংকেতে একটি অপেক্ষকের অপেক্ষক হিসাবে গণ্য করা যাইবে, যদি $f$-এর প্রসারভুক্ত $f(x)$ মানটি $g$ এর ব্যাপ্তির মধ্যে বর্তমান থাকে। আলোচ্য ক্ষেত্রে দেখা যায়, $f$-এর প্রসার $]-\infty, \infty[$ এবং $g$-এর ব্যাপ্তি $[0, \infty[$ বলিয়া $f(x)$-এর সমগ্র প্রস্থটি $g$-এর ব্যাপ্তিতে নাই। $f(x)$-এর ধনাত্মক মানগুলিই মাত্র $g$-এর ব্যাপ্তিতে বর্তমান রহিয়াছে। সুতরাং একমাত্র $0 \leqslant f(x) < \infty$ শর্তেই অপেক্ষকের অপেক্ষক $\phi$-এর অস্তিত্ব থাকিতে পারে।

**অতএব, f ও g, এই দুইটি অপেক্ষকের মধ্যে g-এর প্রসারভুক্তমানের প্রস্থটি যদি f-এর ব্যাপ্তিভুক্ত প্রস্থের অন্তর্ভুক্ত হয়, তবে g-এর f বা সাংকেতিক ভাষায় f o g সংজ্ঞায় একটি অপেক্ষকের অপেক্ষক পাওয়া যায়।** বিপরীতক্রমে, $f$-এর প্রসারভুক্ত মানের প্রস্থটি যদি $g$-এর ব্যাপ্তিভুক্ত মানের প্রস্থটির অন্তর্গত হয়, তবে $f$-এর $g$ বা $g\;o\;f$ সংকেতে একটি অপেক্ষকের অপেক্ষক পাওয়া যাইতে পারে।

**উদাহরণস্বরূপ,**

ধরা যাক, $f(x)=1-x$ এবং $g(x)=\sin^2 x$.

স্পষ্টতঃ $g$-এর প্রসার $=[0, 1]$ ; কেননা $\sin x$-এর মান $-1$ হইতে $1$ পর্যন্ত বিস্তারিত এবং সেই কারণে $\sin^2 x$-এর সর্বোচ্চ মান 1 ও সর্বনিম্ন মান 0. এদিকে $f$-এর ব্যাপ্তি $]-\infty, \infty[$. যেহেতু $[0, 1], ]-\infty, \infty[$-এর অন্তর্ভুক্ত, সেইহেতু $f(g(x))$ মানটির অবশ্যই অস্তিত্ব থাকিবে।

বস্তুতঃ $f$-এর সংজ্ঞায় $x$-এর স্থলে $g(x)=\sin^2 x$ বসাইলে দেখা যায়,

$$f(g(x))=1-\sin^2 x=\cos^2 x$$

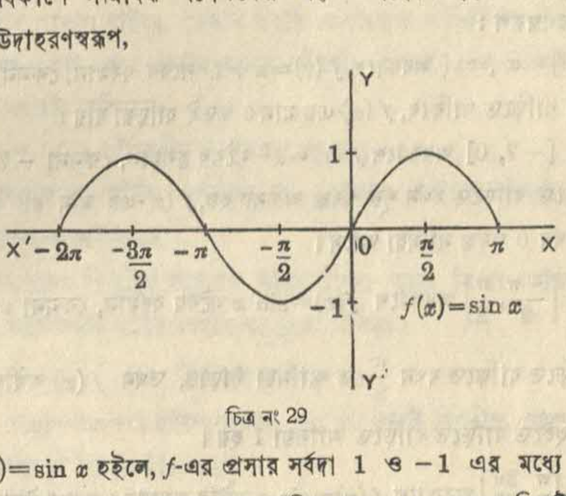
$\therefore \quad f(g(x))=\cos^2 x=S(x)$ ধরিলে S একটি অপেক্ষকের অপেক্ষক। Sকে $g$-এর $f$ বা $f \circ g$ বলা হয়।

## 2.13. একটি অবকাশসীমায় বদ্ধ অপেক্ষকের ধারণা (Idea of a function bounded in an interval) :

একটি অবকাশসীমায় সংজ্ঞাবদ্ধ অপেক্ষকবিশেষের ঊর্ধ্ব বা নিম্ন একটি সীমা অথবা ঊর্ধ্ব ও নিম্ন দুইটি সীমাই থাকিতে পারে। ধরা যাক, $a$ ও $b$ সীমায় সংজ্ঞাবদ্ধ কোন অপেক্ষক $f$ এর প্রসারভুক্ত যে কোন মান $f(x)$ কোন নির্দিষ্ট মান K অপেক্ষা সর্বদা ক্ষুদ্রতর বা উহার সমান অর্থাৎ $f(x) \leq K$। এইরূপ ক্ষেত্রে স্পষ্টতঃ প্রদত্ত অবকাশে $f(x)$ একটি ঊর্ধ্ব-সীমায় বদ্ধ।

আর যদি $[a, b]$ অবকাশে $f(x)$, অপর একটি নির্দিষ্ট মান $k$ অপেক্ষা সর্বদা বৃহত্তর বা উহার সমান হয় অর্থাৎ যদি $f(x) \geq k$ হয়, তবে $f(x)$ স্পষ্টতঃ একটি নিম্নসীমায় বদ্ধ।

নির্দিষ্ট অবকাশে সীমাবদ্ধ অপেক্ষকের প্রকৃষ্ট উদাহরণ হইল কয়েকটি বৃত্তীয় অপেক্ষক। উদাহরণস্বরূপ,




চিত্র নং 29

(i) $f(x)=\sin x$ হইলে, $f$-এর প্রসার সর্বদা $1$ ও $-1$ এর মধ্যে সীমাবদ্ধ। কারণ $\sin x$-এর সর্বোচ্চ মান 1 এবং সর্বনিম্ন মান $-1$. 29 নং চিত্রটিতে প্রত্যক্ষ করা যায় যে, $(-\pi, \pi)$ অবকাশে $f(x)$ এর ঊর্ধ্ব ও নিম্নসীমা যথাক্রমে $1$ ও $-1$.

(ii) অনুরূপে S $(x) = \cos x$-এর লেখ হইতেও প্রত্যক্ষ হইবে যে $(-\pi, \pi)$ অবকাশে S উর্ধ্বে 1 এবং নিম্নে $-1$ সীমায় বদ্ধ।

(iii) 51নং পৃষ্ঠায় প্রদত্ত $f(\theta) = \tan\ \theta$-এর 26নং চিত্র হইতে দেখা যায়, $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ অবকাশে $f(\theta)$ অর্থাৎ $\tan\ \theta$-এর কোন উর্ধ্ব বা নিম্ন সীমা নাই। $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ অবকাশে অবশ্য, $f(\theta)$-এর নিম্নসীমা 0 এবং $\left(\frac{-\pi}{2}, 0\right)$ অবকাশে, $f(\theta)$-এর উর্ধ্বসীমা 0.

উপরোক্ত উদাহরণ তিনটি দ্বারা নির্দিষ্ট অবকাশে অপেক্ষকবিশেষের উর্ধ্ব ও নিম্ন সীমা সম্বন্ধে একটি মোটামুটি ধারণা দেওয়া হইল। এই গ্রন্থে ইহার বিস্তৃততর আলোচনার অবকাশ নাই।

## 2·14. বর্ধমান ও হ্রসমান অপেক্ষক (Increasing and Decreasing functions)

$y = f(x)$ আকারের যে-অপেক্ষকে উহার ব্যাপ্তিভুক্ত $x$-এর ক্ষুদ্র হইকে ক্রমাগত বৃহত্তর মান-সমূহ হইতে $f(x)$-এর মান-সমূহ ক্রমাগত বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হয়, সেই অপেক্ষক-কে সর্বৈব বর্ধমান অপেক্ষক (Strictly Increasing function) বলে।

বিপরীতক্রমে $y = f(x)$ আকারের যে-অপেক্ষকে উহার ব্যাপ্তিভুক্ত ক্রমবর্ধমান $x$-এর মাননমূহ হইতে প্রাপ্ত $f(x)$-এর মানসমূহ ক্রমশঃ হ্রাস পাইতে থাকে, তাহাকে সর্বৈব হ্রসমান অপেক্ষক ( Strictly decreasing function ) বলে।

উদাহরণস্বরূপ :

(i) $]-\infty, \infty[$ অবকাশে $f(x) = x+1$ সর্বৈব বর্ধমান, কেননা ইহাতে $x$-এর মান যতই বাড়িতে থাকিবে, $f(x)$-এর মানও ততই বাড়িয়া যায়।

(ii) $[-7, 0]$ অবকাশে $f(x) = x^2$ সর্বৈব হ্রসমান, কেননা $-7$ হইতে $x$-এর মান বাড়িতে বাড়িতে যখন শূন্য পর্যন্ত অগ্রসর হয়, $f(x)$-এর মান 49 হইতে কমিতে কমিতে তখন 0 পর্যন্ত নামিয়া আসে।

(iii) $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ অবকাশে $f(x) = \sin x$ সর্বৈব বর্ধমান, কেননা $x$-এর মান $\frac{-\pi}{2}$ হইতে বাড়িতে বাড়িতে যখন $\frac{\pi}{2}$-তে আসিয়া দাঁড়ায়, তখন $f(x)$ অর্থাৎ $\sin x$-এর-মান $-1$ হইতে বাড়িতে বাড়িতে আসিয়া 1 হয়।

কিন্তু, $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ অবকাশে $f(x) = \sin x$ সর্বৈব হ্রসমান। কারণ ইহাতে $x$-এর মান

$\frac{\pi}{2}$ হইতে বাড়িতে বাড়িতে যতই $\frac{3\pi}{2}$-এর দিকে অগ্রসর হয়, ততই $f(x)$ বা $\sin x$-এর মান 1 হইতে কমিতে কমিতে $-1$-এর দিকে নামিয়া আসে।

**2·15. প্রত্যেক বর্ধমান বা হ্রসমান অপেক্ষকের একটি বিপরীত অপেক্ষক থাকে ( Every increasing or decreasing function has an inverse ).**

(i) $f(x)=y$ যদি একটি সর্বৈব বর্ধমান অপেক্ষক $f$-এর সংজ্ঞা হয়, তবে $f$-এর ব্যাপ্তিভুক্ত মান $x_1, x_2, x_3 \cdots$ প্রভৃতি হইতে প্রাপ্ত প্রসারভুক্ত মানগুলি যেন যথাক্রমে $y_1, y_2, y_3 \cdots$ প্রভৃতি। এখন যেহেতু $f$ একটি সর্বৈব বর্ধমান অপেক্ষক, সেইহেতু $x_1$ হইতে $x_2$, $x_2$ হইতে $x_3$—এইভাবে $x$-এর মান যতই বৃদ্ধি পাইবে, ততই $y$-এর মান $y_1$ হইতে $y_2$, $y_2$ হইতে $y_3$—এইভাবে বাড়িতে থাকিবে। ফলে $x_1$, $x_2$, $x_3$ প্রভৃতির প্রত্যেকটি হইতে যথাক্রমে $y_1, y_2, y_3$ প্রভৃতির ন্যায় একটি এবং একটিই মান পাওয়া যাইবে। বিপরীতক্রমে $y_1, y_2, y_3$ প্রভৃতির প্রত্যেকটি হইতে যথাক্রমে $x_1, x_2, x_3$—প্রভৃতির ন্যায় একটি এবং একটিই মান পাওয়া যাইবে। সুতরাং বর্ধমান অপেক্ষক $f$-এর একটি বিপরীত অপেক্ষক $f^{-1}$ অবশ্যই থাকিবে।

(ii) অনুরূপে, যদি $g(x)=y$ একটি সর্বৈব হ্রসমান অপেক্ষক $g$-এর সংজ্ঞা হয়, তবে $g$-এর ব্যাপ্তিভুক্ত $x_1, x_2, x_3$ প্রভৃতি মানগুলি ক্রমাগত বাড়িতে থাকিলে, ঐ সকল ব্যাপ্তিভুক্ত মান হইতে উৎপন্ন যথাক্রমে $y_1, y_2, y_3$ প্রভৃতি মান ক্রমাগত কমিতে থাকিবে। ফলে $g$-এর প্রতিটি ব্যাপ্তিভুক্ত মান হইতে যেমন উহার প্রসারে একটিই মাত্র মান পাওয়া যাইবে, তেমনি উহার প্রসারভুক্ত প্রতিটি মান উৎপন্ন হইবে $g$-এর ব্যাপ্তিভুক্ত একটি এবং একটিমাত্র মান হইতে। সুতরাং $g$-এর একটি বিপরীত অপেক্ষক $g^{-1}$ অবশ্যই থাকিবে।

$\therefore$ (i) ও (ii) হইতে ইহাই সিদ্ধান্ত হয় যে,

**কোন অপেক্ষক সর্বৈব বর্ধমান বা হ্রসমান হইলে উহার একটি বিপরীত অপেক্ষক থাকিবে।**

অপেক্ষক বিশেষের বিপরীত অপেক্ষক আছে কিনা তাহা বিচার করিবার সময় দেখিতে হইবে, অপেক্ষকটি সর্বৈব বর্ধমান বা হ্রসমান কিনা।

## উদাহরণমালা

**উদা. 1.** $f(x)=2x+1$ হইলে দেখাও যে $f$-এর একটি বিপরীত অপেক্ষক $f^{-1}$ আছে যাহার সংজ্ঞা $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}(x-1)$.

$f(x)=2x+1$ হইতে দেখা যায়,

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| যখন, $x=-2$ | $-1$ | $0$ | $2$ | $3$......ইত্যাদি, |
| তখন, $y=-3$ | $-1$ | $1$ | $5$ | $7$......ইত্যাদি। |

স্পষ্টতঃ, $f$ একটি সর্বৈব বর্ধমান অপেক্ষক এবং সেই কারণে উহার ব্যাপ্তিভুক্ত প্রতিটি মান হইতে যেমন একটি এবং একটিই মাত্র প্রসারভুক্ত মান পাওয়া যায়, তেমনি উহার প্রসারভুক্ত প্রতিটি মান উৎপন্ন হয়, একটি এবং একটিই মাত্র ব্যাপ্তিভুক্ত মান হইতে। অতএব $f$-এর একটি বিপরীত অপেক্ষক $f^{-1}$ অবশ্যই থাকিবে।

ধরা যাক $f(x)=2x+1=y$ ;

যেহেতু $f$-এর বিপরীত আপেক্ষক $f^{-1}$ সেইহেতু সংজ্ঞা অনুসারে $f^{-1}(y)=x$ ;

কিন্তু $2x+1=y$ বলিয়া

$x=\frac{1}{2}(y-1)$.

$\therefore \; f^{-1}(y)=\frac{1}{2}(y-1)$. [ $x=\frac{1}{2}(y-1)$ বসাইয়া ]

এখন $y$-এর বিভিন্ন মানের জন্য $f^{-1}(y)$-এর বিভিন্ন মান হইবে।

$\therefore \; y=u$ হইলে $f^{-1}(u)=\frac{1}{2}=(u-1)$

অনুরূপে, $y=x$ হইলে, $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}(x-1)$.

উদা. 2. $f(x)=x^2+1$ এবং $f$-এর ব্যাপ্তি $[-3, 0]$ হইলে দেখাও যে, $f$-এর একটি বিপরীত অপেক্ষক বর্তমান। $f^{-1}$-এর ব্যাপ্তি নির্ণয় কর।

$f(x)=x^2+1$ বলিয়া,

$$f(-3)=(-3)^2+1=10$$
$$f(-2)=(-2)^2+1=5$$
$$f(-1)=(-1)^2+1=2$$
$$f(0) = \quad 0+1=1$$

সুতরাং $-3$ হইতে $0$ পর্যন্ত $x$-এর ক্রমবর্ধমান মানের জন্য $f(x)$-এর মানসমূহ পরস্পর ভিন্ন ও ক্রমহ্রসমান। সেই কারণে $f$-এর একটি বিপরীত অপেক্ষক $f^{-1}$ বর্তমান। $f$-এর প্রসার $[1, 10]$ ; সুতরাং $f^{-1}$-এর ব্যাপ্তি $[1, 10]$.

উদা. 3 $f(x)=\dfrac{x+a}{bx-1}$ হইলে, প্রমাণ কর যে $f=f^{-1}$.

ধরা যাক $f(x)=y=\dfrac{x+a}{bx-1}$

বা, $bxy-y=x+a$, বা, $(by-1)x=y+a$,

বা, $x=\dfrac{y+a}{by-1}$

কিন্তু সংজ্ঞানুসারে $f^{-1}(y)=\dfrac{y+a}{by-1}$.

$\therefore$ $y$-এর স্থলে $x$ বসাইলে, $f^{-1}(x)=\dfrac{x+a}{bx-1}=f(x)$

$\therefore$ $f=f^{-1}$.

**উদা. 4.** $f(x)=\sec x$ হইলে কোন্ ব্যাপ্তির মধ্যে $f$-এর বিপরীত অপেক্ষক $f^{-1}$ থাকিতে পারে? $f^{-1}$-এর ব্যাপ্তি ও প্রসার নির্ণয় কর।

$f(x)=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$ বলিয়া $x$-এর মান 0 হইতে যতই $\dfrac{\pi}{2}$-এর নিকটতম হয়, ততই $f(x)$-এর মান 1 হইতে অনন্ত বা $\infty$-এর দিকে বর্ধমান হয়। কিন্তু $x=\dfrac{\pi}{2}$-এর জন্য $f(x)$-এর কোন মান নাই, কেননা $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\sec\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)}=\dfrac{1}{0}$, যাহার অস্তিত্ব নাই।

আবার $x$-এর মান যখন $\dfrac{\pi}{2}$-এর অব্যবহিত বৃহত্তর মান হইতে $\pi$ পর্যন্ত ক্রমাগত বৃদ্ধি পায় তখন $f(x)$-এর মান $-\infty$ হইতে ক্রমাগত $-1$ পর্যন্ত বৃদ্ধি পায়।

$\therefore$ $x$-এর মান অর্থাৎ $f$-এর ব্যাপ্তি 0 হইতে $\pi$ পর্যন্ত বিস্তারিত ধরিলে উহার মধ্যে $\dfrac{\pi}{2}$ মানটি নাই। অর্থাৎ $f$-এর ব্যাপ্তি $\dfrac{\pi}{2}$ বর্জিত $[0, \pi]$ বা $\left[0, \pi\right]\sim\left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

স্পষ্টতঃ সেক্ষেত্রে $f$-এর প্রসার $]-\infty, \infty[$ বা বাস্তব সংখ্যার গুচ্ছ R.

এখন যেহেতু $\left[0,\pi\right]\sim\left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$ ব্যাপ্তিতে $f$ সর্বত্র বর্ধমান, সেইহেতু $f$-এর বিপরীত অপেক্ষক $f^{-1}$ অবশ্যই থাকিবে।

সেই $f^{-1}$-এর ব্যাপ্তি হইবে $f$-এর প্রসার R এবং উহার প্রসার হইবে $f$-এর ব্যাপ্তি $[0, \pi)\sim\left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

**উদা. 5.** দেখাও যে, (i) $0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ সীমায় $f(x)=\operatorname{cosec} x$ হইলে $f$-এর নিম্নসীমা 1 কিন্তু ঊর্ধ্বসীমা নাই; (ii) $0\leqslant x\leqslant 2$ সীমায় $f(x)=x^2+3x+4$ হইলে $f$-এর ঊর্ধ্বসীমা 14 এবং নিম্নসীমা 4.

i) $f(x)=\operatorname{cosec} x=\dfrac{1}{\sin x}$ বলিয়া

$f(0)=\frac{1}{\sin 0}=\frac{1}{0}$ হয়, কাজেই $f(0)$-এর অস্তিত্ব নাই ; এবং $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2}}$
$=\frac{1}{1}=1.$

যেহেতু, $x$-এর মান 0 হইতে $\frac{\pi}{2}$ পর্যন্ত বাড়িতে থাকিলে $f(x)$-এর মান ক্রমাগত হ্রাস পাইতে পাইতে 1-এ আসিয়া দাঁড়ায় সেইহেতু $f$-এর নিম্নসীমা $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1.$ কিন্তু $f$-এর কোন ঊর্ধ্বসীমা $f(0)$-এর অস্তিত্ব নাই, কারণ $x$-এর মান ক্রমশঃ 0-র কাছাকাছি আসিলে $f(x)$-এর মান সীমাহীনভাবে বৃদ্ধি পায়।

(ii) $f(x)=x^2+3x+4$ বলিয়া

$f(0)=0^2+3.0+4=4.$

এবং $f(2)=2^2+3\cdot 2+4=4+6+4=14.$

এখন $x$-এর মান 0 হইতে ক্রমশঃ 2 পর্যন্ত বৃদ্ধি পাইতে থাকিলে $f(x)$-এর মানও ক্রমাগত বৃদ্ধি পায়। অর্থাৎ $f(x)$ একটি সর্বৈব বর্ধমান অপেক্ষক। সুতরাং উহার ঊর্দ্ধ ও নিম্নসীমা যথাক্রমে $f(2)$ ও $f(0)$. সুতরাং $f$-এর ঊর্ধ্ব ও নিম্নসীমা যথাক্রমে 14 ও 4.

**উদা. 6.** $f(x)=\sin^2 x$ এবং $g(u)=\sqrt{u}$ হইলে $f$-এর প্রসারভুক্ত মানকে $g$-এর ব্যাপ্তিভুক্ত ধরা যায় কি? $f$-এর $g$ অপেক্ষকটির অস্তিত্ব থাকিলে তাহার সংজ্ঞা লিখ।

$f(x)=\sin^2 x$ হইতে দেখা যায় $f$-এর প্রসারভুক্ত মান $\sin^2 x$ ধনাত্মক। যেহেতু $\sin x$-এর সর্বোচ্চমান 1 সেইহেতু $\sin^2 x$-এর অথবা $f$-এর প্রসার [0, 1].

$g(u)=\sqrt{u}$-এর ব্যাপ্তি [0, ∞[ স্পষ্টতঃ [0, 1] অবশ্যই [0, ∞[-এর অন্তর্ভুক্ত। সুতরাং $f$-এর প্রসারভুক্ত মান $g$-এর ব্যাপ্তিভুক্ত। সেই কারণে $f$-এর $g$ অপেক্ষকটির সংজ্ঞা হইবে $g(f(x))=\sqrt{f(x)}=\sqrt{\sin^2 x}=\sin x.$

## প্রশ্নমালা 4

1. নিচে কয়েকটি অপেক্ষকের সংজ্ঞা ও ব্যাপ্তি দেওয়া আছে। উহাদের কোন্‌টির বিপরীত অপেক্ষক আছে এবং তাহা কারণসহ লিখ।

(i) $f(x)=1-2x$ ; ব্যাপ্তি R′. (ii) $f(x)=2-3x$ ; ব্যাপ্তি R.

(iii) $f(x)=x^2$ ; ব্যাপ্তি R. (iv) $f(x)=x^2$ ; ব্যাপ্তি [0, ∞].

(v) $f(x)=x^2$ ; ব্যাপ্তি [− ∞, 0]. (vi) $f(x)=x^3$ ; ব্যাপ্তি R.

(vii) $f(x)=\frac{1}{x^2}$ ; ব্যাপ্তি $]-\infty, 0[$. (viii) $f(x)=|x|$ ; ব্যাপ্তি $[-2,2]$

(ix) $f(x)=x+\frac{1}{x}$ ; ব্যাপ্তি $[1, 5]$. (x) $f(x)=x^3+1$ ; ব্যাপ্তি $[0, \infty]$

2. নিম্নলিখিত প্রত্যেকটি অপেক্ষক $f$-এর বিপরীত অপেক্ষক $f^{-1}$-এর সংজ্ঞা-সূচক সমীকরণ লিখ :

(i) $f(x)=3x-1$. (ii) $f(x)=\frac{3-x}{2+x}$.

(iii) $f(x)=\frac{3-4x}{5x+3}$. (iv) $[-\infty, -1]$ ব্যাপ্তিতে $f(x)=\frac{1}{x}+1$.

(v) $f(x)=x\,|x|$ যখন $x \geqslant 0$.

3. $f(x)=\frac{1}{x}+1$ এবং $f$-এর ব্যাপ্তি $[-3,-1]$ হইলে দেখাও যে $f^{-1}$ বর্তমান। $f^{-1}$-এর ব্যাপ্তি নির্ণয় কর।

4. $f(x)=\frac{1}{x^2}$ এবং $f$-এর ব্যাপ্তি $[\cdot 1, \cdot 5]$ হইলে $f^{-1}$-এর অস্তিত্ব প্রমাণ কর এবং $f^{-1}$-এর ব্যাপ্তি নির্ণয় কর।

5. লেখ অঙ্কন করিয়া দেখাও যে—

$f(x)=\cot x$ হইলে $f$-এর $]0, \pi[$ ব্যাপ্তিতে, $\cot^{-1}x$ বর্তমান ; $f^{-1}$-এর ব্যাপ্তি কত ?

6. $f(x)=\operatorname{cosec} x$ হইলে, কোন্ শর্তে $f^{-1}$ থাকা সম্ভব ? লেখ অঙ্কন করিয়া $f^{-1}$-এর ব্যাপ্তি ও প্রসার নির্ণয় কর।

7. $g(x)=\log_e x$ এবং $f(x)=e^x$ হইলে লগারিদ্‌মিক সারণী ব্যবহার করিয়া দেখাও যে $g=f^{-1}$.

8. $f(x)=x^2+2x+3$ হইলে $[0, 1]$ অবকাশে $f(x)$-এর উর্ধ্ব ও নিম্নসীমা নির্ণয় কর।

9. $f(x)=\sec x$ হইলে দেখাও যে $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ অবকাশে উহার নিম্নসীমা আছে কিন্তু উর্ধ্বসীমা নাই। ঐ নিম্নসীমার মান কত ?

10. নিচের প্রতিটি অপেক্ষকের যদি বিপরীত অপেক্ষক থাকে তবে, দেখাও যে প্রত্যেকটি ক্ষেত্রে $f=f^{-1}$.

(i) $f(x)=K-x$ ; (ii) $f(x)=\frac{K}{x}$ ;

(iii) $f(x)=\dfrac{b(x+1)}{cx-b}$ ; (iv) $f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$.

11. $f(x)=\dfrac{3x+2}{x-2}$ এবং $f$-এর ব্যাপ্তি $[3, \infty[$ হইলে দেখাও যে, $f$ সর্বৈব হ্রসমান অপেক্ষক এবং সেই কারণে $f$-এর একটি বিপরীত অপেক্ষক $g$ থাকিবে। $g$-এর সমীকরণ নির্ণয় কর। [ সংকেত, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$ প্রভৃতি মান নির্ণয় করিয়া দেখাও যে তাহারা ক্রমহ্রসমান। ]

12. 11 নম্বর প্রশ্ন হইতে দেখাও যে $f(g(x))=g(f(x))$.

13. $S(x)=\dfrac{3x+4}{x-4}$ হইতে দেখাও যে $-\infty < x < 4$ অবকাশে S-এর একটি বিপরীত অপেক্ষক $S^{-1}$ আছে। $S^{-1}$ নির্ণয় কর।

14. 13 নম্বর প্রশ্ন হইতে দেখাও যে,

$$S(S^{-1}(x))=S^{-1}(S(x))$$

15. $f$ ও $g$-এর বিপরীত অপেক্ষক যথাক্রমে $f^{-1}$ ও $g^{-1}$ এবং $S(x)=f(g(x))$ হইলে দেখাও যে,

$$S^{-1}(x)=g^{-1}(f^{-1}(x))$$

[ সংকেত : $g(x)=u$ ধরিলে, $g^{-1}(u)=x$ ; $\therefore f(g(x)=f(u)=S(x)$.

আবার $S(x)=f(u)=v$ ধরিলে $S^{-1}(v)=x$ এবং $f^{-1}(v)=u$. $\therefore S^{-1}(v)$ $=x=g^{-1}(u)=g^{-1}(f^{-1}(v))$. $v$-এর স্থলে $x$ বসাইলে উত্তর পাওয়া যায়। ]

16. $f(x)=\dfrac{1}{\sin x}$ এবং $g(x)=\dfrac{1}{x}$ হইলে দেখাও যে $g(f(x))=S(x)$ সংজ্ঞাসূচিত একটি অপেক্ষক S-এর অস্তিত্ব আছে। $S(x)$-এর মান নির্ণয় কর।

[ সংকেত : $f$ এর প্রসার $[-1, 1]\sim\{0\}$. অর্থাৎ 0 বর্জিত $[-1, 1]$ এবং $g$ এর ব্যাপ্তি $R\sim\{0\}$. সুতরাং S আছে। ইত্যাদি ]

17. $f(x)=x^2-1$ এবং $g(x)=\sqrt{x}$ হইলে দেখাও যে $g(f(x))=p(x)$ দ্বারা সূচিত অপেক্ষক $p$-এর ব্যাপ্তিতে $-1$ হইতে বড় এবং 1 হইতে ছোট কোন মান নাই।

**সংকেত :** $P(x)=g(f(x))=g(x^2-1)=\sqrt{x^2-1}=\sqrt{(x+1)(x-1)}$ ; $x$-এর $-1$ হইতে বড় কিন্তু 1 হইতে ছোট যে-কোন মানের জন্য $(x+1)(x-1)$ ঋণাত্মক এবং সেই কারণে $\sqrt{(x+1)(x-1)}$ অবাস্তব যাহা এক্ষেত্রে অসম্ভব। ইত্যাদি। ]

# তৃতীয় অধ্যায়

## সীমান্তমান ও সন্ততি
## (Limit and Continuity)

### 3.1. সীমান্তমান (Limit) :

$x$ সম্বলিত অপেক্ষক $f$ হইতে $f(x)$-এর বিভিন্ন মান পাওয়া যায়। $x=a$, $f(x)$-এর ব্যাপ্তিভুক্ত কোন মান হইলে $f(x)$-এর মান হয় $f(a)$ ; কিন্তু $x=a$ ব্যাপ্তি-বহির্ভূত কোন মান হইলে $f(a)$ পাওয়া যাইবে না। কিন্তু $x$ যদি ঠিক $a$-র সমান না হইয়া উহার খুব কাছাকাছি মান হয়, তবে $x$-এর সেই মানকে $a$-র সমান না বলিয়া বলিতে হয় $a$-গামী বা $a$-র নিকটতম মান। গণিতের সংকেতে $x$-এর এই $a$-গামী বা $a$-র নিকটতম মানকে লেখা হয় $x \to a$ আকারে।

এখন প্রশ্ন : $x \to a$ হইলে ( অর্থাৎ $x$, $a$-গামী বা $a$-র অতি সন্নিকট হইলে ) $f(x)$-এর মানসমূহ কোন সসীম মানের অভিমুখী হয় কিনা ? $x$-এর মান ক্রমশঃ $a$-র নিকটবর্তী হইলে যদি $f(x)$-এর মানও ক্রমশঃ একটি সসীম সংখ্যা $l$-এর খুবই নিকটবর্তী হইতে থাকে তবে সেক্ষেত্রে, **$x \to a$ সাপেক্ষে $l$-কে $f(x)$-এর সীমান্ত মান বলে।** সীমান্তমান ইংরাজি Limit-এর প্রতিশব্দ। সীমান্তমানকে তাই সাংকেতিক ভাষায় $\lim_{x \to a} f(x)$ বা আরও সংক্ষেপে $\text{Lt}_{x \to a} f(x)$ আকারে লেখা হয় এবং তাহা যদি $l$-এর সমান হয়, তবে লেখা হয় $\lim_{x \to a} f(x) = l$ বা $\text{Lt}_{x \to a} f(x) = l$.

এইবার প্রশ্ন : $\text{Lt}_{x \to a} f(x) = l$ হইলে $l$-কে সীমান্তমান বলার সার্থকতা কি ?

পরবর্তী অনুচ্ছেদে, অপেক্ষকের জ্যামিতিক ধারণার উপর নির্ভর করিয়া উপরোক্ত প্রশ্নের উত্তর সন্ধান করা যাইতেছে।

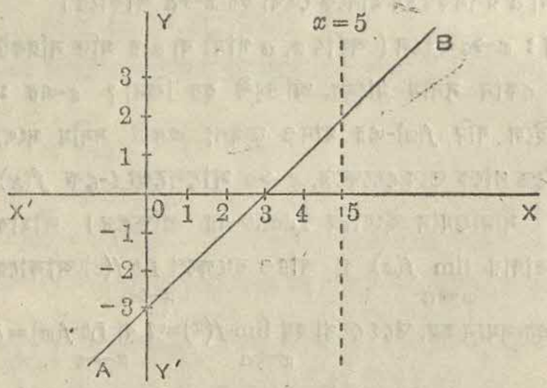
### 3. 2. অপেক্ষকের জ্যামিতিক চিত্র হইতে সীমান্তমানের ধারণা (Concept of limit from geometrical approach) :

2.2 অনুচ্ছেদের (iv)-বিভাগের আলোচনা হইতে সিদ্ধান্ত এই হইয়াছে যে, অপেক্ষকমাত্রই সংজ্ঞাবদ্ধ নিয়মে সম্পর্কিত যুগলমান সমূহ লইয়া গঠিত। অর্থাৎ একটি চলক বিশিষ্ট প্রত্যেক অপেক্ষক হইতে জোড়া জোড়া কতকগুলি মান পাওয়া যায়। সুতরাং $f$ যদি $x$-সম্বলিত একটি অপেক্ষক হয়, তবে $f$ হইতে $(x, f(x))$ আকারে যুগলমান, $x$-এর বিভিন্ন মানের জন্য বিভিন্ন হইবে। কার্তেজীয় অক্ষতন্ত্রে এইরূপ প্রত্যেকটি যুগলমানের প্রথমটিকে ভুজের এবং দ্বিতীয়টিকে কোটির মান ধরিয়া একটি

বিন্দু স্থাপন করা যায়। এইভাবে $f$-এর বিভিন্ন যুগলমান হইতে প্রাপ্ত বিন্দুগুলিকে যুক্ত করিলেই $f$-এর একটি লেখ চিত্রিত হয়।

এই অনুচ্ছেদের আলোচ্য বিষয় হইল অপেক্ষকের সীমান্ত মান। একটি সরলরেখা সূচক অপেক্ষক লইয়া আলোচনার সূত্রপাত করা যাক্।

(i) $(x)=x-3$ একটি সরলরেখা সূচক অপেক্ষক। এই $f(x)=(x-3)$ হইতে $(-3,-6), (-2,-5), (-1,-4), (0,-3), (1,-2), (2,-1), (3, 0)$ $(4, 1), (5,2), (6, 3)$ প্রভৃতি যে-যুগলমানগুলি পাওয়া যায় তাহাদের দ্বারা সূচিত বিন্দুগুলিকে চিহ্নিত ও যুক্ত করিলে যেন 30নং চিত্রের $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখাটি পাওয়া যায়। $\overleftrightarrow{AB}$-ই $f$-এর লেখ।




চিত্র নং—30

এই লেখচিত্রের যে-কোন বিন্দুর ভুজ হইবে $x$-এর একটি মান এবং তাহার কোটি হইবে সেই $x$ হইতে প্রাপ্ত $f(x)$ মান। এখন $x$-এর মান ঠিক 5 না হইয়া যদি 5-এর অতি সন্নিকট কোন মান হয় তবে $x \to 5$ দ্বারা সেই মান বা মানসমূহ সূচিত হইবে। এখন 5-এর অতিসন্নিকট বিন্দুসমূহ $x=5$ রেখাটির বামে বা ডাহিনে 5-চিহ্নিত বিন্দুটির গায়ে গায়ে লাগিয়া অবস্থিত হইতে পারে। সুতরাং $x$-এর মানসমূহ $x=5$ রেখাটির যত কাছাকাছি থাকিবে, ততই $x \to 5$ হইবে।

স্পষ্টত:, $x \to 5$ হইলে $f(x)$-এর যে মানসমূহ পাওয়া যাইবে তাহারাও হইবে $x=5$ রেখাটিরই কাছকাছি লেখস্থিত বিন্দুসমূহের কোটির মান। এখন $x=5$ রেখাটি $f$-কে $(5, 2)$ বিন্দুতে ছেদ করে এবং $(5,2)$ বিন্দুটির কোটি $f(5)=5-3=2$. অতএব $x \to 5$ হইলে $f(x)$ – এর মান $f(5)$-এর ঠিক সমান না হইলেও উহার অতি

সন্নিকট কোন মানের অভিমুখী হইবে। সেই হিসাবে $f(5)$-এর নিকটতম সেই $f(x)$-এর মানকে সীমান্তমান বলাই সঙ্গত। সংকেতে তাই এই মানকে $\underset{x\to 5}{\text{Lt}} f(x)$ আকারে লেখা হয়।

দেখা যাইতেছে, $x\to 5$ দ্বারা সূচিত মানসমূহ 5-এর নিকটতম। উহারা 5 হইতে নগণ্য পরিমাণ বড় বা ছোট হইবে। ধরা যাক সেই মান $=5+h$ বা $5-h$, যেখানে $h$ একটি নগণ্য মানের ধনসংখ্যা। $h=\text{'}00001$ অর্থাৎ একের লক্ষ ভাগের একভাগ হইলে, $5+h=5+\text{'}000001=5\text{'}000001$ এবং $5-\text{'}000001=4\text{'}99999$. $h$-এর মান যদি '000001 হইতে আরও ছোট হয়, যদি তাহা এত ছোট হয় যে 0-এর সহিত উহার পার্থক্য থাকে না বলিলেই চলে, তবে $5+h$ কার্যত: $5+0$ বা $5-0$ হইয়া যায়। আবার,

$\underset{x\to 5}{\text{Lt}}\ f(x)=\underset{h\to 0}{\text{Lt}}\ (5+h-3)=\underset{h\to 0}{\text{Lt}}\ (2+h)$ অথবা $\underset{x\to 5}{\text{Lt}}\ f(x)=\underset{h\to 0}{\text{Lt}}\ (5-h-3)$ $=\underset{h\to 0}{\text{Lt}}(2-h)$ হয়। অর্থাৎ তখন $\underset{x\to 5}{\text{Lt}}\ f(x)=\underset{x\to 5}{\text{Lt}}\ (2\pm h)$ হইয়া দাঁড়ায়। অতএব এখানে $h$-এর মান প্রায় শূন্য হইয়া গেলে শেষ পর্যন্ত $\underset{x\to 5}{\text{Lt}}\ f(x)=2$ হইয়া পড়ে এবং সেই কারণে $x\to 5$ হইলে $f(x)$-এর সীমান্ত মান হইবে 2, অর্থাৎ $\underset{x\to 5}{\text{Lt}}\ f(x)=2$.

স্পষ্টত: এখানে $x=5$ রেখাটি $f$ লেখটিকে যে-বিন্দুতে ছেদ করে সেই বিন্দুর কোটি $f(5)$-এর মানই এই সীমান্ত মান।

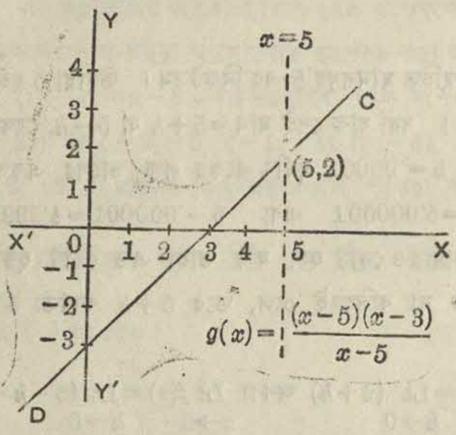
সুতরাং সাধারণভাবে বলা যায়, **যে-কোন অপেক্ষক $f$-এর লেখকে $x=a$ রেখাটি যে বিন্দুতে ছেদ করে বা "ছেদ করা উচিত" সেই বিন্দুটির কোটির মানই $\underset{x\to a}{\text{Lt}} f(x)$-এর সীমান্ত মান।**

এই সংজ্ঞায় "ছেদ করা উচিত" কথাটির তাৎপর্য পরবর্তী (II) এর উদাহরণটির আলোচনা হইতে স্পষ্ট হইবে।

(ii) $g$ অপেক্ষকটির সংজ্ঞা যদি $g(x)=\dfrac{(x-5)(x-3)}{x-5}$ হয়, তবে $x=5$ হইলে $g(5)=\dfrac{(5-5)(5-3)}{5-5}=\dfrac{0}{0}$ হইয়া পড়ে এবং সেই কারণে $g(5)$-এর কোন মান পাওয়া যায় না।

কিন্তু $x\neq 5$ হইলে $g(x)=\dfrac{(x-5)(x-3)}{(x-5)}=x-3$ হইয়া যায়। সেক্ষেত্রে $g$-এর

লেখটি 30 নং চিত্রে প্রদর্শিত $f$-এর লেখটিরই অনুরূপ হয়, তবে উহাতে (5, 2) বিন্দুটি থাকে না। 31 নং চিত্রে দেখা যাইতেছে (5, 2) বিন্দুতে $g$ এর লেখটি বিচ্ছিন্ন। ঐ বিন্দু পরিমাণ ছেদ বা ছিদ্রটুকু যদি ভরাট হইত তবে এই লেখটি 30নং চিত্রের $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখাটির সহিত অভিন্ন হইয়া যাইত।




চিত্র নং—31

এক্ষেত্রেও $\text{Lt}_{x\to 5}\, g(x)$-এর মান নির্ণয় করিবার জন্য $x=5$ রেখাটির কাছাকাছি $x$-এর মানসমূহের জন্য $f(x)$-এর মান বা মানসমূহ কিরূপ দাঁড়ায় তাহা দেখিতে হইবে। এই রেখাটি টানিবামাত্র দেখা যাইবে যে ফাঁকা (5, 2) বিন্দুটি ভরাট হইয়া যাইবে এবং তাহা একটি বিন্দু পরিমাণ সেতুর মত $g$-এর লেখটির দুইটিঅংশকে যুক্ত করিয়া দিয়া $\overleftrightarrow{CD}$ সরলরেখাটি উৎপন্ন করিবে। কিন্তু মনে রাখিতে হইবে যে, প্রকৃতপক্ষে (5,2) বিন্দুটি $x=5$ এর উপরেই অবস্থিত, $g$-এর লেখটির উপর অবস্থিত নহে। $g$-এর লেখটির উপর ঐ বিন্দুটি নাই ; থাকিলে, $x=5$ বিন্দুটি $g$-এর লেখকে ঐ (5, 2)বিন্দুতে ছেদ করিত এবং তখন ঐ ছেদবিন্দুর কোটির মান হইত 2।

এখন $h$ যদি শূন্যের অতিসন্নিকট কোন ধনসংখ্যা হয় তবে,

$$\text{Lt}_{x\to 5}\, g(x) = \text{Lt}_{x\to 5} \frac{(x-5)(x-3)}{x-5} = \text{Lt}_{x\to 5} (x-3) \; [\because \; x \neq 5]$$

$$= \text{Lt}_{h\to 0} (5 \pm h - 3) = \text{Lt}_{h\to 0} (2 \pm h) = 2.$$

এইভাবে দেখা যায়, $x$-এর মান 5 হইতে কোন ক্ষুদ্রতম ধনসংখ্যা $h$-পরিমাণ বড় বা ছোট হইলে $g(x)$-এর মান কার্যত 2-এর সমান হইয়া যায়। এইমাত্র দেখা গিয়াছে যে, এই 2 হইল (5, 2) বিন্দুর কোটির মান। সুতরাং বলা চলে, $x=5$ রেখাটির $g$-এর লেখকে যে-বিন্দুতে "ছেদ করা উচিত" সেই বিন্দুর কোটির মানই $= \text{Lt}_{x\to 5}\, g(x)$.

এখানে 'ছেদ করা উচিত' বলার তাৎপর্য এই যে, $x=5$ আসলে $g$-এর লেখকে (5, 2) বিন্দুতে ছেদ করে নাই ; কেননা লেখটির উপর (5, 2) বিন্দুটি নাই। অতএব এখানে $g(5)$ মানটি না পাওয়া গেলেও সীমান্তমান $\underset{x\to 5}{\text{Lt}}\, g(x)$-এর অস্তিত্ব স্বীকার করিতে হয় এবং তাহাই এখানে 2. অর্থাৎ $\underset{x\to 5}{\text{Lt}} \dfrac{(x-5)(x-3)}{x-5}=2.$

(iii) পূর্ববর্তী আলোচনা হইতে দেখা যায়, 30নং চিত্রে $\underset{x\to 5}{\text{Lt}}\, f(x)$-এর মান নির্ণয়ের সময় $x=5+h$ বা, $5-h$ ধরা হইয়াছে, যেখানে $h$ শূন্যের নিকটতম একটি ধনসংখ্যা অর্থাৎ যেখানে $h\to 0$. অনুরূপে 31 নং চিত্রেও $\underset{x\to 5}{\text{Lt}}\, g(x)$-এর মান নির্ণয়ের সময়, $x=5+h$ বা $5-h$ ধরা হইয়াছে, যেখানে $h\to 0$.

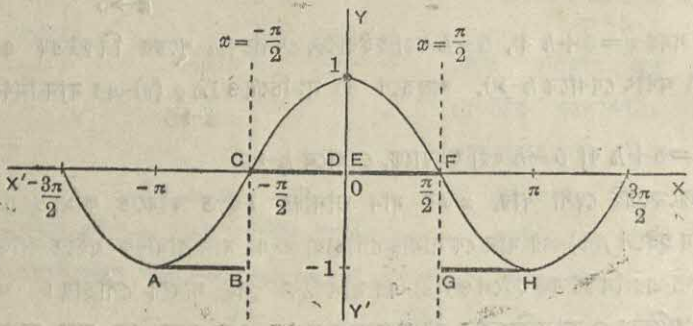
উভয়ক্ষেত্রেই দেখা যায়, $x$-এর মান ডানদিক হইতে কমিতে কমিতে 5-এর নিকটতম হইলে $f(x)$-এর মান যে সীমায় পৌছায়, $x$-এর মান বামদিক হইতে বাড়িতে বাড়িতে 5-এর নিকটতম হইলেও $f(x)$-এর মান ঠিক সেই সীমায় পৌছায়। এই-ভাবে **বামদিক ও ডানদিকের সীমান্তমান যখন এক ও অভিন্ন হয় তখনই সীমান্ত মানটির অস্তিত্ব সুনিশ্চিত হয়।**

কিন্তু সকল সময় এইভাবে **বামদিক ও ডানদিকের সীমান্তমান সমান না-ও হইতে পারে। যদি না হয়, তবে বলা হয় কোন সীমান্তমান নাই।** বিষয়টি ব্যাখ্যা করা যাইতেছে। এই প্রসঙ্গে 2·6 অনুচ্ছেদে $(d)$ বিভাগে আলোচিত গরিষ্ঠ সংখ্যাজ্ঞাপক অপেক্ষকের ধারণাটি আবার ঝালাইয়া লওয়া প্রয়োজন। 38 পৃষ্ঠার সারণী হইতে দেখা যাইবে যে,

| | | |
|---|---|---|
| যখন $x=0$, | তখন $\cos x=1$, | সুতরাং, $[[\cos x]]=1$ |
| $x=\pm 0·1$ | „ $\cos x=·9980.$ | „ $[[\cos x]]=0$ |
| $x=\pm 0·2$ | „ $\cos x=·9801,$ | „ $[[\cos x]]=0$ |
| $x=\pm 0·3$ | „ $\cos x=·9553,$ | „ $[[\cos x]]=0$ |
| ... | ... | ... ... |
| „ $x=\pm 1·5$ | „ $\cos x=·0707,$ | „ $[[\cos x]]=0$ |
| যখন $x=\frac{\pi}{2}=\pm 1·57$ | তখন $\cos x=0.$ | „ $[[\cos]]=0$ |
| কিন্তু „ $x=\pm 1·6$ „ | $\cos x=-·0272,$ | „ $[[\cos x]]=-1$ |

যখন „ $x=\pi=\pm 3{\cdot}1$ তখন $\cos x=-1$, সুতরাং, $[\,[\cos x]\,]=-1$ ইত্যাদি।

ইহা হইতে স্পষ্ট হয় যে, যতক্ষণ $0 < x < 1{\cdot}57$ বা $\frac{\pi}{2}$ ততক্ষণ $\cos x$-এর গরিষ্ঠ অখণ্ড সংখ্যাজ্ঞাপক মান $=0$ থাকে। কিন্তু $x$-এর মান $1{\cdot}57$ হইতে বড় কিন্তু $3{\cdot}1$ ( বা $\pi$ ) হইতে ছোট বা $\pi$-এর সমান হইলে $\cos x$-এর গরিষ্ঠ অখণ্ডসংখ্যাজ্ঞাপক মান $=-1$ হইয়া যায়।




চিত্র নং—32

32নং চিত্রে $y=\cos x$-এর লেখটির সহিত $f(x)=[\,[\cos x]\,]$ লেখটিকে চিত্রিত করা হইয়াছে। এখানে $f$-এর ব্যাপ্তি ধরা হইয়াছে $[-3{\cdot}1, 3{\cdot}1]$ অর্থাৎ $[-\pi,\pi]$. ঐ লেখ হইতে-দেখা যায়, $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ ও $\overline{GH}$ এই চারটি বিভিন্ন খণ্ড রেখা এবং $(0,1)$ বিন্দু লইয়া $f$-এর লেখটি গঠিত। লক্ষ্য করিতে হইবে যে, $\overline{AB}$ খণ্ডরেখা $x=-\frac{\pi}{2}$ রেখাকে ছেদ করে না। সেইরূপ, $\overline{HG}$ খণ্ডরেখাও $x=\frac{\pi}{2}$ রেখাকে ছেদ করে না। তৃতীয়ত $\overline{CD}$ ও $\overline{EF}$ খণ্ডরেখা দুইটি O $(0,0)$ বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন।

এইবার $\underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\text{Lt}} f(x)$ অর্থাৎ $\underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\text{Lt}} [\,[\cos x]\,]$-এর মানটির সন্ধান করা যাক। লেখটির $\overline{EF}$ অংশ হইতে দেখা যাইতেছে, $x$-এর মান শূন্যের পর বামদিক হইতে বড় হইতে হইতে যখন $\frac{\pi}{2}$-র অভিমুখী হয়, তখন $f(x)$ মান সর্বক্ষণ $=0$ থাকে। ফলে $\overline{EF}$ অংশ $x$-অক্ষের উপর শায়িত থাকে। কিন্তু $x$-এর মান যেই $\frac{\pi}{2}$ সীমা পার হইয়া বৃহত্তর

হয়, অমনি $f(x)$-এর মান $-1$ হইয়া যায় এবং তাহা $x$-এর $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ অবকাশ সীমা পর্যন্ত $-1$-ই থাকে। ফলে ডানদিকে $\pi$ হইতে ছোট হইতে হইতে $x$-এর মান $\frac{\pi}{2}$-এর অতিশয় সান্নিধ্যে আসা পর্যন্ত $f$-এর লেখটির অংশ GH-দ্বারা সূচিত হয়। সুতরাং বামদিক হইতে $x$-এর মান ক্রমশঃ $\frac{\pi}{2}$-র কাছাকাছি আসিলে $f(x)$ এর মান 0 হয়, কিন্তু ডানদিক হইতে $x$-এর মান $\frac{\pi}{2}$-র কাছাকাছি আসিলে $f(x)$-এর মান $-1$ হয়। অতএব এইক্ষেত্রে বাম ও ডানদিক হইতে $f(x)$-এর কোন এক অভিন্ন সীমান্ত মান পাওয়া গেল না। সেই কারণে বলা হয় $\underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\text{Lt}} f(x)$ বা $\underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\text{Lt}} [[\cos x]]$-এর অস্তিত্ব নাই।

অনুরূপ কারণে $\underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\text{Lt}} [[\cos x]]$-এরও অস্তিত্ব নাই।

কিন্তু $\underset{x\to 0}{\text{Lt}} [[\cos x]]$-এর বিচার করিলে দেখা যায়, $x$ যখন বামদিকের C বিন্দু সূচিতমান অপেক্ষা বড় হইতে হইতে O বিন্দুর অতি সন্নিকট D বিন্দু সূচিত মানের অভিমুখী হয়, তখন $[[\cos x]]$ এর সীমান্ত মান $=0$ ; সেইরূপে, ডানদিকের F হইতে ছোট হইতে হইতে $x$ যখন 0-এর অতি সন্নিকট E বিন্দু সূচিত মানের অভিমুখী হয়, তখনও $[[\cos x]]$-এর সীমান্তমান $=0$. অতএব এক্ষেত্রে উভয় দিক হইতে এক ও অভিন্ন একটি সীমান্তমান পাওয়া যায়। সেই কারণে বলা হয় $\underset{x\to 0}{\text{Lt}} [[\cos x]]$ বর্তমান এবং তাহার মান 0 বা শূন্য অর্থাৎ $\underset{x\to 0}{\text{Lt}} [[\cos x]]=0$.

লক্ষ্য করিতে হইবে, (0.0) বিন্দুটি লেখটির উপরে নাই।

কারণ $x=0$ হইলে $\cos x=\cos 0=1$ এবং সেই কারণে $[[\cos x]]=1$ ;

অতএব, $f(x)=[[\cos x]]$ সংজ্ঞাবদ্ধ $f$-এর লেখটির উপর (0,1) বিন্দুটিই রহিয়াছে, (0, 0) বিন্দুটি নাই। অর্থাৎ এখানে $f(0)=[[\cos 0]]=1$.

তাহা হইলে,

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0, \quad \text{কিন্তু } \underset{x\to\pi}{\text{Lt}} f(x)\text{-এর অস্তিত্ব নাই;}$$

অনুরূপে, $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$, কিন্তু $\underset{x\to\frac{-\pi}{2}}{\text{Lt}} f(x)$-এর অস্তিত্ব নাই,

এবং $f(0)=1$, কিন্তু $\underset{x\to 0}{\text{Lt}} f(x)=0$

(iv) $S(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ হইলে S-এর লেখটি অঙ্কন করিবার জন্য নিম্নলিখিত যুগলমানগুলি নির্ণয় করা যায় :

যখন $x=\frac{2}{\pi}=6$, তখন $\sin\left(\frac{1}{x}\right)=\sin\left(\frac{1}{\frac{2}{\pi}}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,$

যখন $x=\frac{2}{3\pi}=\cdot 2$, তখন $\sin\left(\frac{1}{x}\right)=\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)=-1,$

যখন $x=\frac{2}{5\pi}=\cdot 1$, তখন $\sin\left(\frac{1}{x}\right)=\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)=\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{2}\right)=-1,$

যখন $x=\frac{2}{7\pi}=\cdot 09$, তখন $\sin\left(\frac{1}{x}\right)=\sin\left(\frac{7\pi}{2}\right)=\sin\left(3\pi+\frac{\pi}{2}\right)=-1,$

যখন $x=\frac{2}{9\pi}=\cdot 07$, তখন $\sin\left(\frac{1}{x}\right)=\sin\left(\frac{9\pi}{2}\right)=\sin\left(4\pi+\frac{\pi}{2}\right)=1,$

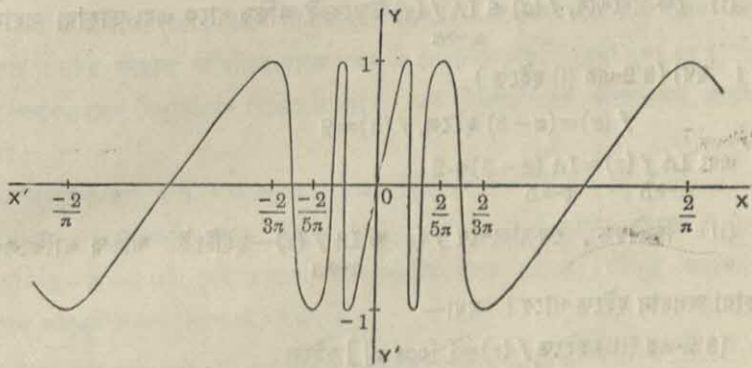
ইত্যাদি।

$\left(\frac{2}{\pi},1\right), \left(\frac{2}{3\pi},-1\right)\left(\frac{2}{5\pi},1\right)$ প্রভৃতি বিন্দু অর্থাৎ $(\cdot 6,1)$, $(\cdot 2,-1)$, $(\cdot 1,1)$ প্রভৃতি বিন্দু S-এর লেখটির উপর অবস্থিত।

আরও দেখা যায়, $x$-এর মান $\frac{2}{\pi}$ হইতে বৃদ্ধি পাইতে পাইতে অসীম মানের দিকে অগ্রসর হইতে থাকিলে $\frac{1}{x}$-এর মান $\frac{\pi}{2}$ হইতে কমিতে কমিতে 0-এর নিকটতম হয় এবং তখন $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$-এর মান 1 হইতে ক্রমাগত কমিয়া 0-তে আসিয়া দাঁড়ায়।

কিন্তু $x$-এর মান $\frac{2}{5\pi}$ হইতে $\frac{2}{3\pi}$, $\frac{2}{3\pi}$ হইতে $\frac{2}{\pi}$ ইত্যাদি ক্রমে বাড়িতে থাকিলে, $\frac{1}{x}$-এর মান যথাক্রমে $\frac{5\pi}{2}$ হইতে $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ হইতে $\frac{\pi}{2}$ ইত্যাদি ক্রমে বাড়িতে থাকে ; ফলে $\sin\frac{1}{x}$ এর মান 1 হইতে $-1$ এর মধ্যে চলাচল করিতে থাকে।

এইভাবে $x$-এর অনুরূপ ঋণাত্মক মানগুলি লইয়াও দেখা যায়, $x$-এর শূণ্যের নিকটতম মান হইতে $-\frac{2}{\pi}$ পর্যন্ত মানগুলির জন্য $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$-এর মানগুলি $-1$ হইতে 1-এর মধ্যে চলাচল করে এবং $-\frac{2}{\pi}$ হইতে অসীম পর্যন্ত $x$-এর মানের জন্য $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$-এর মান $-1$ হইতে 0-এর দিকে অগ্রসর হয়। S-এর লেখটি সেইজন্য নিম্নরূপ হইবে।




চিত্র নং—33

লক্ষ্যণীয় যে, $x$-এর মান যতই শূণ্যের নিকটবর্তী হয়, লেখটির বক্র অংশ ততই কাছাকাছি ঘেঁষিয়া আসে। ইহার অর্থ $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$-এর মান ক্রমাগত দ্রুততর বেগে 1 হইতে $-1$-এ বা $-1$ হইতে 1-এ অনন্তসংখ্যকবার চলাচল করিতে থাকে ; কখনও একটি নির্দিষ্ট সীমান্তমানের অভিমুখী হয় না।

সুতরাং বলিতে হয় যে $\operatorname{Lt}_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$-এর অস্তিত্ব নাই।

আবার এক্ষেত্রে $S(0)=\sin\left(\frac{1}{0}\right)$-এর কোন অস্তিত্ব নাই, কেননা $\frac{1}{0}$ ।

### 3·3. $\operatorname{Lt}_{x\to a} f(x)$ ও $f(a)$-এর পার্থক্য :

3·2 অনুচ্ছেদের (i) হইতে (iv)-এর বিভাগে যে আলোচনা হইয়াছে তাহা হইতে স্পষ্ট হইবে যে, $\operatorname{Lt}_{x\to a} f(x)$ ও $f(a)$ সমার্থক নহে।

$\operatorname{Lt}_{x\to a} f(x)$-এর অর্থ হইল $x$-এর মান $a$-এর ঠিক সমান না হইয়া $a$র অতি সন্নিকট

হইলে $f(x)$-এর মান যাহা হয় সেই সীমান্ত মান, যদি সেইরূপ কোন সীমান্ত-মানের অস্তিত্ব থাকে। আর $f(a)$-র অর্থ $x$-এর মান $a$-র সমান হইলে $f(x)$-এর মান যাহা হয় তাহা।

3·2 অনুচ্ছেদের আলোচনায় দেখা গিয়াছে যে, $\underset{x\to a}{\text{Lt}} f(x)$ বা $f(a)$-এর অস্তিত্ব থাকিতে পারে আবার না-ও থাকিতে পারে। আরও দেখা গিয়াছে যে,

(i) ক্ষেত্রবিশেষে, $f(a)$ ও $\underset{x\to a}{\text{Lt}} f(x)$ উভয়েরই অস্তিত্ব থাকে এবং তাহারা সমান হয়। যথা (3·2-এর (i) হইতে)

$$f(x)=(x-3) \text{ হইলে, } f(5)=2$$

এবং $\underset{x\to 5}{\text{Lt}} f(x)=\underset{x\to 5}{\text{Lt}}(x-3)=2$

(ii) দ্বিতীয়তঃ, ক্ষেত্রবিশেষে $f(a)$ ও $\underset{x\to a}{\text{Lt}} f(x)$—দুইটিরই অস্তিত্ব থাকিলেও উহারা অসমান হইতে পারে। যথা—

[3·2-এর (iii) হইতে $f(x)=[\,[\cos x]\,]$ হইলে

$$f(0)=1, \text{ কিন্তু } \underset{x\to 0}{\text{Lt}} f(x)=0$$

(iii) তৃতীয়তঃ, ক্ষেত্রবিশেষে $\underset{x\to a}{\text{Lt}} f(x)$-এর অস্তিত্ব থাকিলেও $f(a)$-এর অস্তিত্ব থাকে না। যথা—

[3·2-এর (ii) হইতে] $g(x)=\dfrac{(x-5)(x-3)}{x-5}$ হইলে

$$\underset{x\to 5}{\text{Lt}}\, g(x)=\underset{x\to 5}{\text{Lt}}\frac{(x-5)(x-3)}{x-5}=\underset{x\to 5}{\text{Lt}}(x-3)=2, \qquad [\text{ যেহেতু } x\neq 5\,]$$

কিন্তু $g(5)=\dfrac{(5-5)(5-3)}{5-5}=\dfrac{0}{0}$ অর্থাৎ

$g(5)$-এর অস্তিত্ব নাই।

(iv) চতুর্থতঃ, ক্ষেত্রবিশেষে $f(a)$-এর অস্তিত্ব থাকিলেও $\underset{x\to a}{\text{Lt}} f(x)$-এর অস্তিত্ব থাকে না। যথা—

[3·2-এর (ii) হইতে] $f(x)=[\,[\cos x]\,]$ হইলে

$\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ ; কিন্তু $\underset{x\to 0}{\text{Lt}} f(x)$-এর অস্তিত্ব নাই।

(v) পঞ্চমতঃ, 3.2 অনুচ্ছেদের (iv)-এর বিভাগে আলোচিত $f(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$-এর মত ক্ষেত্রে দেখা যায়, $f(0)$ এবং $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}$ S($x$)-এর অস্তিত্ব নাই।

সুতরাং ক্ষেত্রবিশেষে $f(a)$ ও $\underset{x\to a}{\text{Lt}} f(x)$ উভয়েরই অস্তিত্ব নাই।

## 3.4. সন্ততি (Coutinuity) :

সন্ততি বলিতে সাধারণভাবে অবিচ্ছিন্নতা বুঝায়। অপেক্ষক বিশেষের লেখ যখন উহার নির্দিষ্ট সীমায় অবিচ্ছিন্ন থাকে তখন ঐ লেখটিকে সন্ততি রেখা বলা হয়। যে অপেক্ষকের লেখ বিন্দুবিশেষে বিচ্ছিন্ন বা ভাঙা, সেই বিন্দুতে সেই অপেক্ষকর সন্ততি নাই।

উদাহরণস্বরূপ 3.2 অনুচ্ছেদের (i)-এর বিভাগে দেখা গিয়াছে যে $f(x)=x-3$ সংজ্ঞাবদ্ধ $f$ অপেক্ষকটি (5,2) বিন্দুতে সন্তত; কেননা $x=5$ হইলে সেখানে $f(x)=f(5)=5-3=2$ এবং সেই কারণে $f$ এর লেখটির উপর (5, 2) বিন্দুটি অবস্থিত। কাজে কাজেই $x=5$ সাপেক্ষে $f$ সন্তত।

কিন্তু 3.2 অনুচ্ছেদে (ii)-এর বিভাগ হইতে দেখা যায়, $g(x)=\dfrac{(x-5)(x-3)}{x-5}$ সংজ্ঞা দ্বারা সূচিত $g$ অপেক্ষকটি ব্যাপ্তির মধ্যে $x=5$ মান থাকিতে পারে না এবং সেই কারণে (5, 2) বিন্দুতে $g$-এর লেখটি বিচ্ছিন্ন। অর্থাৎ $x=5$ এর জন্য $g$-এর সন্ততি নাই।

অপেক্ষকমাত্রেরই লেখ অঙ্কন করিয়া এইভাবে সন্ততি বিচার সহজ নয়। উহার প্রয়োজনও নাই। 3.3 অনুচ্ছেদের আলোচনা হইতে এখন একথা স্পষ্ট হইয়া থাকিবে যে, কোন অপেক্ষক $f$ এর ব্যাপ্তির মধ্যে যদি $x=a$ মানটি থাকে, এবং উহার প্রসারের মধ্যেও যদি $f(a)$ মানটি থাকে, তবে $(a, f(a))$ বিন্দুটি $f$ এর লেখচিত্রে অবশ্যই অবস্থিত হইবে। সেক্ষেত্রে দেখা গিয়াছে যে,

$\underset{x\to a}{\text{Lt}} f(x)=f(a)$ হয়।

অতএব, ইহাই সিদ্ধান্ত হয় যে,

**$\underset{x\to a}{\text{Lt}} f(x)=f(a)$ হইলে $x=a$ মানের জন্য $f$ অপেক্ষকটি সন্তত।**

এই সিদ্ধান্ত অনুসারে,

$\therefore\ \underset{x\to 5}{\text{Lt}} f(x)=\underset{x\to 5}{\text{Lt}}(x-3)=2$ এবং $f(5)=5-3=2$

$\therefore\ x=5$ মানের জন্য $f$ **সন্তত** (Continuous).

আবার ∵ $\underset{x \to 5}{\text{Lt}}\ g(x) = \underset{x \to 5}{\text{Lt}}\ \frac{(x-5)(-3)}{x-5} = \underset{x \to 5}{\text{Lt}}\ (x-3) = 2.$

কিন্তু $g(5) = \frac{(5-5)(5-3)}{5-3} = \frac{0 \times 2}{0} = \frac{0}{0}$

∴ $g(5)$ এর অস্তিত্ব নাই, কাজেই $\underset{x \to 5}{\text{Lt}}\ g(x) \neq g(5)$

অতএব, $x=5$ এর জন্য $g$ **সন্ততি-চ্যুত (Discontinuous)। লক্ষ্য করিতে হইবে** যে, $g$ উহার ব্যাপ্তিভুক্ত 5 ভিন্ন অন্য সকল মানের জন্যই সন্তত। $f$ উহার সমগ্র ব্যাপ্তিতেই সন্তত।

**3.5. প্রমাণসহ কয়েকটি প্রয়োজনীয় সীমান্তমান (A few important limits with proof) :**

(a) **$n$ অখণ্ড সংখ্যা হইলে** $\underset{x \to a}{\text{Lt}}\ x^n = a^n$

$n$ অখণ্ড সংখ্যা হইলে উহা ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হইবে। $x \to a$ বলিয়া $x \neq a$ ; ধরা যাক্, $x = a+h$, যেখানে $h$ শূন্যের অতি সন্নিকট নগণ্য পরিমাণ একটি ক্ষুদ্র বাস্তব সংখ্যা। তাহা হইলে,

$$\underset{x \to a}{\text{Lt}}\ x^n = \underset{h \to 0}{\text{Lt}}\ (a+h)^n$$

(i) $n$ যদি অখণ্ড ধনসংখ্যা হয়, তবে

$$\underset{x \to a}{\text{Lt}}\ x^n = \underset{h \to 0}{\text{Lt}}\ (a+h)^n$$

$$= \underset{h \to 0}{\text{Lt}}\ (a^n + na^{n-1}h + \cdots + nah^{n-1} + h^n),$$

[ দ্বিপদ উপপাদ্য অনুসারে ]

$= a^n$, [ $h \to 0$ বলিয়া $h$ সম্বলিত পদসমূহ নগণ্য পরিমাণ এবং সেই কারণে তাহাদের বর্জন করিয়া ]

(ii) অনুরূপে $n$ যদি অখণ্ড ঋণসংখ্যা হয়, তবে $n = -m$, যেখানে $m$ একটি অখণ্ড ধনসংখ্যা এবং $a \neq 0$ ; সেক্ষেত্রে

$$\underset{x \to a}{\text{Lt}}\ x^n = \underset{x \to a}{\text{Lt}}\ x^{-m} = \underset{h \to 0}{\text{Lt}}\ (a+h)^{-m}$$

∴ দ্বিপদ উপপাদ্য অনুসারে

$\underset{h \to 0}{\text{Lt}}\ (a+h)^{-m}$

$$=\underset{h\to 0}{\text{Lt}}\left\{a^{-m}+(-m)a^{-m-1}h+\frac{(-m)(-m-1)}{\underline{|2}}a^{-m-2}h^2+\cdots\right\}$$

$=a^{-m}$, [ $h$-সম্বলিত পদসমূহ বর্জন করিয়া ]

$=a^n$

$\therefore$ $n$ অখণ্ড সংখ্যা হইলে,

$$\underset{n\to a}{\text{Lt}}\ x^n=a^n.$$

(b) $\underset{x\to a}{\text{Lt}}\ \dfrac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}$

যেহেতু $\dfrac{x^n-a^n}{x-a}=x^{n-1}+ax^{n-2}+\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1}$,

[ প্রত্যক্ষ ভাগ প্রক্রিয়া দ্বারা ]

সেইহেতু, $\underset{x\to a}{\text{Lt}}\ \dfrac{x^n-a^n}{n-a}=\underset{n\to a}{\text{Lt}}\ x^{n-1}+\underset{x\to a}{\text{Lt}}\ ax^{n-2}+\cdots+\underset{x\to a}{\text{Lt}}\ a^{n-2}x+a^{n-1}$

$=a^{n-1}+a.a^{n-2}+\cdots+a^{n-2}.a+a^{n-1}$,

[ $\because$ $\underset{x\to n}{\text{Lt}}\ x^n=a^n$, $\therefore$ $n$-এর স্থলে $(n-1)$, $(n-2)$ প্রভৃতি বসাইয়া ]

$=a^{n-1}+a^{n-1}+\cdots+a^{n-1}+a^{n-1}$

$=n.\,a^{n-1}$, [ $\because$ মোট পদসংখ্যা এখানে $n$ ]

$$\therefore\ \underset{x\to a}{\text{Lt}}\ \frac{x^n-a^n}{x-a}=n\,a^{n-1}.$$

(c) $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\ \dfrac{\sin x}{x}=1.$

এখন $s(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ ধরিয়া $[-\pi,\pi]$ ব্যাপ্তিতে $s$-এর লেখটি নিম্নরূপে অঙ্কন করা যাইতে পারে। $\pi=\frac{22}{7}=3{\cdot}142857$ ধরা হইল।

যখন $x=\pm\dfrac{\pi}{6}$, তখন $\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{\pm 6}\right)}{\pm\frac{\pi}{6}}=\dfrac{\pm\frac{1}{2}}{\pm\frac{\pi}{6}}=\dfrac{3}{\pi}={\cdot}75$

$$\text{যখন} \quad x=\pm\frac{\pi}{3}, \quad \text{তখন} \quad \frac{\sin x}{x}=\frac{\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)}{\pm\frac{\pi}{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}=\cdot 83$$

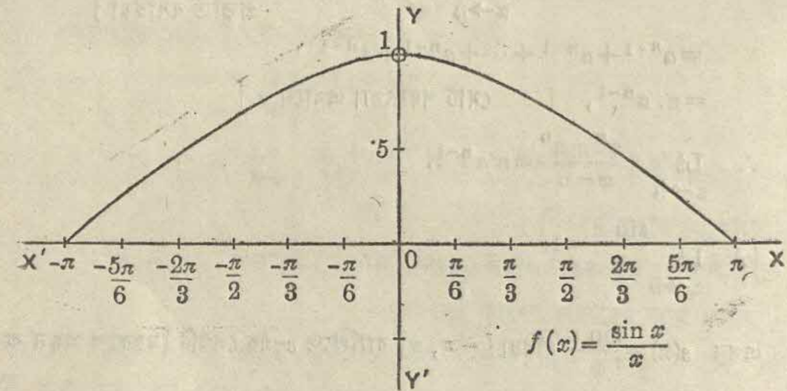
$$,, \quad x=\pm\frac{\pi}{3}, \quad ,, \quad ,, \quad =\frac{\sin\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)}{\pm\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}=\cdot 64$$

$$,, \quad x=\pm\frac{2\pi}{3}, \quad ,, \quad ,, \quad =\frac{\sin\left(\pm\frac{2\pi}{3}\right)}{\pm\frac{2\pi}{3}}=\frac{\pm\frac{\sqrt{3}}{2}}{\pm\frac{2\pi}{3}}$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}=\cdot 41$$

$$,, \quad x=\pm\pi, \quad ,, \quad ,, \quad =\frac{\sin(\pm\pi)}{\pm\pi}=\frac{0}{\pi}=0$$

কার্তেজীয় অক্ষতন্ত্রে $\left(\pm\frac{\pi}{6}, \cdot 75\right)$, $\left(\pm\frac{\pi}{3}, \cdot 83\right)$, $\left(\pm\frac{\pi}{2}, \cdot 64\right)$ $\left(\pm\frac{2\pi}{3}, \cdot 41\right)$ এবং $(\pm\pi, 0)$—এই দশটি বিন্দু স্থাপন করিয়া যুক্ত করিলে 34 নং চিত্রে প্রদর্শিত s-এর লেখটি পাওয়া যায়।




চিত্র নং—34

যেহেতু $\frac{\sin 0}{0}=\frac{0}{0}$ অনির্ণেয়, সেইহেতু s-এর ব্যাপ্তিতে 0 বিন্দুটি নাই। সেইজন্য চিত্র হইতে দেখা যায় (0, 1) বিন্দুতে s-এর লেখটি সন্ততিহীন

স্পষ্টতঃ $x$-এর মান ডানদিক বা বামদিক হইতে যখন 0-এর নিকটতম সান্নিধ্যে আসে তখন $s(x)$-এর মান 1-এর নিকটতম সান্নিধ্যে আসে।

$$\therefore \quad \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \; s(x) = 1$$

অর্থাৎ $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \; \dfrac{\sin x}{x} = 1.$

[ লক্ষ্যণীয় যে, $s(0)$ মানটি নাই বলিয়া এখানে $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \; s(x) \neq s(0)$ এবং সেই কারণে (0, 1) বিন্দুতে $s$-এর লেখটি সন্ততিচ্যুত। ]

(d) (i) $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \; \sin x = 0$ এবং (ii) $\underset{xt0}{\text{L}} \; \cos x = 1$

(i) $\sin x$-এর লেখ হইতে দেখা যায়, $x$-এর মান দুইদিক হইতে যতই 0-এর নিকটবর্তী হয়, $\sin x$-এর মান ততই 0-এর নিকটবর্তী হয়।

$$\therefore \quad \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \; \sin x = 0.$$

(ii) $\cos x$ লেখ হইতে দেখা যায়, দুইদিক হইতে $x$-এর মান যতই 0-এর নিকটবর্তী হয় $\cos x$-এর মান ততই 1-এর নিকটবর্তী হয়।

$$\therefore \quad \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \; \cos x = 1$$

(e) (i) $\underset{x \to a}{\text{Lt}} \; \sin x = \sin a$ এবং (ii) $\underset{x \to a}{\text{Lt}} \; \cos x = \cos a$

(i) $\underset{x \to a}{\text{Lt}} \; \sin x = \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \; \sin (a+h)$

$$= \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \; (\sin a \cos h + \cos a \sin h)$$

$$= (\sin a \,.\, 1 + \cos a \,.\, 0),$$

[ $\because$ $h \to 0$ হইলে $\sin h \to 0$ এবং $\cos h \to 1$. ]

$$= \sin a.$$

(ii) $\underset{x \to a}{\text{Lt}} \; \cos x = \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \; \cos (a+h)$

$$= \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \; (\cos a \cos h - \sin a \text{ sfn } h)$$

$$= (\cos a \,.\, 1 - \sin a \,.\, 0)$$

[ $\because$ $h \to 0$ হইলে $\cos h \to 1$ এবং $\sin h \to 0$]

$$= \cos a.$$

বিঃ দ্রষ্টব্য : (i) ও (ii)-এর সাহায্যে অনায়াসে $\underset{x\to a}{\text{Lt}}\ \sec x$, $\underset{x\to a}{\text{Lt}}\ \text{cosec}\, x$, $\underset{x\to a}{\text{Lt}}\ \tan x$ এবং $\underset{x\to a}{\text{Lt}}\ \cot x$-এর মান নির্ণয় করা যায়।

## উদাহরণমালা

উদা. 1. $f(x)=2x-3$ হইলে দেখাও যে $\underset{x\to 2}{\text{Lt}}\ f(x)=1$

$h$ যেন একটি নগণ্য পরিমাণ ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র সংখ্যা।

$$\therefore \underset{x\to 2}{\text{Lt}}\ f(x)=\underset{x\to 2}{\text{Lt}}\ (2x-3)=\underset{h\to 0}{\text{Lt}}\ \{2(2+h)-3\}$$

$$=\underset{h\to 0}{\text{Lt}}\ (4+2h-3)=\underset{h\to 0}{\text{Lt}}\ (1+2h)=1$$

উদা. 2. $f(x)=\dfrac{1+x}{1-|x|}$ হইলে, $\underset{x\to -1}{\text{Lt}}\ f(x)$-এর মান নির্ণয় কর।

$x<0$ হইলে $|x|=-x$ হয়।

$$\therefore \underset{x\to -1}{\text{Lt}}\ f(x)=\underset{x\to -1}{\text{Lt}}\ =\frac{1+x}{1-(-x)}=\frac{1+x}{1+x}=1$$

উদা. 3. $g(x)=\tan x+|\tan x|$ হইলে $\underset{x\to 2}{\text{Lt}}\ g(x)$-এর মান নির্ণয় কর।

$$\pi=3\cdot1428\cdots \quad \text{বলিয়া} \quad \frac{\pi}{2}=1\cdot57\cdots$$

$\therefore\ x>\dfrac{\pi}{2}$ যখন $x\to 2$ ; সেই কারণে $x$ এখানে দ্বিতীয় পাদস্থ কোণ সূচিত করে। যেহেতু দ্বিতীয় পাদের কোণের tangent সর্বদা ঋণাত্মক, সেইহেতু এক্ষেত্রে $\tan x<0$.

$$\therefore\ |\tan x|=-\tan x.$$

$$\therefore \underset{x\to 2}{\text{Lt}}\ g(x)=\underset{x\to 2}{\text{Lt}}\ (\tan x+|\tan x|)$$

$$=\underset{x\to 2}{\text{Lt}}\ (\tan x-\tan x)$$

$$=0.$$

উদা. 4. $S(x)=\dfrac{2x^2-x-1}{x-1}$ হইলে, $S$ উহার ব্যাপ্তিগত মান $x=2$-এর জন্য সন্তত কিনা বিচার কর।

$$\underset{x\to 2}{\text{Lt}}\ S(x)=\underset{x\to 2}{\text{Lt}}\ \frac{2x^2-x-1}{x-1}=\underset{x\to 2}{\text{Lt}}\ \frac{(x-1)(2x+1)}{x-1}$$

$$=\underset{x\to 2}{\text{Lt}}\ (2x+1), \qquad [\text{ যেহেতু } x\neq 1 ]$$

$$=\underset{h\to 0}{\text{Lt}}\ 2(2+h)+1\}$$

$$=\underset{h\to 0}{\text{Lt}}\ (5+2h)=5.$$

এবং $S(2)=\dfrac{2.2^2-2-1}{2-1}=\dfrac{8-3}{1}=5$

$\therefore \underset{x\to 2}{\text{Lt}}\ S(x)=S(2)$ এবং সেই কারণে $x=2$-এর জন্য $S$ সন্তত।

উদা. 5. $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ হইলে $x=0$-এর জন্য $f$ সন্তত হইবে কি ?

$x=0$-এর জন্য $f$ সন্তত হইলে $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\ f(x)=f(0)$ হইবে।

এক্ষেত্রে বামদিক হইতে $x\to 0$ হইলে $x<0$ এবং তখন $|x|=-x$.

$\therefore$ বামদিক হইতে $x\to 0$ হইলে

$$\underset{x\to 0-0}{\text{Lt}}\ f(x)=\underset{x\to 0-0}{\text{Lt}}\ \frac{|x|}{x}=\frac{-x}{x}=-1$$

আবার ডানদিক হইতে $x\to 0$ হইতে $x>0$ এবং তখন $|x|=x$ বলিয়া

$$\underset{x\to 0+0}{\text{Lt}}\ f(x)=\underset{x\to 0+0}{\text{Lt}}\ \frac{|x|}{x}=\underset{x\to 0+0}{\text{Lt}}\ \frac{x}{x}=1$$

$\therefore$ এক্ষেত্রে বামদিকের সীমান্তমান ও ডানদিকের সীমান্তমান এক নহে। সেই কারণে $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\ f(x)$-এর অস্তিত্ব নাই। কাজেই $x=0$-এর জন্য $f$ সন্তত নহে।

উদা. 6. মান নির্ণয় কর : $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\ \dfrac{x}{\sin^{-1}x}$

ধরা যাক্, $\sin^{-1}x=\theta$ ; তাহা হইলে $\sin\ \theta=x$ এবং $x\to 0$ হইলে অবশ্যই $\theta\to 0$ হইবে।

$$\therefore \operatorname*{Lt}_{x\to 0} \frac{x}{\sin^{-1}x}=\operatorname*{Lt}_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta}=1.$$

উদা. 7. মান নির্ণয় কর : $\operatorname*{Lt}_{x\to 0} \dfrac{1}{x\ \mathrm{cosec}^{-1}x}$

$\mathrm{cosec}^{-1}x=\theta$ ধরিলে, $\mathrm{cosec}\ \theta=x$

অর্থাৎ $\dfrac{1}{\sin\ \theta}=x.$

$$\therefore \operatorname*{Lt}_{x\to 0} \frac{1}{x\ \mathrm{cosec}^{-1}x}=\operatorname*{Lt}_{\theta\to 0} \frac{1}{\frac{1}{\sin\theta}.\ \theta}=\operatorname*{Lt}_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta}=1.$$

উদা. 8. $\operatorname*{Lt}_{h\to 0} \sqrt{x}\left(\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\right)$-এর মান নির্ণয় কর।

$$\operatorname*{Lt}_{h\to 0} \frac{\sqrt{x}\ (\sqrt{x+h}-\sqrt{x})}{h}$$

$$=\operatorname*{Lt}_{h\to 0} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})}{h}\times\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

$$=\operatorname*{Lt}_{h\to 0} \frac{\sqrt{x}(x+h-x)}{h(\sqrt{x+h})+\sqrt{x})}$$

$$=\operatorname*{Lt}_{h\to 0} \frac{\sqrt{x}\ .\ h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$=\operatorname*{Lt}_{h\to 0} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

$$=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}=\tfrac{1}{2}.$$

## প্রশ্নমালা 5

1. $f(x)=\dfrac{5x-1}{2}$ হইলে নিম্নলিখিত সীমাস্তমানগুলি নির্ণয় কর :

(i) $\operatorname*{Lt}_{x\to 0} f(x)$ ; (ii) $\operatorname*{Lt}_{x\to 1} f(x)$ ; (iii) $\operatorname*{Lt}_{x\to \frac{2}{5}} f(x)$.

2. $g(x)=\sin x$ হইলে $\underset{x\to\frac{\pi}{6}}{\text{Lt}}\, g(x)=$ কত ?

3. $S(x)=\cos\pi x$ হইলে $\underset{x\to\frac{1}{3}}{\text{Lt}}\, S(x)$-এর মান কত ?

4. $u(x)=\dfrac{4x^2-9}{2x-3}$ হইলে $\underset{x\to\frac{3}{2}}{\text{Lt}}\, u(x)=$ কত ?

5. $P(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$ হইলে $\underset{x\to 2}{\text{Lt}}\, P(x)$-এর মান নির্ণয় কর

6. $v(x)=\dfrac{x-a}{x^2-a^2}$ হইলে $\underset{x\to a}{\text{Lt}}\, v(x)$-এর মান কত ?

7. $f(x)=\dfrac{1+|x|}{1-x}$ হইলে $\underset{x\to -\frac{1}{2}}{\text{Lt}}\, f(x)=$ কত ?

8. $f(x)=\dfrac{|2-x|}{2+x}$ ; $\underset{x\to 2}{\text{Lt}}\, f(x)$-এর মান নির্ণয় কর।

9. $Q(x)=\sin(x+|x|)$ ; $\underset{x\to -1}{\text{Lt}}\, Q(x)=$ কত ?

10. $\underset{x\to 5}{\text{Lt}}\,(\sin x+|\sin x|)=$ কত ?

11. $f(x)=\dfrac{1}{x}$-এর লেখ অঙ্কন করিয়া কোন্ বিন্দুতে উহা সন্ততিচ্যুত তাহা নির্ণয় কর।

12. দেখাও যে, সরলরেখার সমীকরণসূচিত অর্থাৎ রৈখিক অপেক্ষক (linear function) মাত্রই উহার ব্যাপ্তিভুক্ত প্রত্যেকটি মানের জন্য সন্তত।

[সংকেত : $f(x)=mx+c$ ধরিয়া দেখাও যে, $\underset{x\to a}{\text{Lt}}\, f(x)=ma+c$ এবং $f(a)=ma+c$ ; ইত্যাদি ]

13. কোন্ বিন্দুতে এবং কেন

(i) 4 নম্বর প্রশ্নের $u$ ;

(ii) 5 নম্বর প্রশ্নের $P$ ;

এবং (iii) 6 নম্বর প্রশ্নের $v$ সন্ততিচ্যুত ?

14. দেখাও যে $f(x)=x+|x|$ হইলে $x=0$-এর জন্য $f$ সন্তত।

**15.** প্রমাণ কর যে, বাস্তবসংখ্যার ব্যাপ্তিতে

(i) $f(x)=c$ আকারের প্রত্যেক ধ্রুবক অপেক্ষক

এবং (ii) $f(x)=x$ আকারের অভেদ অপেক্ষক সন্তত।

**16.** দেখাও যে,

(i) $\underset{x\to 1}{\text{Lt}}\ 3x-1=2$ ; (ii) $\underset{x\to \frac{1}{2}}{\text{Lt}}\ (2x+3)=4$ ;

(iii) $\underset{x\to b}{\text{Lt}}\ (ax+c)=ab+c$ ;

(iv) $\underset{h\to 0}{\text{Lt}}\ \dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}=3x^2$ ;

(v) $\underset{h\to 0}{\text{Lt}}\ \dfrac{(x+h)^n-x^n}{h}=nx^{n-1}$.

**17.** মান নির্ণয় কর :

(i) $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\ \tan x$ ; (ii) $\underset{x\to a}{\text{Lt}}\ \sec x$ ; (iii) $\underset{x\to \infty}{\text{Lt}}\ \operatorname{cosec} x$ ;

(iv) $\underset{x\to \frac{\pi}{6}}{\text{Lt}}\ \sin x$ ; (v) $\underset{x\to \frac{\pi}{3}}{\text{Lt}}\ \sin x$ ; (vi) $\underset{x\to \frac{\pi}{4}}{\text{Lt}}\ \cos x$ ;

(vii) $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\ \cos x$ ; (viii) $\underset{x\to \pi}{\text{Lt}}\ \tan x$ ;

(ix) $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\ \dfrac{\sin 2x}{2x\cos x}$ ;

(x) $\underset{\theta\to 0}{\text{Lt}}\ \dfrac{\sin \theta^\circ}{\pi\theta/180}$ ; [ সংকেত : $\theta^\circ=\dfrac{\pi\theta}{180}$ রেডিয়ান এবং যখন $\theta\to 0$ তখন $\dfrac{\pi\theta}{180}\to 0$ ; ইত্যাদি। ]

**18.** $f(x)=|x|$ হইলে দেখাও যে, $x=0$-এর জন্য $f$ সন্তত নহে।

**19.** $g(x)=\dfrac{x}{|x|}$ হইলে দেখাও যে, $x=0$-এর জন্য $g$ সন্তত নহে।

**20.** $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\ \dfrac{\sqrt{a}}{x}(\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x})$-এর মান নির্ণয় কর।

[ সংকেত : উদা 8-এর প্রণালী অবলম্বন কর ]

### 3·6. কয়েকটি আদর্শ সীমান্তমান (A few standard limits) :

এই অনুচ্ছেদে যে কয়টি সীমান্তমান দেওয়া যাইতেছে তাহাদের যথারীতি প্রমাণ করা হইল না। উচ্চতর স্তরে এইগুলিকে প্রমাণ করা হইবে। আপাতত ইহাদের স্বীকৃত সূত্র হিসাবে প্রয়োগ করিতে হইবে।

(i) $\underset{x \to a}{\text{Lt}}\ e^x = e^a$ ;  (ii) $\underset{x \to a}{\text{Lt}}\ \log x = \log a$ ;

(iii) $\underset{x \to 0}{\text{Lt}}\ (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ ;

(iv) $\underset{x \to 0}{\text{Lt}}\ \dfrac{\log_e(1+x)}{x} = 1$ ;

v) $\underset{x \to 0}{\text{Lt}}\ \dfrac{e^x - 1}{1} = 1$

(vi) $\underset{x \to 0}{\text{Lt}}\ x \sin\dfrac{1}{x} = 0$ ;

(vii) $\underset{x \to 0}{\text{Lt}}\ x \cos\dfrac{1}{x} = 0.$



### 3·7. সীমান্তমান সম্পর্কিত মৌলিক উপপাদ্য-সমূহ (Fundamental limit theorems) :

$f$ ও $g$ যদি এমন দুইটি অপেক্ষক হয় যে,

$\underset{x \to a}{\text{Lt}}\ f(x) = m$ এবং $\underset{x \to a}{\text{Lt}}\ g(x) = n$

তবে (i) $\underset{x \to a}{\text{Lt}}\ [f(x) \pm g(x)] = \underset{x \to a}{\text{Lt}}\ f(x) \pm \underset{x \to a}{\text{Lt}}\ g(x) = m \pm n$

অর্থাৎ, দুইটি অপেক্ষকের সমষ্টি বা অন্তরের সীমান্তমান, অপেক্ষক দুইটির সীমান্তমানের সমষ্টি বা অন্তরের সমান হয়।

(ii) $\underset{x \to a}{\text{Lt}}\ [f(x).g(x)] = \underset{x \to a}{\text{Lt}}\ f(x).\ \underset{x \to a}{\text{Lt}}\ g(x) = m.n.$

অর্থাৎ, দুইটি অপেক্ষকের গুণফলের সীমান্তমান, অপেক্ষক দুইটির সীমান্তমানের গুণফলের সমান।

(iii) $c$ একটি ধ্রুবক সংখ্যা হইলে,

$$\underset{x\to a}{\mathrm{Lt}}\ cf(x)=c\ \underset{x\to a}{\mathrm{Lt}}\ f(x)=cm.$$

অর্থাৎ, একটি ধ্রুবক সংখ্যা দ্বারা গুণিত একটি অপেক্ষকের সীমান্তমান ঐ ধ্রুবকসংখ্যা ও ঐ অপেক্ষকটির সীমান্তমানের গুণফলের সমান।

(iv) $\underset{x\to a}{\mathrm{Lt}}\ g(x)=n\neq 0$ হইলে,

$$\underset{x\to a}{\mathrm{Lt}}\ [f(x)\div g(x)]=\ \underset{x\to a}{\mathrm{Lt}}\ f(x)\div\ \underset{x\to a}{\mathrm{Lt}}\ g(x)=\frac{m}{n}.$$

অর্থাৎ, ভাজক অপেক্ষকটির সীমান্তমান শূন্য না হইলে, দুইটি অপেক্ষকের ভাগফলের সীমান্তমান ঐ অপেক্ষক দুইটির সীমান্তমানের ভাগফলের সমান।

(v) যদি $L$ বিন্দুতে $g$ সন্তত এবং $\underset{x\to a}{\mathrm{Lt}}\ f(x)=L$ হয়,

তবে, $\underset{x\to a}{\mathrm{Lt}}\ g[f(x)]=g(L)$

অর্থাৎ, $\underset{x\to a}{\mathrm{Lt}}\ g[f(x)]=g[\ \underset{x\to a}{\mathrm{Lt}}\ f(x)]$, $\quad [\because\ \underset{x\to a}{\mathrm{Lt}}\ f(x)=L]$

অর্থাৎ, একটি অপেক্ষকের f দ্বারা গঠিত g অপেক্ষকের প্রসারভুক্ত g[f(x)]-এর সীমান্তমান, g-এর অধীন f[(x)-এর সীমান্তমানের সমান।

বলা বাহুল্য, এই উপপাদ্যটি অপেক্ষকের অপেক্ষকের সীমান্তমান নির্দেশ করে।

(i) হইতে (iv) পর্যন্ত উল্লিখিত উপপাদ্যসমূহের যথাবিহিত প্রমাণ উচ্চ মাধ্যমিক স্তরের পাঠ্যক্রম বহির্ভূত। এইগুলিকে তাই এইস্তরে স্বীকৃত তথ্য হিসাবে গ্রহণ করিতে হইবে।

পরবর্তী উদাহরণমালায় 3·6 এবং 3·7-এর তথ্য সমূহের প্রয়োগ প্রদর্শিত হইতেছে।

**3·8. অনন্তমান (Infinity) :**

$\infty$ সংকেত দ্বারা অনন্তমান সূচিত হয়। কিন্তু অনন্তমান বলিতে কোন সংখ্যা নাই। কাজেই $x\to\infty$ বলিতে কোন অনন্তগামী সংখ্যা বুঝাইতে পারে না। $x\to\infty$ দ্বারা তাই "$x$-এর মান অনন্ত"—এইরূপ বুঝায়। কিন্তু যেহেতু "অনন্তমান" বলিয়া কোন সংখ্যা নাই, সেইহেতু $x\to\infty$ বলিলে বুঝিতে হইবে যে, $N$ যত বড় সংখ্যাই

হউক না কেন সর্বদা $x>N$. এই অর্থে $x$-এর মান যখন অনন্ত হয় অর্থাৎ $x\to\infty$ হয়, তখন $f(x)$ যদি একটি নির্দিষ্ট মান $A$-র প্রায় সমান হয় তবে লেখা যায়,

$$\underset{x\to\infty}{\text{Lt}}\ f(x)=A$$

অনন্তমান সংক্রান্ত নিম্নলিখিত সীমান্তমানগুলি সচরাচর ব্যবহৃত হয়।

(i) $\underset{x\to\infty}{\text{Lt}}\ \frac{c}{x}=0$ ; (ii) $\underset{x\to\infty}{\text{Lt}}\ cx=\infty$ ;

(iii) $\underset{x\to\infty}{\text{Lt}}\ \frac{x}{c}=\infty$ ;

**3·9. বহুপদ ও মূলদ অপেক্ষকের সীমান্তমান ও সন্ততি (Limit and continuity of polynomial and rational functions) :**

(a) একটি বহুপদ অপেক্ষক $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0$ হইলে,

$$\underset{x\to c}{\text{Lt}}\ f(x)=\underset{x\to c}{\text{Lt}}\ (a\ x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0)$$

$$=\underset{x\to c}{\text{Lt}}\ a\ x^n+\underset{x\to c}{\text{Lt}}\ a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+\underset{x\to c}{\text{Lt}}\ a_1x+\underset{x\to c}{\text{Lt}}\ a_0$$

$$=a\ \underset{x\to c}{\text{Lt}}\ x^n+a_{n-1}\ \underset{x\to c}{\text{Lt}}\ x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1\ \underset{x\to c}{\text{Lt}}\ x+a_0$$

$=a_n(\underset{x\to c}{\text{Lt}}\ x.\ \underset{x\to c}{\text{Lt}}\ x\cdots\cdots n$ সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত )

$+a_{n-1}\{\underset{x\to c}{\text{Lt}}\ x.\ \underset{x\to c}{\text{Lt}}\ x\cdots\cdots(n-1)$ সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত }

$+\cdots\cdots+a_1c+a_0$

$=a_n(c.c.c\cdots\cdots n$ সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত$)+a_{n-1}(c.c\cdots\cdots(n-1)$ সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত $)+\cdots\cdots a_1c+a_0$

$$=a_nc^n+a_{n-1}c^{n-1}+\cdots\cdots a_1c+a_0$$

আবার $f(c)=a_nc^n+a_{n-1}c^{n-1}+\cdots\cdots a_1c+a_0$

$\therefore\ \underset{x\to c}{\text{Lt}}\ f(x)=f(c)$ বলিয়া $x=c$-এর জন্য বহুপদ অপেক্ষক $f$ সর্বদা সন্তত।

বলাবাহুল্য $c$ মানটি $f$-এর ব্যাপ্তিভুক্ত যে-কোন মান হইতে পারে।

(b) $f(x)$ ও $g(x)$ দুইটি বহুপদ অপেক্ষক হইলে, $P(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ সংজ্ঞায় $P$ একটি মূলদ অপেক্ষক।

স্পষ্টতঃ, $\underset{x\to c}{\text{Lt}}\ g(x)\neq 0$ হইলে,

$$\underset{x\to c}{\text{Lt}}\ P(x)=\underset{x\to c}{\text{Lt}}\ \frac{f(x)}{g(x)}=\underset{x\to c}{\text{Lt}}\ f(x)\div\underset{x\to c}{\text{Lt}}\ g(x)=f(c)\div g(c)$$

আবার, $P(c)=f(c)\div g(c)$

$\therefore$ $g(c)=0$ ছাড়া $c$-এর অন্যসকল মানের জন্য $P$ সন্তত।

## উদাহরণমালা

**উদা. 1.** প্রাসঙ্গিক মৌলিক উপপাদ্যের প্রয়োগ দেখাইয়া সীমান্তমান নির্ণয় কর:

$$\underset{x\to 1}{\text{Lt}}\ \frac{x^3-3x+4}{x^2-2x+3}.$$

$$\underset{x\to 1}{\text{Lt}}\ \frac{x^3-3x+4}{x^2-2x+3}=\frac{\underset{x\to 1}{\text{Lt}}\ x.\ \underset{x\to 1}{\text{Lt}}\ x.\ \underset{x\to 1}{\text{Lt}}\ x-\underset{x\to 1}{\text{Lt}}\ (3x-4)}{\underset{x\to 1}{\text{Lt}}\ x.\ \underset{x\to 1}{\text{Lt}}\ x-\underset{x\to 1}{\text{Lt}}\ (2x-3)}$$

$$=\frac{1.1.1-(3.1-4)}{1.1-(2.1-3)}=\frac{1-3+4}{1-2+3}=\frac{2}{2}=1.$$

**উদা. 2.** মান নির্ণয় কর: $\underset{x\to -1}{\text{Lt}}\ \dfrac{x^2+5x+4}{x^2+3x+2}$

$$\underset{x\to -1}{\text{Lt}}\ \frac{x^2+5x+4}{x^2+3x+2}=\underset{x\to -1}{\text{Lt}}\ \frac{(x+4)(x+1)}{(x+2)(x+1)}$$

$$=\underset{x\to -1}{\text{Lt}}\ \frac{x+4}{x+2},\ [\text{যেহেতু } x+1\neq 0]=\frac{\underset{x\to -1}{\text{Lt}}\ (x+4)}{\underset{x\to -1}{\text{Lt}}\ (x+2)}=\frac{-1+4}{-1+2}=3.$$

**উদা. 3.** মান নির্ণয় কর: $\underset{x\to\infty}{\text{Lt}}\ \dfrac{4x^3+7x+5}{5x^3+3x^2-7x}$

$$\underset{x\to\infty}{\text{Lt}}\ \frac{4x^3+7x+5}{5x^3+3x-7x}=\underset{x\to\infty}{\text{Lt}}\ \frac{4+\frac{7}{x^2}+\frac{5}{x^3}}{5+\frac{3}{x}-\frac{7}{x^2}},$$ [লব ও হরকে $x^3$ দ্বারা ভাগ করিয়া]

$$=\frac{4+\underset{x\to\infty}{\mathrm{Lt}}\frac{7}{x^2}+\underset{x\to\infty}{\mathrm{Lt}}\frac{5}{x^3}}{5+\underset{x\to\infty}{\mathrm{Lt}}\frac{3}{x}-\underset{x\to\infty}{\mathrm{Lt}}\frac{7}{x^2}}$$

$$=\frac{4+0+0}{5+0-0}=\frac{4}{5}.$$

উদা. 4. $\underset{x\to 0}{\mathrm{Lt}}\ \frac{\sin^{-1}x}{x}$-এর মান নির্ণয় কর।

$\sin^{-1}x=\theta$ ধরিলে $\sin\theta=x$.

$\therefore$ $x\to 0$ হইলে $\sin\theta\to 0$ অর্থাৎ $\theta\to 0$.

$$\therefore\ \underset{x\to 0}{\mathrm{Lt}}\ \frac{\sin^{-1}x}{x}=\underset{\theta\to 0}{\mathrm{Lt}}\ \frac{\theta}{\sin\theta}$$

$$=\underset{\theta\to 0}{\mathrm{Lt}}\ \frac{1}{\frac{\sin\theta}{\theta}}=\frac{1}{\underset{\theta\to 0}{\mathrm{Lt}}\ \frac{\sin\theta}{\theta}}$$

$$=\frac{1}{1}=1.$$

উদা. 5. $\underset{x\to 0}{\mathrm{Lt}}\ (1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\underset{x\to 0}{\mathrm{Lt}}\ \frac{1}{x}\log_e(1+x)=1$$

$\underset{x\to 0}{\mathrm{Lt}}\ (1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ হইলে

$$\underset{x\to 0}{\mathrm{Lt}}\ \frac{1}{x}\log_e(1+x)=\underset{x\to 0}{\mathrm{Lt}}\ \log_e(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_e\left\{\underset{x\to 0}{\mathrm{Lt}}\ (1+x)^{\frac{1}{x}}\right\}$$

$$=\log_e e=1$$

উদা. 6. $\underset{x\to 0}{\mathrm{Lt}}\ \frac{1}{x}\log_e(1+x)=1$ হইলে দেখাও যে,

$$\underset{x\to 0}{\mathrm{Lt}}\ \frac{e^x-1}{x}=1$$

$e^x=1+z$ ধরিলে

যখন $x \to 0$ তখন $z \to 0$ ;

এবং $x = \log_e (1+z)$

$$\therefore \operatorname*{Lt}_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \operatorname*{Lt}_{z\to 0} \frac{1+z-1}{\log_e(1+z)} = \operatorname*{Lt}_{z\to 0} \frac{z}{\log_e(1+z)}$$

$$= \frac{1}{\operatorname*{Lt}_{z\to 0} \frac{\log_e(1+z)}{z}} = \frac{1}{1} = 1.$$

উদা. 7. দেখাও যে, $\operatorname*{Lt}_{x\to 0} \log_e \frac{(1-\cos^2 x)}{x^2} = 0$

$$\operatorname*{Lt}_{x\to 0} \log_e \frac{(1-\cos^2 x)}{x^2} = \log_e \left\{ \operatorname*{Lt}_{x\to 0} \frac{(1-\cos^2 x)}{x^2} \right\}$$

$$= \log \left\{ \operatorname*{Lt}_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \right\}$$

$$= \log_e \left( \operatorname*{Lt}_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \right)^2$$

$$= \log_e 1^2 = \log_e 1 = 0.$$

উদা. 8. $f(x) = (1+2x)^{\frac{1}{x}}$ যখন $x \neq 0$ এবং $f(0) = e^2$ হইলে দেখাও যে, $x = 0$-এর জন্য $f$ সন্তত।

$$\operatorname*{Lt}_{x\to 0} f(x) = \operatorname*{Lt}_{x\to 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}}$$

$$= \operatorname*{Lt}_{x\to 0} \left\{ (1+2x)^{\frac{1}{2x}} \right\}^2$$

$$= \left\{ \operatorname*{Lt}_{x\to 0} (1+2x)^{\frac{1}{2x}} \right\}^2$$

$$= e^2$$

$$\therefore \operatorname*{Lt}_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

$\therefore$ $x = 0$-এর জন্য $f$ সন্তত।

উদা. 9. $f(x)=\cos x$ এবং $g(x)=2^x$ হইলে $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\, g\{f(x)\}$-এর মান নির্ণয় কর।

$$\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\; g\{f(x)\}=g\{\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\; f(x)\}$$

$$=g\{\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\; \cos x\}$$

$$=g(1)$$

কিন্তু $g(x)=2$ ; $\therefore\; g(1)=2^1=2. \quad \therefore \underset{x\to 0}{\text{Lt}}\, g\{f(x)\}=2.$

উদা. 10. $\underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\text{Lt}}\; \sin[[x]]$ এবং $\underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\text{Lt}}\; [[\sin x]]$-এর মান নির্ণয় কর।

$$\underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\text{Lt}}\sin[[x]]=\sin\left[\left[\frac{\pi}{2}\right]\right]=\sin[[1\cdot57]]$$

$$=\sin 1.$$

কিন্তু $\underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\text{Lt}}\; [[\sin x]]=\left[\left[\sin\frac{\pi}{2}\right]\right]=[[1]]=1.$

## প্রশ্নমালা 6

1. সীমান্তমান সংক্রান্ত মৌলিক উপপাদ্যের প্রয়োগ করিয়া নিম্নলিখিত সীমান্ত মানগুলি নির্ণয় কর :

(i) $\underset{x\to 1}{\text{Lt}}\; (x^2-3x+4)$ ; (ii) $\underset{x\to -1}{\text{Lt}}\; (x^3-5x-2)$ ;

(iii) $\underset{x\to 3}{\text{Lt}}\; (x+2)(x-1)$ ; (iv) $\underset{x\to -1}{\text{Lt}}\; \dfrac{x^3-1}{(x-1)(x+2)}$ ;

(v) $\underset{x\to\frac{1}{3}}{\text{Lt}}\; \dfrac{x^2+1}{x+1}$.

2. মান নির্ণয় কর :

(i) $\underset{x\to 3}{\text{Lt}}\; \dfrac{x^3-3x^2-x+3}{x+3}$ ; (ii) $\underset{x\to 3}{\text{Lt}}\; \dfrac{x^2-x-6}{x^2+x-12}$ ;

(iii) $\underset{x \to -1}{\text{Lt}} \dfrac{x+1}{x^3+1}$; (iv) $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{(x+a)^2 - a^2}{x}$;

(v) $\underset{x \to 5}{\text{Lt}} \dfrac{2x^2 - 50}{x - 5}$.

3. নিম্নলিখিত প্রত্যেকটি সীমান্তমান নির্ণয় কর :

(i) $\underset{x \to \infty}{\text{Lt}} \dfrac{3x+1}{6x-5}$; (ii) $\underset{x \to \infty}{\text{Lt}} \dfrac{4x^2+3x+2}{2x^2-5}$;

(iii) $\underset{x \to \infty}{\text{Lt}} \dfrac{3x^3+5x^2+7x-1}{x^3-4x^2+7}$.

4. দেখাও যে,

(i) $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{x}{\cot x} = 1$; (ii) $\underset{\theta \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{1-\cos\theta}{\theta} = \dfrac{1}{2}$;

(iii) $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{\sin bx}{\sin cx} = \dfrac{b}{c}$.

[ সংকেত : $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{\sin bx}{\sin cx} = \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \left( \dfrac{\sin bx}{bx} \times bx \Big/ \dfrac{\sin cx}{cx} \times cx \right)$

$= \dfrac{b}{c} \left\{ \underset{bx \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{\sin bx}{bx} \Big/ \underset{cx \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{\sin cx}{cx} \right\}$ ; ইত্যাদি ]

(iv) $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{\cot^{-1} x}{x} = 1$;

5. প্রমাণ কর যে,

(i) $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \log\left(\dfrac{\sin x}{x}\right) = 0$; (ii) $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \log(x \cot x) = 0$.

(iii) $\underset{x \to e^2}{\text{Lt}} \cos(\pi \log x) = 1$; (iv) $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{\log(1+\sin x)}{\sin x} = 1$.

(v) $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{x}{\log(1+x)} = 1$.

6. $\underset{x\to 0}{\text{Lt}} (1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ হইলে দেখাও যে,

(i) $\underset{z\to\infty}{\text{Lt}} \left(1+\frac{1}{z}\right)^z=e$ ; (ii) $\underset{z\to\infty}{\text{Lt}} z\log\left(1+\frac{1}{z}\right)=1$ ;

(iii) $\underset{z\to\infty}{\text{Lt}} z(e^{1/z}-1)=1.$

7. $f(x)=\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ যখন $x\neq 0$ এবং $f(0)=\sqrt{e}$ হইলে দেখাও যে, $x=0$-এর জন্য $f$ সন্তত।

8. $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\ g[f(x)]$-এর মান নির্ণয় কর, যখন

(i) $f(x)=\sin x$ এবং $g(x)=2^x$ ;

(ii) $f(x)=2^x$ এবং $g(x)=\sin x.$

9. $\underset{x\to\frac{\pi}{3}}{\text{Lt}} \tan[x]$ এবং $\underset{x\to\frac{\pi}{3}}{\text{Lt}} [\tan x]$-এর পার্থক্য দেখাও।

10. দেখাও যে, দুইটি রৈখিক অপেক্ষকের ( অর্থাৎ সরলরেখাসূচক সমীকরণদ্বারা প্রকাশিত অপেক্ষকের ) সমবায়ে গঠিত অপেক্ষকমাত্রই রৈখিক।

[ সংকেত : $f(x)=m_1x+c_1$ এবং $g(x)=m_2x+c_2$ হইলে

$g[f(x)]=m_2(m_1x+c_1)+c_2=m_1m_2x+m_1c_1+c_2=m_3x+c_3$

যেখানে $m_3=m_1m_2$ এবং $c_3=m_1c_1+c_2$ ইত্যাদি। ]

11. $f(x)=x^2$ এবং $g(x)=\sqrt{x}$ হইলে

$\underset{x\to 1}{\text{Lt}} f[g(x)]$ এবং $\underset{x\to 1}{\text{Lt}} g[f(x)]$-এর মান নির্ণয় কর।

12. $f(x)=\sin x$ এবং $g(x)=2x$ হইলে

$\underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\text{Lt}} f(g(x))$ এবং $\underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\text{Lt}} g(f(x))$-এর মান নির্ণয় কর।

# চতুর্থ অধ্যায়

## অপেক্ষকের অবকলনাঙ্ক ও উহার তাৎপর্য

## (Differential coefficient of a function and its significance)

### 4·1. তস্তুবক (Derivative) ঃ

বিশ্লেষণমূলক জ্যামিতিতে সরলরেখার নতি-সম্বন্ধে বিস্তৃত আলোচনা হইয়াছে। X-অক্ষের ধনাত্মকদিকের সহিত একটি সরলরেখা যে কোণ উৎপন্ন করে তাহার ট্যানজেন্ট (Tangent)-ই ঐ রেখার প্রবণতা বা নতি। বলা বাহুল্য যে সরলরেখার প্রত্যেকটি বিন্দুর নতি উহার অপর প্রত্যেকটি বিন্দুর নতির সমান। আবার একটি বক্ররেখার কোন একটি বিন্দুতে যদি একটি স্পর্শক বা tangent আঁকা সম্ভব হয়, তবে ঐ স্পর্শকটির নতিকেই ঐ বিন্দুতে বক্র রেখাটির নতি বলিয়া ধরা হইয়া থাকে এবং এই ভাবে বিভিন্ন বক্ররেখার বিভিন্ন বিন্দুতে নতি-নির্ণয়ের গবেষণা-প্রসঙ্গেই কলনগণিতের আবিষ্কার ঘটে।

ইতিপূর্বে অপেক্ষকের লেখ-সম্বন্ধে আলোচনা হইতে দেখা গিয়াছে যে, উহাদের কোনটি সরলরেখা, কোনটি আবার বক্ররেখা। যে-অপেক্ষকের লেখটি বক্র সেই অপেক্ষকের লেখস্থিত কোন একটি বিন্দুতে যদি একটি স্পর্শক আঁকা যায়, তবে উপরের আলোচনা অনুসারে, সেই স্পর্শকের নতিকেই উল্লিখিত বিন্দুতে অপেক্ষকটির নতি বলিয়া গণ্য করিতে হইবে। কিন্তু সব সময় সকল অপেক্ষকের সকল বিন্দুতেই এইরূপ স্পর্শক আঁকা যায় না। অপেক্ষক-বিশেষ যদি কোন বিন্দুতে সন্ততিচ্যুত হয়, তবে সেই বিন্দুতে উহার কোন স্পর্শক থাকিতে পারে না। সন্তত লেখ হইলেও উহার সূচ্যগ্র কোণের মত কোন কোন বিন্দুতে কোন স্পর্শক অঙ্কন করা যায় না। কাজেই আপাতত বক্র লেখ-বিশেষের যে-বিন্দুতে স্পর্শক অঙ্কন সম্ভব সেই বিন্দুতেই লেখটির নতি-নির্ণয়ের প্রশ্নটি বিচার করা যাইতেছে।

ধরা যাক, $f$ অপেক্ষকটির ব্যাপ্তিভুক্ত $x$ এবং প্রসারভুক্ত $f(x)$ মানদ্বারা সূচিত $(x, f(x))$ বিন্দুতে যেন একটি স্পর্শক আঁকা যায়। তাহা হইলে সেই স্পর্শকের নতিসূচক মানই হইবে ঐ বিন্দুতে $f$-এর নতি।

বলা বাহুল্য, $x$-এর বিভিন্ন মানের জন্য $(x, f(x))$ ও বিভিন্ন বিন্দু সূচিত করিবে। দ্বিতীয়তঃ, $x$-র এইরূপ প্রতিটি মান হইতে একটি এবং একটিই মাত্র নতিসূচক মান পাওয়া যাইবে। সুতরাং এই $x$-এর মান ও নতিসূচক মানের ঐকৈক সম্পর্কটি একটি

নূতন অপেক্ষক উৎপন্ন করিবে। এইভাবে $f$ হইতে উৎপন্ন নূতন অপেক্ষকটি যদি $f'$ হয়, তবে $f$-এর $(x, f(x))$ বিন্দুতে নতিসূচক মানটি হইবে $f'(x)$.

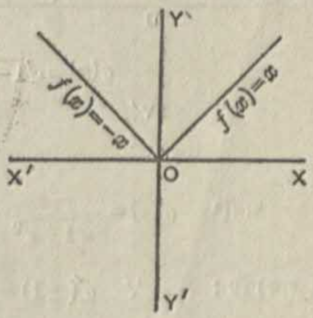
অতএব $f'$ অপেক্ষকটি যেমন $f$ অপেক্ষক হইতে উৎপন্ন, $f'(x)$ মানটিও তেমন $f(x)$ মান হইতে উৎপন্ন। সেই কারণে $f'(x)$-কে $f(x)$-এর তজ্জবক বা **Derivative** বলে।

[ তাহা ( অর্থাৎ $f(x)$) হইতে যাহার উৎপত্তি, এই অর্থে এখানে $f'(x)$ তজ্জবক। ]

তাহা হইলে, সযত্নে মনে রাখা প্রয়োজন যে জ্যামিতিক ধারণায় যাহা নতি কলনগণিতের ধারণায় তাহাই তজ্জবক।

দুইটি দৃষ্টান্ত দিয়া বিষয়টি স্পষ্টতর করা যাইতেছে।

(1) $f(x) = |x|$ সংজ্ঞায় বিবৃত $f$ অপেক্ষকটির লেখ 35 নং চিত্রে প্রদর্শিত।




চিত্র নং 35

যেহেতু, $x>0$ হইলে $|x| = x$ এবং $x<0$ হইলে $|x| = -x$,

সেইহেতু, $f(x)=x$ এবং $f(x)=-x$, এই দুইটির দুইটি লেখ লইয়া $f$-এর লেখটি দুইটি শাখা-সম্বলিত। ইহাদের প্রতিটি শাখা সরল রেখা বলিয়া $f$-এর প্রতিটি বিন্দুর নতি এবং উহার সংশ্লিষ্ট শাখার নতি এক ও অভিন্ন।

$\therefore$ $f$-এর উপর যে-কোন বিন্দু $(x, |x|)$-এর নতি $= \dfrac{\text{উহার কোটি}}{\text{উহার ভুজ}} = \dfrac{|x|}{x}$.

$\therefore \; f'(x) = \dfrac{|x|}{x}$, [ অর্থাৎ $\dfrac{x}{x}$ বা $\dfrac{x}{-x}$ অর্থাৎ $1$ বা $-1$ ]

$\therefore$ $f(x)$-এর তজ্জবক $f'(x) = \dfrac{|x|}{x}$.

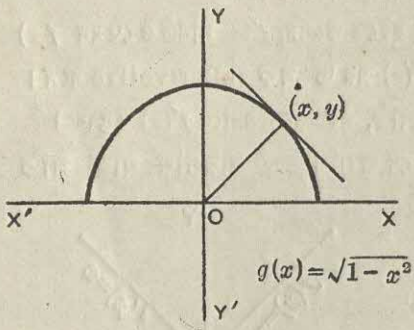
(2) $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ হইলে $g(x)$-এর স্থলে $y$ বসাইয়া দেখা যায় যে, $y = \sqrt{1-x^2}$ বা $y^2 = 1-x^2$ বা $x^2+y^2=1$ ; ইহা একটি বৃত্তের সমীকরণ।

কিন্তু $g$-এর ব্যাপ্তি $[-1, +1]$, কেননা $x$-এর মান $-1$ হইতে ছোট বা $1$ হইতে বড় হইলে $\sqrt{1-x^2}$ কাল্পনিক হইয়া পড়ে।

সুতরাং $g$-এর লেখটি $x$-অক্ষের উপরদিকে সীমাবদ্ধ এমন এক অর্ধবৃত্ত যাহার ব্যাসার্ধ $=1$ একক।

স্পষ্টতঃ, $g$-এর লেখটির $(x, y)$ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকটি ঐ বিন্দুগামী ব্যাসার্ধের উপর লম্ব।

এখন, $(x, y)$ বিন্দুগামী ব্যাসার্ধের নতি $=\frac{y}{x}$ ; সুতরাং উল্লিখিত ব্যাসার্ধের উপর



চিত্র নং 36

লম্ব স্পর্শকটির নতি $=\frac{-x}{y}$.

$\therefore$ $g(x)$-এর তত্ত্বক (derivative, $g'(x)$)

$=(x,y)$ বিন্দুতে স্পর্শকের নতি $=\frac{-x}{y}$

$=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$, $[\because \; y=\sqrt{1-x^2}]$

অর্থাৎ $\quad g'(x)=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

[ লক্ষ্যণীয় : $\quad \because \; g'(\pm 1)=\frac{\pm 1}{0}$ অর্থাৎ সংজ্ঞাহীন

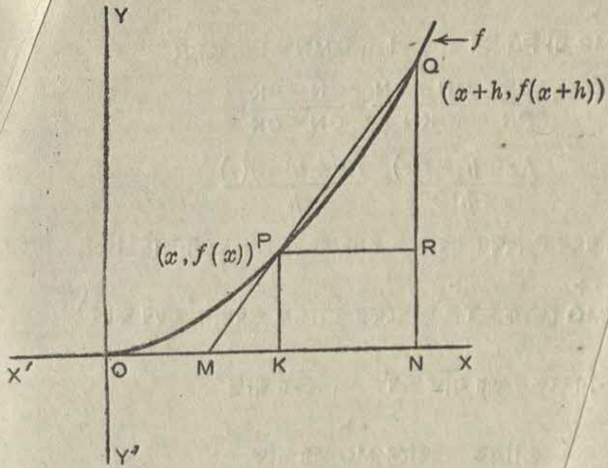
$\therefore \; x=\pm 1$-এর জন্য $g'(x)$-এর অস্তিত্ব নাই । ]

## 4·2. অবকলনাঙ্ক ও তাহার জ্যামিতিক তাৎপর্য (Differential coefficient and its geometrical significance) :

4·1 অনুচ্ছেদে একটি অপেক্ষকের লেখস্থিত বিন্দুবিশেষের নতিকে তত্ত্বক বলা হইয়াছে। এই অনুচ্ছেদে উহার সুষ্ঠুতর একটি সংজ্ঞা দেওয়া যাইতেছে এবং এই সংজ্ঞাটির সহিত সঙ্গতি রাখিয়া তত্ত্বকের অপর নাম দেওয়া যাইতেছে **অবকলনাঙ্ক**।

পূর্বের অনুচ্ছেদে দেখা গেল যে, কোন একটি অপেক্ষকের লেখটির উপরিস্থ বিন্দু বিশেষে নতি নির্ণয়ের সময় প্রথমে স্পর্শক রেখাটি অঙ্কন করার প্রশ্ন আছে। তাহার পর সেই স্পর্শকের নতি নির্ণয় করিলে তত্ত্বকটি (derivative) পাওয়া যাইতে পারে। বিশ্লেষণমূলক জ্যামিতির সাহায্যে কয়েকটি বক্রলেখ-এর স্পর্শক নির্ণয় প্রণালী নির্ধারিত আছে কিন্তু এমন অনেক বক্রলেখ আছে যাহাদের বেলায় চোখের আন্দাজে স্পর্শক অঙ্কন করা ছাড়া উপায় নাই। কাজেই ভিন্নতর এমন একটি গাণিতিক পদ্ধতি প্রয়োজন যাহার দ্বারা সকলপ্রকার বক্ররেখারই উহার বিশেষ বিন্দুতে নতি নির্ণয়ের চেষ্টা করা যায়। এই অনুচ্ছেদে সেইরূপ একটি পদ্ধতিরই আলোচনা করা যাইতেছে।

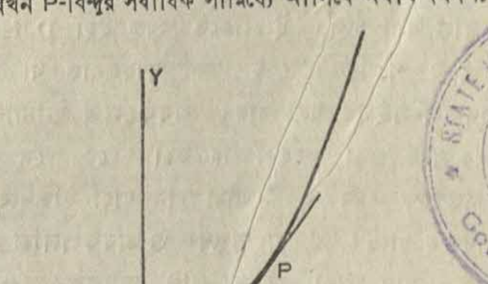
ধরা যাক, যে-কোন একটি অপেক্ষক $f$-এর লেখস্থিত $(x, f(x))$ বিন্দুতে যেন নতি-নির্ণয় করিতে হইবে।




চিত্র নং 37

37 নং চিত্রে প্রদর্শিত $f$-এর লেখটির উপর $(x, f(x))$ বিন্দুটি যেন P-দ্বারা চিহ্নিত এবং উহার পাশাপাশি $(x+h, f(x+h))$ স্থানাঙ্কসূচিত অপর একটি বিন্দু যেন Q-দ্বারা চিহ্নিত হইল। $\overline{PQ}$ জ্যাটিকে বর্ধিত করিলে যেন উহার বর্ধিতাংশ ভুজাক্ষকে M বিন্দুতে ছেদ করে। ভুজাক্ষের সমান্তরাল $\overline{PR}$ এবং P ও Q হইতে ভুজাক্ষের উপর যথাক্রমে $\overline{PK}$ ও $\overline{PN}$ লম্ব অঙ্কিত হইল। $\overline{PR}$ ও $\overline{QN}$ যেন R-বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করিয়াছে।

স্পষ্টতঃ Q যখন P-বিন্দুর সর্বাধিক সান্নিধ্যে আসিবে অর্থাৎ যখন $h \to 0$ হইবে তখন






চিত্র নং 38

$\overrightarrow{MPQ}$ রেখা, 38 নং চিত্রে প্রদর্শিত $\overrightarrow{TP}$ রেখার মত প্রান্তিক অবস্থানে আসিবে এবং সেই অবস্থানে $\overrightarrow{TP}$ রেখা P বিন্দুতে $f$-এর স্পর্শক হইবে।

এখন $\overrightarrow{MQ}$ বা $\overrightarrow{PQ}$-এর নতি = tan QMN = tan QPR

$$=\frac{QR}{PR}=\frac{QN-RN}{KN}=\frac{QN-PK}{ON \quad OK}$$

$$=\frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Q বিন্দু যখন P-বিন্দুর সর্বাধিক সান্নিধ্যে আসে তখন স্পষ্টতঃই $h \to 0$ হয়। সেই অবস্থাতেই $\overrightarrow{MQ}$ ছেদকটি $\overrightarrow{TP}$ স্পর্শকের প্রান্তিক অবস্থান গ্রহণ করে।

$\therefore$ P-বিন্দুতে $f$-এর নতি = $\overrightarrow{TP}$ স্পর্শকের নতি

= প্রান্তিক অবস্থানে $\overrightarrow{MQ}$-এর নতি

$$= \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

নতিসূচক এই সীমান্তমানের অস্তিত্ব যদি থাকে, তবে দেখা যায় যে $f$-লেখস্থিত P-বিন্দুর নতি আসলে P ও উহার অতি-সন্নিহিত Q বিন্দুর কোটিদ্বয়ের অন্তরফল ভাজিত উহাদের ভুজদ্বয়ের অন্তরফলের সীমান্তমান। উহা অবকলন বা বিয়োগ প্রক্রিয়া দ্বারা প্রাপ্ত দুইটি মানের ভাগফলটির সীমান্তমান। ইংরাজিতে তাই উহাকে limit of a difference Quotient বলা হয়। সেই কারণে বাংলায় **P-বিন্দুতে f-এর নতিকে অবকলনাঙ্ক** বলা চলে। ইংরাজিতে অবশ্য ইহা Differential co-efficient নামেই বেশী পরিচিত। সেই অর্থে অবকলনাঙ্ক বা Differential coefficient-কে **অবকল-সহগ**ও বলা যায়। **অবকলে**'র ব্যাখ্যা-প্রসঙ্গে 5'1 অনুচ্ছেদে এই নামের যুক্তিযুক্ততা পরে বিচার করা হইবে। সে যাহাই হউক অবকলনাঙ্ক হইল নতিসূচক এমন একটি সীমান্তমান যাহা ইতিপূর্বে তদ্ভবক বা derivative নামে বর্ণিত হইয়াছে। সুতরাং **তদ্ভবক ও অবকলনাঙ্ক** সমার্থক।

$\therefore$ $f$ অপেক্ষকের মান $f(x)$ হইতে প্রাপ্ত **তদ্ভবক** (derivative) বা **অবকলনাঙ্ক** (differential coefficient)—

$$f'(x)= \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

এখানে বিশেষভাবে উল্লেখযোগ্য যে, এই অবকলনাঙ্কসূচক সীমান্তমানের অস্তিত্ব থাকিতেও পারে, আবার না-ও থাকিতে পারে ; $f$-এর কোন একটি $(c, f(c))$ বিন্দুতে এই সীমান্তমানের অস্তিত্ব থাকিলেই মাত্র $f$-কে ঐ বিন্দুতে **অবকলনযোগ্য** বলা হয়।

অর্থাৎ যদি $\underset{h\to 0}{\text{Lt}} \dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}$ এর অস্তিত্ব থাকে, তবে $(c, f(c))$ বিন্দুতে $f$ অবকলন যোগ্য বলিয়া স্বীকৃত হয়।

অতএব কোন পূর্ববর্তী জ্যামিতিক ব্যাখ্যার আলোকে অবকলনাঙ্কের নিম্নরূপ একটি সংজ্ঞা নির্দেশ করা যায় :

**কোন অপেক্ষক f যদি উহার (c, f(c)) বিন্দুতে অবকলনযোগ্য হয়, তবে উল্লিখিত (c, f(c)) বিন্দুগামী স্পর্শকরেখাটির নতি হইবে f´(c) এবং সেই f´(c)-ই হইবে উল্লিখিত বিন্দুতে f অপেক্ষকের অবকলনাঙ্ক।**

**4·3. হার-মাপক মানহিসাবে অবকলনাঙ্ক ( Differential coefficient as a rate measurer )**

কোন একটি লেখ $f$-এর উপরিস্থ $(c, f(c))$ এবং $(c+h, f(c+h))$ দুইটি বিন্দু হইলে,

$\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}$ সংখ্যাটি, নিরপেক্ষ চলক $x$-এর $c$ হইতে $c+h$-এ পরিবর্তনের জন্য সাপেক্ষ চলক $f(x)$-এর $f(c)$ হইতে $f(c+h)$-এ পরিবর্তনের একটি গড় হার সূচিত করে।

উদাহরণস্বরূপ, একটি গাড়ী যদি $t$ সময়ে $x$ দূরত্ব অতিক্রম করে তবে লেখা যায় $x=f(t)$ ; কেননা $t$-এর মানের জন্য $x$ তথা $f(t)$-এর একটি এবং একটিই মান পাওয়া যায়।

এখন ধরা যাক, গাড়ীটি 3 ঘণ্টায় কলিকাতা হইতে 150 কিলোমিটার দূরে A-স্থানে পৌঁছায় এবং তাহার পর আরও 10 মিনিট বা $\frac{1}{6}$ ঘণ্টা পরে উহা A হইতে 10 কিলোমিটার দূরে B-স্থানে পৌঁছায়।

সুতরাং এখানে $x=150$ কি. মি. যখন $t=3$ ঘণ্টা এবং

$x=160$ কি. মি. যখন $t=3\frac{1}{6}$ ঘণ্টা ; অর্থাৎ

যখন $t=3$ তখন $f(t)=f(3)=150$

যখন $t=3\frac{1}{6}$ তখন $f(t)=f(3\frac{1}{6})=160$

$\therefore$ A হইতে B পর্যন্ত যাওয়ার গড়বেগ $=\dfrac{f(3\frac{1}{6})-f(3)}{3\frac{1}{6}-3}=\dfrac{160-150}{\frac{1}{6}}$

$=\dfrac{10}{\frac{1}{6}}=60$ কি. মি / ঘণ্টা.

$\frac{1}{6}=h$ ধরিলে স্পষ্টতঃ এই গড় বেগ $=\dfrac{f(t+h)-f(t)}{h}$ হয়।

এখন, $h$ যদি $\frac{1}{8}$ এর সমান না হইয়া 0 গামী হয়, ( অর্থাৎ যদি $h \to 0$ ) তবে $t$ ঘণ্টার মাথায় A-স্থানে বা বিন্দুতে গাড়ীটির বেগ হইবে

$$f'(t) = \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

এইভাবে একটি বিশেষ মুহূর্তের বেগ ( Instanteneous velocity ) নির্ণয় করা যায়।

অতএব, যে অবকলনাঙ্ক বা তন্তবক জ্যামিতিক অর্থে একটি অপেক্ষকের একটি বিন্দুতে নতি সূচিত করে, অন্যভাবে দেখিলে উহা একটি হার-মাপক মানরূপেই গণ্য হইতে পারে।

[ বস্তুত ব্যাবহারিক জীবনে হারমাপক মান হিসাবেই তন্তবকের বহুল প্রয়োগ হইয়া থাকে। উদাহরণমালায় উদাহরণ 13 হইতে 15 পর্যন্ত কয়েকটি প্রশ্নে এইরূপ কয়েকটি প্রয়োগ দেখান হইয়াছে। ]

**4·4. অবকলনাঙ্ক বা তন্তবকের বিভিন্ন সাংকেতিক চিহ্ন (Different symbols of differential Coefficient or derivative) :**

$y = f(x)$ ধরিলে $x$-এর মান যখন $\delta x$ পরিমাণ বৃদ্ধি বা হ্রাস পাইয়া $(x+\delta x)$-এ পরিবর্তিত হয়, তখন যেন $y$-এর মান $\delta y$ পরিমাণ বৃদ্ধি বা হ্রাস পাইয়া $(y+\delta y)$-এ পরিবর্তিত হয়। তাহা হইলে

$$y + \delta y = f(x + \delta x)$$

$$\delta y = f(x+\delta x) - y$$

$$= f(x+\delta x) - f(x) \qquad [\because y = f(x)]$$

$$\therefore \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x}$$

$$\underset{\delta x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\delta y}{\delta x} = \underset{\delta x \to 0}{\text{Lt}} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x}$$

কিন্তু সংজ্ঞানুসারে উক্ত সীমান্তমানের অস্তিত্ব থাকিলে, $\underset{\delta x \to 0}{\text{Lt}} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x}$

$= f'(x)$ বা অবকলনাঙ্ক।

$\underset{\delta x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\delta y}{\delta x}$-কে সচরাচর $\frac{dy}{dx}$ বা $\frac{d}{dx}\{f(x)\}$ বা $D\{f(x)\}$ অথবা শুধু $y'$ রূপে লেখা হয়।

$\therefore \frac{dy}{dx} = f'(x) = (x, y)$ বিন্দুতে $f$-এর অবকলনাঙ্ক।

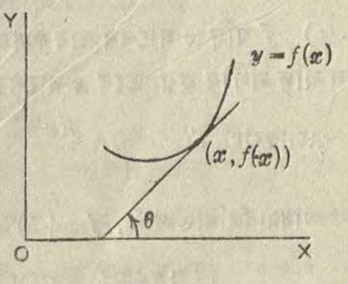
**বিশেষ দ্রষ্টব্য :** এখানে সর্বপ্রযত্নে মনে রাখা প্রয়োজন যে, $\frac{dy}{dx}=\frac{d(y)}{dx}=\frac{d}{dx}\{f(x)\}=f'(x)$ বলিয়া $\frac{d}{dx}$ সংকেতটি $y$-এর অবকলন সূচক চিহ্ন বুঝায়। কাজেই $\frac{dy}{dx}$ দ্বারা $dy \div dx$ বুঝায় না।

**4·5. অবকলনাঙ্কের ধন বা ঋণ চিহ্নের তাৎপর্য (Significance of the positive or negative sign of the differential Coefficient) :**

যেহেতু কোন অপেক্ষক $f$-এর লেখস্থিত একটি বিন্দুতে অবকলনাঙ্ক বলিতে লেখটির ঐ বিন্দুগামী স্পর্শকরেখার নতি বুঝায়, সেইহেতু $y=f(x)$ সংজ্ঞায় বিবৃত $f$-এর লেখটির উপর $(x, y)$ বা $(x, f(x))$ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক রেখাটি যদি $x$-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত $\theta$ কোণ উৎপন্ন করে, তবে, সেই বিন্দুতে—

$$\text{অবকলনাঙ্ক}=\frac{dy}{dx}=\tan\theta.$$

স্পষ্টতঃ (i) $\theta$ সূক্ষ্মকোণ হইলে $\tan\theta$ অবশ্যই ধনাত্মক হইবে। সেক্ষেত্রে অবকলনাঙ্ক $\frac{dy}{dx}$ ধনাত্মক হইবে এবং তখন $x$-এর মানের বৃদ্ধির সহিত $f(x)$ মানের বৃদ্ধি অথবা $x$ মানের হ্রাসের সহিত $f(x)$ মানেরও হ্রাস ঘটিবে। 39নং চিত্রে $(x, f(x))$ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}$ ধনাত্মক, কেননা $\theta$ সূক্ষ্মকোণ।



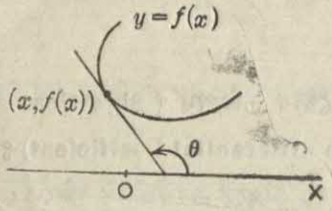

চিত্র নং 39

(ii) আবার $\theta$ কোণ যদি স্থূলকোণ অথবা $\frac{3\pi}{2}$ অপেক্ষা বৃহত্তর কোণ প্রবৃদ্ধ কোণ হয়, (অর্থাৎ $\theta$ যদি দ্বিতীয় বা চতুর্থ পাদস্থ কোণ হয়) তবে $\tan\theta$ ঋণাত্মক হইবে। এইরূপ উভয় ক্ষেত্রে অবকলনাঙ্ক $\frac{dy}{dx}$ ঋণাত্মক হইবে এবং তখন $x$-এর বৃদ্ধির জন্য $y$-এর হ্রাস অথবা $x$-এর হ্রাসের জন্য $y$-এর বৃদ্ধি ঘটিবে।

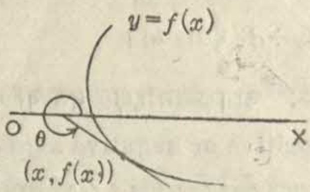
40 নং চিত্রে $(x, f(x))$ বিন্দুতে স্পর্শকরেখাটি $x$-অক্ষের সহিত স্থূলকোণ উৎপন্ন করিয়াছে। সুতরাং $(x, f(x))$ বিন্দুতে অবকলনাঙ্ক $\frac{dy}{dx}$ ঋণাত্মক, কেননা $\tan\theta$ ঋণাত্মক।

অনুরূপে 41 নং চিত্রে $(x, f(x))$ বিন্দুতে স্পর্শক রেখাটি $x$-অক্ষের সহিত $\frac{3\pi}{2}$ হইতে বড়

প্রবৃদ্ধ কোণ উৎপন্ন করিয়াছে। সেইজন্য $\tan \theta$ ঋণাত্মক এবং সেই কারণে R বিন্দুতে অবকলনাঙ্ক $\frac{dy}{dx}$ ও ঋণাত্মক হইবে। এই দুইটি ক্ষেত্র হইতে দেখা যায়, $\frac{dy}{dx}$ ঋণাত্মক




চিত্র নং 40




চিত্র নং 41

হইলে, $x$ যখন বৃদ্ধি পায় $f(x)$ তখন হ্রাস পায় এবং $x$ যখন হ্রাস পায় $f(x)$-এর তখন হয় বৃদ্ধি।

### 4.6. অবকলনের নিয়মাবলী ( Rules of differentiation ) :

অবকলনের নিয়মাবলী আলোচনার প্রসঙ্গে একটি প্রয়োজনীয় তথ্যের অবতারণা করা যাইতেছে। তথ্যটি নিম্নরূপ :

**(a) $f$ যদি $x$ মানের অবকলনযোগ্য হয় এবং অবকলনাঙ্ক $f'(x)$-এর মান যদি সসীম হয়, তবে $x$-মানের জন্য $f$ সন্তত হইবে।**

সংজ্ঞানুযায়ী, $f'(x) = \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

আমরা লিখিতে পারি, $f(x+h) - f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \times h.$

$$\therefore \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \{f(x+h) - f(x)\}$$

$$= \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \left\{\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \times h\right\}$$

$$= \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \times \underset{h \to 0}{\text{Lt}}\, h$$

$$= f'(x) \times 0, \quad [\because \underset{h \to 0}{\text{Lt}}\, h = 0]$$

$= 0$, যেহেতু $f'(x)$ সসীম।

$$\therefore \underset{h \to 0}{\text{Lt}} f(x+h) - \underset{h \to 0}{\text{Lt}} f(x) = 0$$

$\therefore \lim_{h\to 0} f(x+h)=f(x)$, [ $f(x)$ মান $h$ বর্জিত বলিয়া $\lim_{h\to 0} f(x)=f(x)$] ।

সন্ততির সংজ্ঞানুযায়ী, $x$ মানের জন্য $f$ সন্তত ।

## (b) অবকলন সংক্রান্ত নিয়মাবলী ঃ

**1. ধ্রুবক অপেক্ষকের অবকলনাঙ্ক শূন্য ( Differential Coefficient of a constant function is Zero )**

ধরা যাক, $f(x)=c$, যেখানে $c$ একটি ধ্রুবক সংখ্যা ।

স্পষ্টতঃ, $f$ এখানে একটি ধ্রুবক অপেক্ষক । সেই কারণে $f$-এর ব্যাপ্তিভুক্ত $x$-এর যে-কোন মানের মানের জন্য $f(x)=c$.

$$\therefore\ f(x+h)=c.$$

$$\therefore\ f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$

অতএব, **ধ্রুবক অপেক্ষক $f$-এর অবকলনাঙ্ক $f'(x)=0$.**

**বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ** $y=f(x)=c$ হইলে

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=0.$$

অর্থাৎ $y=c$ আকারের ধ্রুবক অপেক্ষকটির $x$-সাপেক্ষে অবকলনাঙ্ক $\frac{dy}{dx}=0$.

**II. $(x, f(x))$-বিন্দুতে $f$ অবকলনযোগ্য এবং $m$ একটি ধ্রুবক সংখ্যা হইলে $mf(x)$-এর অবকলনাঙ্ক $= m\times f(x)$-এর অবকলনাঙ্ক । অর্থাৎ $\frac{d}{dx}\{m\,f(x)\}=m\,f'(x)$.**

এখন, $m\,f(x)$-এর অবকলনাঙ্ক $=\frac{d}{dx}\{m\,f(x)\}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{m\,f(x+h)-m\,f(x)}{h},\ \text{( সংজ্ঞানুসারে )}$$

$$=\lim_{h\to 0} m\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right],\ \text{( বৈজিক নিয়মে )}$$

$$=m\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},\ \text{( সীমান্তমানের সূত্রানুসারে )}$$

$$=m\,f'(x).$$

সুতরাং $m\,f(x)$-এর অবকলনাঙ্ক, $m$ ও $f(x)$-এর অবকলনাঙ্কের গুণফলের সমান।

III. $x$-মানের জন্য $f$ ও $g$ উভয়ে অবকলনযোগ্য হইলে $\{f(x) \pm g(x)\}$ এর অবকলনাঙ্ক $= f(x)$-এর অবকলনাঙ্ক $\pm$ $g(x)$-এর অবকলনাঙ্ক।

এখন $\{f(x) \pm g(x)\}$ এর অবকলনাঙ্ক

$$= \frac{d}{dx}\{f(x) \pm g(x)\}$$

$$= \underset{h \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\{f(x+h) \pm g(x+h)\} - \{f(x) \pm g(x)\}}{h}, \text{ ( সংজ্ঞানুসারে )}$$

$$= \underset{h \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\{f(x+h) - f(x)\} \pm \{g(x+h) - g(x)\}}{h}$$

$$= \underset{h \to 0}{\mathrm{Lt}} \left\{\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \pm \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right\}, \text{ ( বৈজিক নিয়মে )}$$

$$= \underset{h \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \pm \underset{h \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}, \text{ ( সীমাস্থমানের সূত্রানুসারে )}$$

$$= f'(x) \pm g'(x)$$

$= f(x)$-এর অবকলনাঙ্ক $\pm$ $g(x)$-এর অবকলনাঙ্ক।

IV. $x$ মানের জন্য $f$, $g$ ও $s$ অবকলনযোগ্য এবং $f(x) = g(x) \times s(x)$ হইলে, $f'(x) = g(x) \times s'(x) + s(x) \times g'(x)$ হইবে।

$$\because \; f(x) = g(x) \times s(x), \quad \therefore \; f(x+h) = g(x+h) \times s(x+h).$$

$$\therefore \; f'(x) = \underset{h \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \underset{h \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{g(x+h) \times s(x+h) - g(x) \times s(x)}{h}$$

$$= \underset{h \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{g(x+h).s(x+h) - g(x+h).s(x) + g(x+h).s(x) - g(x).s(x)}{h},$$

[ লবভাগে $g(x+h).\,s(x)$ যোগ এবং বিয়োগ করিয়া ]

$$= \underset{h\to 0}{\mathrm{Lt}} \left\{\frac{g(x+h).s(x+h)-g(x+h).s(x)}{h}+\frac{g(x+h).s(x)-g(x).\,s(x)}{h}\right\}$$

$$= \underset{h\to 0}{\mathrm{Lt}} \left\{g(x+h)\frac{s(x+h)-s(x)}{h}\right\}+\underset{h\to 0}{\mathrm{Lt}} \left\{s(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}$$

কিন্তু $x$ মানের জন্য $g$ অবকলন-যোগ্য এবং $g'(x)$ সসীম বলিয়া $x$-মানের জন্য $\underset{h\to 0}{\mathrm{Lt}}\, g(x+h)=g(x)$.

$$\therefore\quad f'(x)=g(x)\underset{h\to 0}{\mathrm{Lt}}\frac{s(x+h)-s(x)}{h}+s(x)\underset{h\to 0}{\mathrm{Lt}}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$= g(x).\, s'(x)+s(x).g'(x)$$

অর্থাৎ $g$ ও $s$ অপেক্ষকের যথাক্রমে $g(x)$ ও $s(x)$ অপেক্ষকমানের গুণফলের অবকলনাঙ্ক $= g(x)\times s(x)$-এর অবকলনাঙ্ক $+ s(x)\times g(x)$-এর অবকলনাঙ্ক।

**V. দুইটি অপেক্ষক মান $f(x)$ ও $g(x)$ এর মধ্যে $g(x)\neq 0$ হইলে, $\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}$ এর অবকলনাঙ্ক**

$$= \frac{f(x) \text{ এর অবকলনাঙ্ক} \times g(x) - g(x) \text{ এর অবকলনাঙ্ক} \times f(x)}{\{g(x)\}^2}$$

ধরা যাক, $s(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$$\therefore\quad s'(x)=\underset{h\to 0}{\mathrm{Lt}}\frac{s(x+h)-s(x)}{h}$$

$$= \underset{h\to 0}{\mathrm{Lt}}\frac{1}{h}\left\{\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}\right\}$$

$$= \underset{h\to 0}{\mathrm{Lt}}\frac{f(x+h).\,g(x)-g(x+h).\,f(x)}{hg(x+h)g(x)}$$

$$= \underset{h\to 0}{\mathrm{Lt}}\frac{f(x+h).\,g(x)-f(x)g(x)+f(x)\,g(x)-g(x+h).f(x)}{h\,g(x+h).\,g(x)}$$

$$= \underset{h\to 0}{\mathrm{Lt}}\frac{1}{g(x+h)\,g(x)}\left\{g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}$$

$$= \frac{1}{\{g(x)\}^2}\{g(x).\,f'(x)-f(x)\,g'(x)\},\qquad \left[\because\ \underset{h\to 0}{\mathrm{Lt}}\,g(x+h)=g(x)\right]$$

$$\therefore\quad \frac{d}{dx}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}=\frac{f'(x).\,g(x)-g'(x).\,g(x)}{\{g(x)\}^2}$$

**4·7. অপেক্ষকের অপেক্ষকের অবকলন (Differentiation of a function of a function) :**

ধরা যাক, $y=f(u)$ এবং $u=g(x)$, যেখানে $f(x)$ এবং $g(x)$ সন্তত।

তাহা হইলে $f$, $x$-এরও একটি সন্তত অপেক্ষক হইবে।

এখন, $f'(x)$ ও $g'(x)$-এর যেন সসীম মান বর্তমান। সেক্ষেত্রে ধরা যায় যে,

$$u+\delta u=g(x+\delta x) \text{ এবং } y+\delta y=f(u+\delta u),$$

যেখানে $\delta u$, $\delta x$ ও $\delta y$ যথাক্রমে $u$, $x$ ও $y$-এর অতিক্ষুদ্র বৃদ্ধি বা হ্রাস বুঝায়।

স্পষ্টত : $\delta x\to 0$ হইলে $\delta u\to 0$ এবং $\delta u\to 0$ হইলে $\delta y\to 0$ হইবে।

$$\text{এখন } \frac{\delta y}{\delta x}=\frac{\delta y}{\delta u}\cdot\frac{\delta u}{\delta x}, \quad [\because \quad \delta x\neq 0]$$

$$\therefore \underset{\delta x\to 0}{\text{Lt}} \frac{\delta y}{\delta x}= \underset{\delta u\to}{\text{Lt}} \frac{\delta y}{\delta u}\cdot \underset{\delta x\to 0}{\text{Lt}} \frac{\delta u}{\delta x}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

কিন্তু $y=f(u)$

$=f(g(x))$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}\{f(g(x))\}$$

$$=\frac{d\{f(g(x))\}}{d(g(x))}\times\frac{d(g(x))}{dx}$$

$\therefore$ x-সাপক্ষে y-এর অবকলনাঙ্ক = g(x) সাপক্ষে y-এর অবকলনাঙ্ক × x-সাপক্ষে g(x)-এর অবকলনাঙ্ক।

**অনুসিদ্ধান্ত :** $y=f(x)$ অপেক্ষকটি সন্তত হইলে অধিকাংশ ক্ষেত্রে $x=g(y)$ বিপরীত অপেক্ষকটি পাওয়া যায়।

এখন, $\delta y$ ও $\delta x$ যদি যথাক্রমে $y$ ও $x$-এর অতি সামান্য হ্রাস বা বৃদ্ধি বুঝায়, তবে,

$$y+\delta y=f(x+\delta x).$$

অধিকন্তু, $\delta y\to 0$ হইলে, অবশ্যই $\delta x\to 0$ হইবে।

স্পষ্টতঃ বৈজিক নিয়মে $\dfrac{\delta y}{\delta x}\cdot\dfrac{\delta x}{\delta y}=1$ অথবা $\dfrac{\delta y}{\delta x}=\dfrac{1}{\dfrac{\delta x}{\delta y}}$

$$\therefore \quad \underset{\delta x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\delta y}{\delta x} = \underset{\delta y \to 0}{\text{Lt}} \frac{1}{\frac{\delta x}{\delta y}}$$

অথবা $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}$ $\qquad \therefore \quad \dfrac{dy}{dx} \cdot \dfrac{dx}{dy} = 1.$

**4.8. প্রথম নিয়ম বা সংজ্ঞা হইতে কয়েকটি অবকলনাঙ্ক নির্ণয় (A few differential Coefficients from first Principles) :**

**(i) $x^n$-এর অবকলনাঙ্ক ( differential Coefficient of $x^n$ ) :**

ধরা যাক, $f(x) = x^n$.

তাহা হইলে, $f'(x) = \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$= \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

এখন, $x + h = z$ ধরিলে, $h = z - x$ হয়,

এবং $h \to 0$ হইলে, $z \to x$ হয় বলিয়া

$$f'(x) = \underset{z \to x}{\text{Lt}} \frac{z^n - x^n}{z - x}.$$

কিন্তু সীমান্তমানের সূত্র অনুসারে, $n$-এর সকল মূলদমানের জন্য

$$\underset{z \to x}{\text{Lt}} \frac{z^n - x^n}{z - x} = n\, x^{n-1}$$

$$\therefore \quad f'(x) = n\, x^{n-1}$$

অর্থাৎ $n$-এর মূলদমানের জন্য $\dfrac{d}{dx}(x^n) = n\, x^{n-1}$

**(ii) sin x-এর অবকলনাঙ্ক (differential Coefficient of sin x)**

$f(x) = \sin x$ ধরিলে,

$$f'(x) = \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$$= \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \frac{2 \sin \frac{x+h-x}{2} \cos \frac{x+h+x}{2}}{h},$$

[ ত্রিকোণমিতির সূত্রানুসারে ]

$$= \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$$

এখন, $\cos x$ যেহেতু $x$-এর একটি সন্তত অপেক্ষক মান, সেইহেতু $\frac{h}{2} \to 0$ বলিয়া $\cos\left(x+\frac{h}{2}\right) \to \cos x$.

দ্বিতীয়ত সীমাস্তমানের সূত্র অনুসারে, $\underset{\frac{h}{2} \to 0}{\text{Lt}} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1.$

$$\therefore \quad f'(x) = \underset{\frac{h}{2} \to 0}{\text{Lt}} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$$

$= 1 . \cos x = \cos x$ অর্থাৎ $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

**(iii) cos x-এর অবকলনাঙ্ক (Differential Coefficient of cos x):**

$f(x) = \cos x$ হইলে, সংজ্ঞানুসারে

$$f'(x) = \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$

$$= \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \frac{2 \sin \frac{\{x-(x+h)\}}{2} \sin \frac{\{x+(x+h)\}}{2}}{h}$$

$$= \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \frac{2 \sin\left(-\frac{h}{2}\right) \sin\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \frac{-2\sin\frac{h}{2}\cdot\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$= \underset{\frac{h}{2}\to 0}{\text{Lt}} \frac{-\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)$$

$$= -\sin x, \left[\because \underset{\frac{h}{2}\to 0}{\text{Lt}} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1 \text{ এবং } \underset{\frac{h}{2}\to 0}{\text{Lt}} -\sin\left(x+\frac{h}{2}\right) = -\sin x\right]$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

(iv) **$e^x$-এর অবকলনাঙ্ক (Differential coefficient of $e^x$)**

$f(x)=e^x$ ধরিলে, সংজ্ঞানুসারে

$$f'(x) = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \frac{e^{x+h}-e^x}{h}$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{Lt}}\ e^x.\frac{e^h-1}{h}$$

$$= e^x.\underset{h\to 0}{\text{Lt}} \frac{e^h-1}{h}$$

$$= e^x.1, \left[\therefore \text{ সীমান্তমানের সূত্রানুসারে } \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \frac{e^h-}{h} = 1\right]$$

$$= e^x.$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(e^x) = e^x.$$

(v) **log $x$-এর অবকলনাঙ্ক ( Differential coefficient of log $x$ ) :**

$f(x)=\log x$ ধরিলে, সংজ্ঞানুসারে

$$f'(x) = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \frac{f(x)+h)-f(x)}{h} = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \frac{\log(x+h)-\log x}{h}$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \frac{1}{h}. \log\left(\frac{x+h}{x}\right)$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \frac{1}{h}. \log\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

এখন, $\frac{h}{x}=z$ ধরিলে $\frac{1}{z}=\frac{x}{h}$ এবং $\frac{1}{h}=\frac{1}{x}.\frac{x}{h}=\frac{1}{x}.\frac{1}{z}$.

$$\therefore \quad f'(x)= \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \frac{1}{x}.\frac{x}{h} \log\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{x}. \underset{z\to 0}{\text{Lt}} \frac{1}{z}\log(1+z)$$

$$=\frac{1}{x}. 1, \left[\because \text{ সীমান্তমানের সূত্রানুসারে } \underset{z\to 0}{\text{Lt}} \frac{\log(1+z)}{z}=1\right]$$

$$=\frac{1}{x}.$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(\log x)=\frac{1}{x}.$$

**4·9. প্রথম নিয়মের সাহায্যে কয়েকটি আদর্শ অবকলনাঙ্ক নির্ণয় (Determination of a few standard differential coefficients from first principles) :**

**(i) tan $x$-এর অবকলনাঙ্ক ( Differential coefficient of tan $x$ ) :**

$f(x)=\tan x$, $g(x)=\sin x$ ও $s(x)=\cos x$ ধরিলে, $g'(x)=\frac{d(\sin x)}{dx}=\cos x$ এবং $s'(x)=\frac{d(\cos x)}{dx}=-\sin x$.

$$\therefore \quad f(x)=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{g(x)}{s(x)}$$

$$\therefore \quad f'(x)=\frac{g'(x)\,s(x)-s'(x)\,g(x)}{\{s(x)\}^2}, \text{ যদি } s(x)=0 \text{ না হয় ।}$$

$$=\frac{\cos x.\cos x-(-\sin x).\sin x}{(\cos x)^2}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$=\sec^2 x, \left[\text{ যেখানে } x\neq(2n+1)\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\therefore \quad \frac{d}{d(x)}(\tan x)=\sec^2 x, \quad \left[\text{যেখানে } x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}\right]$$

**দ্রষ্টব্য :** $\cos (2n+1)\frac{\pi}{2}=0$ বলিয়া $\cos x$-এর মান শূন্য হইলে আলোচ্য-$f'(x)$-এর মান পাওয়া যাইবে না।

(ii) $\cot x$-এর অবকলনাঙ্ক ( Differential coefficient of $\cot x$ ):

ধরা যাক, $f(x)=\cot x$, $g(x)=\sin x$ এবং $s(x)=\cos x$.

তাহা হইলে, $g'(x)=\frac{d(\sin x)}{dx}=\cos x$ এবং $s'(x)=\frac{d(\cos x)}{dx}=-\sin x$.

$$\therefore \quad f(x)=\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{s(x)}{g(x)}$$

$$\therefore \quad f'(x)=\frac{s'(x)\,g(x)-g'(x)\,s(x)}{\{g(x)\}^2}, \quad \text{যদি } g(x)=0 \text{ না হয়।}$$

$$=\frac{-\sin x.\sin x-\cos x.\cos x}{(\sin x)^2}$$

$$=\frac{-(\sin^2 x+\cos^2 x)}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}=-\operatorname{cosec}^2 x$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(\cot x)=-\operatorname{cosec}^2 x, \quad [\text{যেখানে } x \neq n\pi]$$

**দ্রষ্টব্য :** $\sin n\pi=0$ বলিয়া $x=n\pi$ হইলে আলোচ্য ক্ষেত্রে $f'(x)$-এর মান থাকিবে না।

**(iii) $\sec x$-এর অবকলনাঙ্ক (Differential coefficient of $\sec x$) :**

ধরা যাক $f(x)=\sec x$, $g(x)=1$ এবং $s(x)=\cos x$.

তাহা হইলে $g$ ধ্রুবক অপেক্ষক বলিয়া $g'(x)=0$ এবং $s'(x)=-\sin x$.

$$\therefore \quad f'(x)=\frac{d}{dx}(\sec x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos x}\right)=\frac{d}{dx}\left\{\frac{g(x)}{s(x)}\right\}$$

$$=\frac{g'(x).s(x)-s'(x).g(x)}{\{s(x)\}^2}, \text{ যদি } s(x)=0 \text{ না হয়।}$$

$$=\frac{0.\cos x-(-\sin x).1}{\{\cos x\}^2}$$

$$=\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\cos x}=\tan x.\sec x,$$

$$\left[\text{যেখানে } x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}\right]$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \; \frac{1}{h}.\log\left(\frac{x+h}{x}\right)$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \; \frac{1}{h}.\log\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

এখন, $\frac{h}{x}=z$ ধরিলে $\frac{1}{z}=\frac{x}{h}$ এবং $\frac{1}{h}=\frac{1}{x}.\frac{x}{h}=\frac{1}{x}.\frac{1}{z}$.

$$\therefore \quad f'(x)= \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \; \frac{1}{x}.\frac{x}{h}\log\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{x}.\underset{z\to 0}{\text{Lt}} \; \frac{1}{z}\log(1+z)$$

$$=\frac{1}{x}.1, \left[\because \text{ সীমান্তমানের সূত্রানুসারে } \underset{z\to 0}{\text{Lt}} \; \frac{\log(1+z)}{z}=1\right]$$

$$=\frac{1}{x}.$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(\log x)=\frac{1}{x}.$$

**4·9. প্রথম নিয়মের সাহায্যে কয়েকটি আদর্শ অবকলনাঙ্ক নির্ণয় (Determination of a few standard differential coefficients from first principles) :**

**(i) tan $x$-এর অবকলনাঙ্ক ( Differential coefficient of tan $x$ ) :**

$f(x)=\tan x$, $g(x)=\sin x$ ও $s(x)=\cos x$ ধরিলে, $g'(x)=\frac{d(\sin x)}{dx}=\cos x$

এবং $s'(x)=\frac{d(\cos x)}{dx}=-\sin x$.

$$\therefore \quad f(x)=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{g(x)}{s(x)}$$

$$\therefore \quad f'(x)=\frac{g'(x)\, s(x)-s'(x)\, g(x)}{\{s(x)\}^2}, \text{ যদি } s(x)=0 \text{ না হয় ।}$$

$$=\frac{\cos x.\cos x-(-\sin x).\sin x}{(\cos x)^2}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$=\sec^2 x, \left[\text{ যেখানে } x\neq(2n+1)\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\therefore \quad \frac{d}{d(x)}(\tan x) = \sec^2 x, \quad \left[\text{যেখানে } x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}\right]$$

দ্রষ্টব্য : $\cos\ (2n+1)\frac{\pi}{2} = 0$ বলিয়া $\cos x$-এর মান শূন্য হইলে আলোচ্য-$f'(x)$-এর মান পাওয়া যাইবে না।

(ii) $\cot x$-এর অবকলনাঙ্ক ( Differential coefficient of $\cot x$ ):

ধরা যাক, $f(x) = \cot x$, $g(x) = \sin x$ এবং $s(x) = \cos x$.

তাহা হইলে, $g'(x) = \frac{d\ (\sin x)}{dx} = \cos x$ এবং $s'(x) = \frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x$.

$$\therefore \quad f(x) = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{s(x)}{g(x)}$$

$$\therefore \quad f'(x) = \frac{s'(x)\ g(x) - g'(x)\ s(x)}{\{g\ (x)\}^2}, \quad \text{যদি } g(x) = 0 \text{ না হয়।}$$

$$= \frac{-\sin x.\ \sin x - \cos x.\ \cos x}{(\sin x)^2}$$

$$= \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x, \qquad [\text{যেখানে } x \neq n\pi]$$

দ্রষ্টব্য : $\sin n\pi = 0$ বলিয়া $x = n\pi$ হইলে আলোচ্য ক্ষেত্রে $f'(x)$-এর মান থাকিবে না।

**(iii) $\sec x$-এর অবকলনাঙ্ক (Differential coefficient of $\sec x$) :**

ধরা যাক $f(x) = \sec x$, $g(x) = 1$ এবং $s(x) = \cos x$.

তাহা হইলে $g$ ধ্রুবক অপেক্ষক বলিয়া $g'(x) = 0$ এবং $s'(x) = -\sin x$.

$$\therefore \quad f'(x) = \frac{d}{dx}(\sec x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos x}\right) = \frac{d}{dx}\left\{\frac{g(x)}{s(x)}\right\}$$

$$= \frac{g'(x).s(x) - s'(x).g(x)}{\{s(x)\}^2}, \quad \text{যদি } s(x) = 0 \text{ না হয়।}$$

$$= \frac{0.\cos x - (-\sin x).1}{\{\cos x\}^2}$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \tan x.\sec x,$$

$$\left[\text{যেখানে } x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}\right]$$

$\therefore \quad \dfrac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \,.\, \tan x,$ $\left[\text{যেখানে } x \neq (2x+1)\dfrac{\pi}{2}\right]$

**(iv) cosec $x$-এর অবকলনাঙ্ক (Differential coefficient of cosec $x$) :**

$g(x)=1$, $s(x)=\sin x$ এবং $f(x)=\operatorname{cosec} x$ ধরিলে,

$$f(x)=\operatorname{cosec} x=\frac{1}{\sin x}=\frac{g(x)}{s(x)}$$

$$\therefore \; f'(x)=\frac{g'(x).s(x)-s'(x).g(x)}{\{s(x)\}^2}, \text{ যদি } s(x)=0 \text{ না হয়।}$$

$$=\frac{0.s(x)-\cos x.1}{\{\sin x\}^2},$$

$$\left[\because \; g'(x)=0 \text{ এবং } s'(x)=\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x\right]$$

$$=\frac{-\cos x}{\sin x.\sin x}$$

$$=-\frac{1}{\sin x}\,.\cot x$$

$$=-\operatorname{cosec} x.\cot x, \qquad [\text{যেখানে } x\neq n\pi]$$

$$\therefore \; \frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x)=-\operatorname{cosec} x.\cot x, \quad [\text{যেখানে } x\neq n\pi]$$

**(v) বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষকের অবকলাঙ্ক :**

(a) $y=\sin^{-1}x$ হইলে, $x=\sin y$

$$\therefore \; \frac{dx}{dy}=\frac{d}{dy}(\sin y)=\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{dx/dy}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad [\text{যেখানে } |x|<1]$$

অর্থাৎ $\dfrac{d}{dx}(\sin^{-1}x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},$ $[\text{যেখানে } |x|<1]$

(b) $y=\cos^{-1}x$ হইলে $x=\cos y$

$$\therefore \; \frac{d}{dx}(\cos^{-1}x)=\frac{dy}{dx}=1/dx/dy=1/\frac{d(\cos y)}{dx}$$

$$=1/-\sin y=\frac{1}{-\sqrt{1-\cos^2 y}}=\frac{1}{-\sqrt{1-x^2}} \quad [\text{যেখানে } |x|<1]$$

(c) $y=\tan^{-1}x$ হইলে, $x=\tan y$

এবং $\frac{dx}{dy}=\frac{d}{dy}(\tan y)=\sec^2 y=1+\tan^2 y=1+x^2$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=1/\frac{dx}{dy}=\frac{1}{1+x^2}$

(d) $y=\cot^{-1}x$ হইলে, $x=\cot y$ ; কাজেই

$\frac{dx}{dy}=\frac{d(\cot y)}{dy}=-\operatorname{cosec}^2 y=-(1+\cot^2 y)=-(1+x^2)$

$\therefore \quad \frac{d}{dx}(\cot^{-1}x)=\frac{dy}{dx}=1/\frac{dx}{dy}=1/-(1+x^2)=\frac{-1}{1+x^2}$

(e) $y=\sec^{-1}x$ হইলে, $x=\sec y$.

$\therefore \quad \frac{dx}{dy}=\frac{d}{dy}(\sec y)=\sec y.\tan y=x\sqrt{\sec^2 y-1}=x\sqrt{x^2-1}$

$\therefore \quad \frac{d}{dx}(\sec^{-1}x)=\frac{dy}{dx}=1/\frac{dx}{dy}=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$, [ যেখানে $|x|>1$ ]

(f) $y=\operatorname{cosec}^{-1}x$ হইলে, $x=\operatorname{cosec} y$.

$\therefore \quad \frac{dx}{dy}=\frac{d(\operatorname{cosec} y)}{dx}=-\operatorname{cosec} y\cot y=-x.\sqrt{\operatorname{cosec}^2 y-1}$

$=-x\sqrt{x^2-1}$.

$\therefore \quad \frac{d(\operatorname{cosec}^{-1}x)}{dx}=\frac{dy}{dx}=1/\frac{dx}{dy}=-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$, [যেখানে $|x|>1$]

## উদাহরণমালা

উদা. 1. প্রথম নিয়ম হইতে নিম্নলিখিত অপেক্ষকমানগুলির তন্তবক নির্ণয় কর :

(i) $f(x)=3x-2$ ; (ii) $f(x)=4-x^2$ ; (iii) $f(x)=\frac{1}{x}$ ;

(iv) $f(x)=\sqrt{x}$ (v) $f(x)=3x^2-2x+1$.

(i) প্রথম নিয়ম হইতে $f(x)$-এর তন্তবক $f'(x)$

$$=\underset{h\to 0}{\text{Lt}}\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\underset{h\to 0}{\text{Lt}}\ \frac{\{3(x+h)-2\}-(3x-2)}{h}$$

$$=\underset{h\to 0}{\text{Lt}}\ \frac{3x+3h-2-3x+2}{h}$$

$$=\underset{h\to 0}{Lt}\ \frac{3h}{h}=3.$$

(ii) প্রথম নিয়ম হইতে $f(x)$ এর তন্ত্বক $f'(x)=\underset{h\to0}{\text{Lt}}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

∴ এক্ষেত্রে তন্ত্বক $f'(x)=\underset{h\to0}{\text{Lt}}\dfrac{\{4-(x+h)^2\}-(4-x^2)}{h}$

$$=\underset{h\to0}{\text{Lt}}\frac{4-x^2-2hx-h^2-4+x^2}{h}$$

$$=\underset{h\to0}{\text{Lt}}\frac{-2hx-h^2}{h}$$

$$=\underset{h\to0}{\text{Lt}}(-2x-h)$$

$$=-2x.$$

(iii) $f(x)=\frac{1}{x}$ বলিয়া এখানে $f(x$-এর তন্ত্বক

$$f'(x)=\underset{h\to0}{\text{Lt}}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}$$

এখন, $x+h=z$ ধরিলে $h=z-x$ এবং তখন $h\to0$ হইলে $z\to x$ হইবে।

$$\therefore\ f'(x)=\underset{z\to x}{\text{Lt}}\frac{\frac{1}{z}-\frac{1}{x}}{z-x}=\underset{z\to0}{\text{Lt}}\frac{x-z}{zx(z-x)}=\underset{z\to x}{\text{Lt}}-\frac{(z-x)}{(z-x)zx}$$

$$=\underset{z\to x}{\text{Lt}}\left(-\frac{1}{zx}\right)=-\frac{1}{x^2}.$$

(iv) $f(x)=\sqrt{x}$ বলিয়া এখানে তন্ত্বক

$$f'(x)=\underset{h\to0}{\text{Lt}}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$

এখন, $x+h=z$ ধরিলে $h=z-x$ এবং $h\to0$ হইলে $z\to x$ হয়।

$$\therefore\ f(x)=\underset{z\to x}{\text{Lt}}\frac{\sqrt{z}-\sqrt{x}}{z-x}=\underset{z\to x}{\text{Lt}}\frac{\sqrt{z}-\sqrt{x}}{(\sqrt{z}-\sqrt{x})(\sqrt{z}+\sqrt{x})}$$

$$=\underset{z\to x}{\text{Lt}}\frac{1}{\sqrt{z}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

(v) $f(x)=3x^2-2x+1$ বলিয়া $f(x)$-এর তন্ত্বক

$$f'(x)=\underset{h\to0}{\text{Lt}}\frac{f(x+h)-f(h)}{h}$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \frac{\{3(x+h)^2-2(x+h)+1\}-(3x^2-2x+1)}{h}$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \frac{3x^2+6hx+3h^2-2x-2h+1-3x^2+2x-1}{h}$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \frac{6hx-2h+3h^2}{h} = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} (6x-2+3h)$$

$$=6x-2.$$

উদা. 2 সংজ্ঞা হইতে $\sin^{-1}x$-এর অবকলনাঙ্ক নির্ণয় কর।

$\sin^{-1}x=y$ ধরিলে $\sin y=x$ এবং

$\sin^{-1}(x+h)=y+k$ ধরিলে $\sin(y+k)=x+h.$

$\therefore$ $\sin^{-1}x$-এর অবকলনাঙ্ক $\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)$

$$= \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \frac{\sin^{-1}(x+h)-\sin^{-1}x}{h}$$

$$= \underset{k\to 0}{\text{Lt}} \frac{y+k-y}{\sin(y+k)-\sin y} = \underset{k\to 0}{\text{Lt}} \frac{k}{\sin(y+k)-\sin y},$$

[ $\because$ $k\to 0$ হয় যখন $h\to 0$ হয় ]

$$= \underset{k\to 0}{\text{Lt}} \frac{k}{2\cos\frac{2y+k}{2}.\sin\frac{k}{2}}$$

$$= \underset{k\to 0}{\text{Lt}} \frac{1}{\cos\frac{2y+k}{2}.\frac{\sin\frac{k}{2}}{\frac{k}{2}}}$$

$$= \underset{k\to 0}{\text{Lt}} \frac{1}{\underset{k\to 0}{\text{Lt}} \cos\frac{2y+k}{2}.\underset{k\to 0}{\text{Lt}}\frac{\sin\frac{k}{2}}{\frac{k}{2}}}$$

$$= \underset{k\to 0}{\text{Lt}} \frac{1}{\cos\frac{2y+k}{2}.1} = \frac{1}{\cos y}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

উদা. 3. প্রথম নিয়ম হইতে log sin $x$-এর অবকলনাঙ্ক নির্ণয় কর।

$\sin x = y$ এবং $\sin(x+h) = y+k$ ধরিলে,

স্পষ্টতঃ $h$ যখন শূন্যগামী তখন $k$ও শূন্যগামী অর্থাৎ $h\to 0$ বলিয়া $k\to 0$.

$\therefore$ log sin $x$-এর অবকলনাঙ্ক $\dfrac{d(\log \sin x)}{dx}$

$$= \operatorname*{Lt}_{h\to 0} \frac{\log \sin(x+h) - \log \sin x}{h}$$

$$= \operatorname*{Lt}_{h\to 0} \frac{\log(y+k) - \log y}{h}$$

$$= \operatorname*{Lt}_{h\to 0} \frac{\log\left(\frac{y+k}{y}\right)}{h} = \operatorname*{Lt}_{h\to 0} \frac{\log\left(1+\frac{k}{y}\right)}{\frac{k}{y}} \cdot \frac{k/y}{h}$$

$$= \operatorname*{Lt}_{k\to 0} \frac{\log\left(1+\frac{k}{y}\right)}{\frac{k}{y}} \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h},$$

[ $\because$ কল্পনানুসারে $k = \sin(x+h) - \sin x$ ]

$$= 1 \cdot \frac{1}{y} \operatorname*{Lt}_{h\to 0} \frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h}, \left[\because \operatorname*{Lt}_{k\to 0} \frac{\log\left(1+\frac{k}{y}\right)}{\frac{k}{y}} = 1\right]$$

$$= \frac{1}{y} \cdot \operatorname*{Lt}_{\frac{h}{2}\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sin x} \cdot \operatorname*{Lt}_{\frac{h}{2}\to 0} \cos\left(x+\frac{h}{2}\right), \left[\because \operatorname*{Lt}_{\frac{h}{2}\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1 \text{ এবং } \sin x = y\right]$$

$$= \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \left[\because \operatorname*{Lt}_{\frac{h}{2}\to 0} \cos\left(x+\frac{h}{2}\right) = \cos x\right]$$

$$= \cot x.$$

উদা. 4. $f(x)$ অপেক্ষকমানের তত্ত্বক (derivative) $f'(x)$ হইলে সংজ্ঞা হইতে $f'(2)$ নির্ণয় কর যখন, $f(x)=|x+1|$

সংজ্ঞানুসারে, $f'(x)=\underset{h\to0}{\text{Lt}}\ \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$\therefore\ f'(2)=\underset{h\to0}{\text{Lt}}\ \frac{|2+h+1|-|2+1|}{h}$$

$$=\underset{h\to0}{\text{Lt}}\ \frac{2+h+1-2-1}{h},\quad [\because\ |2+1|=|3|>0]$$

$$=\underset{h\to0}{\text{Lt}}\ \frac{h}{h}=1.$$

উদা. 5. প্রথম নিয়ম হইতে নিম্নলিখিত অপেক্ষক মানগুলির প্রত্যেকটির তত্ত্বক নির্ণয় কর :

(i) $e^{\sqrt{x}}$ ; (ii) $e^{\cos x}$

(i) ধরা যাক $f(x)=e^{\sqrt{x}}$

তাহা হইলে, সংজ্ঞানুসারে $f'(x)=\underset{h\to0}{\text{Lt}}\ \dfrac{e^{\sqrt{x+h}}-e^{\sqrt{x}}}{h}$

$$=\underset{h\to0}{\text{Lt}}\ e^{\sqrt{x}}\frac{(e^{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}-1)}{h}$$

এখন, $\sqrt{x+h}-\sqrt{x}=z$ ধরিলে, $z\to0$ যখন $h\to0$.

$$\therefore\ f'(x)=e^{\sqrt{x}}\cdot\underset{z\to0}{\text{Lt}}\ \frac{e^z-1}{z}\cdot\frac{z}{h}$$

$$=e^{\sqrt{x}}\cdot\underset{z\to0}{\text{Lt}}\ \frac{z}{h},\quad\left[\because\ \underset{z\to0}{\text{Lt}}\ \frac{e^z-1}{z}=1\right]$$

$$=e^{\sqrt{x}}\cdot\underset{h\to0}{\text{Lt}}\ \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h},$$

[ $z$-এর মান পুনরায় বসাইয়া ]

$$=e^{\sqrt{x}}\cdot\underset{h\to0}{\text{Lt}}\ \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})},$$

[লব ও হরকে $(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})$ দিয়া গুণ করিয়া]

$$= e^{\sqrt{x}} \cdot \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$= e^{\sqrt{x}} \cdot \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

$$= e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}$$

$$= e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

∴ নির্ণেয় অন্তরক $= e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$.

(ii) $f(x) = e^{\cos x}$ ধরিলে

$$f'(x) = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \frac{e^{\cos(x+h)} - e^{\cos x}}{h} = \underset{h\to 0}{\text{Lt}}\, e^{\cos x} \cdot \frac{(e^{\cos(x+h)-\cos x} - 1)}{h}$$

$= e^{\cos x} \cdot \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \frac{e^z - 1}{z} \cdot \frac{z}{h}$, [ $z = \cos(x+h) - \cos x$ ধরিয়া ]

$= e^{\cos x} \cdot \underset{z\to 0}{\text{Lt}} \frac{e^z - 1}{z} \cdot \frac{z}{h}$, [ ∵ $x \to 0$ হইলে $z \to 0$ হয় ]

$= e^{\cos x} \cdot \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$, [ $z$-এর মান বসাইয়া ]

$$= e^{\cos x} \cdot \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \frac{-2\sin\frac{h}{2}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h}$$

$= -e^{\cos x} \cdot \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \sin x$, [ ∵ $\underset{h\to 0}{\text{Lt}} \sin(x+h) = \sin x$ ]

$= -e^{\cos x} \sin x$, $\left[ ∵ \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1 \right]$

∴ নির্ণেয় অন্তরক $= -e^{\cos x} \sin x$.

উদা. 6. অবকলনের নিয়ম অনুসারে অবকলনাঙ্ক নির্ণয় কর :

(i) $\sin x - \cos x - 2x$ ; (ii) $(x^2+2x+2)(x^2+2x+3)$ ;

(iii) $\sin x \cos x$ ; (iv) $\dfrac{x^2+1}{x}$ (v) $\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$.

(i) $$\frac{d}{dx}(\sin x+\cos x-2x)=\frac{d}{dx}.(\sin x)+\frac{d}{dx}(\cos x)-\frac{d}{dx}(2x)$$
$$=\cos x-\sin x-2.\frac{dx}{dx}$$
$$=\cos x-\sin x-2.$$

(ii) $x^2+2x+2=u$ এবং $x^2+2x+3=v$ ধরিলে

$$\frac{d}{dx}(x^2+2x+x)(x^2+2x+3)=\frac{d}{dx}(uv)=v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx}$$
$$=v\frac{d}{dx}(x^2+2x+2)+u\frac{d}{dx}(x^2+2x+3)$$
$$=v\left\{\frac{d}{dx}(x^2)+\frac{2dx}{dx}+\frac{d}{dx}(2)\right\}+u\left\{\frac{d}{dx}(x^2)+2\frac{dx}{dx}+\frac{d(3)}{dx}\right\}$$
$$=v(2x+2+0)+u(2x+2+0)$$
$$=(2x+2)(v+u)$$
$$=2(x+1)(x^2+2x+3+x^2+2x+2)$$
$$=2(x+1)(2x^2+4x+5).$$

(iii) $$\frac{d}{dx}(\sin x\cos x)=\cos x\frac{d}{dx}(\sin x)+\sin x\frac{d}{dx}(\cos x)$$
$$=\cos x.\cos x+\sin x.-\sin x$$
$$=\cos^2 x-\sin^2 x$$
$$=\cos 2x.$$

(iv) $$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+1}{x}\right)=\frac{x.\frac{d}{dx}(x^2+1)-(x^2+1)\frac{dx}{dx}}{x^2}$$
$$=\frac{x\left\{\frac{d.(x^2)}{dx}+\frac{d}{dx}(1)\right\}-(x^2+1).1}{x^2}$$
$$=\frac{x(2x+0)-(x^2+1)}{x^2}$$
$$=\frac{2x^2-x^2-1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}.$$

(v) $$\frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)=\frac{(1+\sin x)\frac{d}{dx}(\cos x)-\cos x\frac{d}{dx}(1+\sin x)}{(1+\sin x)^2}$$

$$=\frac{(1+\sin x).-\sin x-\cos x\left\{\frac{d}{dx}(1)+\frac{d(\sin x)}{dx}\right\}}{(1+\sin x)^2}$$

$$=\frac{-\sin x(1+\sin x)-\cos x(0+\cos x)}{(1+\sin x)^2}$$

$$=\frac{-\sin x(1+\sin x)-\cos^2 x}{(1+\sin x)^2}$$

$$=\frac{-\sin x-\sin^2 x-\cos^2 x}{(1+\sin x)^2}$$

$$=\frac{-\sin x-1}{(1+\sin x)^2}$$

$$=\frac{-(1+\sin x)}{(1+\sin x)^2}$$

$$=\frac{-1}{1+\sin x}=-\frac{1}{1+\sin x}.$$

**উদা. 7.** $y$-এর অবকলনাঙ্ক $y'$ হইলে নিম্নলিখিত প্রত্যেকটি প্রশ্ন হইতে $y'$ নির্ণয় কর :

i) $y=\sqrt{3x+5}$ ; (ii) $y=\cos^2 x$ ; (iii) $y=\cos 2x$ ;

(iv) $y=\log\cos x$ ; (v) $y=\sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$.

(i) $3x+5=z$ ধরিলে, $y=\sqrt{3x+5}=\sqrt{z}=z^{\frac{1}{2}}$.

$$\therefore\ \frac{dy}{dz}=\frac{1}{2}z^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{z}}\text{ ; এবং}$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{d}{dx}(3x+5)=3\frac{dx}{dx}+\frac{d(5)}{dx}=3+0=3$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{z}}\cdot 3=\frac{3}{2\sqrt{3x+5}}\ ;$$

$$\therefore\ y'=\frac{3}{2\sqrt{3x+5}}.$$

(ii) $\cos x = z$ ধরিলে

$y = \cos^2 x = z^2.$

এখন, $\frac{dz}{dx} = \frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x,$ [ অবকলনের নিয়মে ] ;

এবং $\frac{dy}{dz} = \frac{d(z^2)}{dz} = 2z = 2\cos x,$ [ অবকলনের নিয়মে ]

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = 2\cos x . -\sin x = -2\sin x \cos x$

$= -\sin 2x.$

$\therefore y' = -\sin 2x.$

(iii) $z = 2x$ ধরিলে, $y = \cos 2x = \cos z$

$\therefore \frac{dz}{dx} = \frac{d(2x)}{dx} = \frac{2dx}{dx} = 2,$ [ অবকলনের নিয়মে ]

এবং $\frac{dy}{dz} = \frac{d(\cos z)}{dz} = -\sin z = -\sin 2x.$ [ অবকলনের নিয়মে ]

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = -\sin 2x . 2 = -2\sin 2x.$

$\therefore y' = -2\sin 2x.$

(iv) $z = \cos x$ ধরিলে, $y = \log\cos x = \log z$ হয়।

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x,$ [ অবকলনের নিয়মে ]

এবং $\frac{dy}{dz} = \frac{d(\log z)}{dz} = \frac{1}{z},$ [ অবকলনের নিয়মে ]

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{1}{z} . -\sin x = \frac{-\sin x}{\cos x},$ [ $\because z = \cos x$ ]

$\therefore y' = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x.$

(v) $\frac{1}{x} = z$ ধরিলে $y = \sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \sin^{-1} z.$

$\therefore z = \sin y.$

$\therefore \frac{dz}{dy} = \frac{d(\sin y)}{dy} = \cos y = \sqrt{1-\sin^2 y},$ [ অবকলনের নিয়মে ]

$= \sqrt{1-z^2} = \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{x}\sqrt{x^2-1};$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dz}=\frac{1}{\frac{dz}{dy}}=\frac{1}{\frac{1}{x}\sqrt{x^2-1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

এবং $\frac{dz}{dx}=\frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{dx}=\frac{d(x^{-1})}{dx}=-1.x^{-1-1}=-x^{-2}.$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\cdot -x^{-2}=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\cdot -\frac{1}{x^2}$$

$$=-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\therefore \quad y'=-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

উদা. 8. $x=a(\theta-\sin\theta)$ এবং $y=a(1-\cos\theta)$ হইলে $\frac{dy}{dx}$-এর মান নির্ণয় কর।

$x=a(\theta-\sin\theta)$ বলিয়া

$$\frac{dx}{d\theta}=a\frac{d}{d\theta}(\theta-\sin\theta)=a\left(\frac{d\theta}{d\theta}-\frac{d\sin\theta}{d\theta}\right)=a(1-\cos\theta)$$

$$\therefore \quad \frac{d\theta}{dx}=1\Big/\frac{dx}{d\theta}=\frac{1}{a(1-\cos\theta)} \quad \cdots \quad (1)$$

আবার $\frac{dy}{d\theta}=a\cdot\frac{d}{d\theta}(1-\cos\theta)=a\left(\frac{d.1}{d\theta}-\frac{d\cos\theta}{d\theta}\right)$

$$=a\{0-(-\sin\theta)\}=a\sin\theta \quad \cdots \quad (2)$$

$\therefore$ (1) ও (2) হইতে,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dx}=\frac{a\sin\theta}{a(1-\cos\theta)}=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}=\cot\frac{\theta}{2}$$

উদা. 9. $f(x)=\cos^{-1}(4x^3-3x)$ হইলে $f'(x)$ (অর্থাৎ $f(x)$-এর অবকলনাঙ্ক) নির্ণয় কর।

$x=\cos\theta$ ধরিলে $\cos^{-1}x=\theta$ হয় এবং $4x^3-3x=4\cos^3\theta-3\cos\theta=\cos 3\theta$ হইবে।

$$\therefore \quad \cos^{-1}(4x^3-3x)=3\theta=3\cos^{-1}x.$$

$$\therefore \quad f(x)=\cos^{-1}(4x^3-3x)=3\cos^{-1}x$$

$$\therefore\ f'(x)=\frac{d\,(3\cos^{-1}x)}{dx}=\frac{3d\,(\cos^{-1}x)}{dx}$$

$$=\frac{-3}{\sqrt{1-x^2}},\qquad\left[\because\ \frac{d\,(\cos^{-1}x)}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right]$$

**উদা. 10.** $y=x^x$ হইলে $\frac{dy}{dx}$ এর মান নির্ণয় কর।

$y=x$ হইতে

উভয়পক্ষের লগারিদম্ লইলে, $\log y=\log x^x=x\log x$

এখন $\frac{d}{dx}(\log y)=\frac{d}{dy}(\log y)\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}$

এবং $\frac{d}{dx}(x\log x)=\log x.\frac{d}{dx}(x).+x.\frac{d}{dx}(\log x)$

$$=\log x+x\,.\,\frac{1}{x}=\log x+1$$

$$\therefore\ \frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=(1+\log x)$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=y(1+\log x)=\mathrm{x}\ \ (1+\log \mathrm{x}).$$

**উদা. 11.** $\sin y=x\sin(a+y)$ হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin^2(a+y)}{\sin a}.$$

$\sin y=x\sin(a+y)$ বলিয়া

$$x=\frac{\sin y}{\sin(a+y)}$$

$$\therefore\ \frac{dx}{dy}=\frac{\sin(a+y).\frac{d\,(\sin y)}{dy}-\sin y.\frac{d}{dy}\{\sin(a+y)\}}{\sin^2(a+y)}$$

$$=\frac{\sin(a+y).\cos y-\sin y\,.\cos(a+y)\,.\,1}{\sin^2(a+y)}$$

$$=\frac{\sin\{(a+y)-y}{\sin^2(a+y)}=\frac{\sin a}{\sin^2(a+y)}$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\frac{\sin a}{\sin^2(a+y)}}=\frac{\sin^2(a+y)}{\sin a}.$$

উদা. 12. $x^2$-এর সাপেক্ষে $\sin^{-1}x$-এর অবকলনাঙ্ক নির্ণয় কর :

$y=\sin^{-1}x$ ধরিলে $x=\sin y$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dy}=\frac{d(\sin y)}{dy}=\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=1\Big/\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \cdots \qquad (1)$$

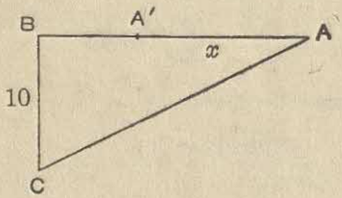
আবার $z=x^2$ ধরিলে $\frac{dz}{dx}=2x$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dz}=1\Big/\frac{dz}{dx}=\frac{1}{2x} \qquad \cdots \qquad (2)$$

$\therefore$ (1) ও (2) হইতে

$$\frac{d(\sin^{-1}x)}{dx^2}=\frac{dy}{dz}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dz}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{1}{2x}=\frac{1}{2x\sqrt{1-x^2}}.$$

উদা. 13. 100 মিটার দৌড়-পাল্লার শেষ মাথা হইতে দৌড়ের পথের সহিত লম্বরেখায় 10 মিটার দূরে দাঁড়াইয়া এক ব্যক্তি দূরদর্শনের জন্য আলোক চিত্র তুলিতেছে। প্রতিযোগিগণ শেষমাথা হইতে 10 মিটার দূরে আসিলে আলোকচিত্রের যন্ত্রটি বাম হইতে ডাইনে, সেকেণ্ডে $\frac{-3}{5}$ রেডিয়ান, হারে ঘুরান হইতেছে। সেই মুহূর্তে প্রতিযোগিগণের বেগ কত ?




42 নং চিত্র

ধরা যাক্, দৌড় পাল্লার শেষমাথা B স্থান হইতে A স্থান $x$ মিটার দূরবর্তী এবং B হইতে $\overline{AB}$-এর সহিত লম্বরেখায় 10 মিটার দূরে C স্থান অবস্থিত। প্রতি-যোগিগণ যেন A স্থানে আসিয়াছে।

স্পষ্টতঃ, BC = 10 মি এবং

$$x=10\tan\theta$$

$\therefore$ সময় $t$ সাপেক্ষে $x$-এর পরিবর্তন হার $=\frac{dx}{dt}=10\,\frac{d(\tan\theta)}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}$

$$=10\sec^2\theta\cdot\frac{d\theta}{dt}$$

এখন $x=10$ মিটার হইলে, প্রশ্নানুসারে সময় $t$ সাপেক্ষে $\theta$ কোণের পরিবর্তন হার $\frac{-3}{5}$ রেডিয়ান বলিয়া $\frac{d\theta}{dt}=-\frac{3}{5}$.

$$\therefore \quad \frac{dx}{dt}=10 \sec^2\theta \times \frac{-3}{5}=-6 \sec^2\theta$$

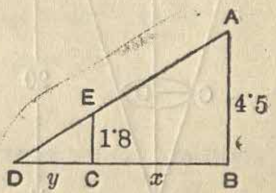
কিন্তু প্রতিযোগিগণ যখন শেষমাথা B হইতে 10 মিটার দূরে A′ বিন্দুতে আসে, তখন BA′=10 মি=BC,

$\therefore \quad \angle BCA'=\frac{\pi}{4}$ হইবে অর্থাৎ তখন $\theta=\frac{\pi}{4}$ রেডিয়ান।

$$\therefore \quad \frac{dx}{dt}=-6 \sec^2\frac{\pi}{4}=-6.(\sqrt{2})^2=-6.2=-12.$$

∴ নির্ণেয় বেগ=বাম মুখে সেকেণ্ডে 12 মিটার।

**উদা. 14.** 1·8 মিটার উচ্চতা-বিশিষ্ট এক ব্যক্তির মাথার উপর 4·5 মিটার উপরে একটি আলো ঝুলানো আছে। ঐ ব্যক্তি যদি আলোটির উল্লম্বদিকে ভূমিতলস্থিত বিন্দু হইতে সেকেণ্ডে 1·5 মিটার বেগে চলিতে থাকে, তবে (i) 6 মিটারের মাথায় তাহার ছায়াটি কত হারে দীর্ঘতর হইতে থাকিবে ; এবং (ii) কত হারেই বা তাহার ছায়াটির প্রান্তবিন্দু সরিতে থাকিবে ?



43 নং চিত্র

ধরা যাক্, A বিন্দু আলোটির অবস্থান। উহার উল্লম্বদিকে ভূতলস্থিত বিন্দু যেন B।

(i) B হইতে যাত্রা করিয়া $t$ সেকেণ্ডে লোকটি যেন $x$ মি দূরে C বিন্দুতে আসে এবং তখন তাহার ছায়া $\overline{CD}$—এর দৈর্ঘ্য যেন $y$ মিটার হয়। A ও D বিন্দু যুক্ত করা হইল।

∵ $\overline{CE}$=লোকটির উচ্চতা=1·8 মি, $\overline{AB}$=4·5 মি, $\overline{BC}=x$ মি, $\overline{CD}=y$ মি এবং △EDC ও △ADB সদৃশ,

$$\therefore \quad \frac{y}{y+x}=\frac{1·8}{4·5}=\frac{18}{45}=\frac{2}{5} \quad \text{বা} \quad 5y=2y+2x \quad \text{বা} \quad 3y=2x$$

বা $y=\frac{2}{3}x$ ; অতএব $\frac{dy}{dt}=\frac{2}{3}\cdot\frac{dx}{dt}$.

কিন্তু প্রশ্নানুসারে লোকটির বেগ=$\frac{dx}{dt}=1·5$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dt}=\frac{2}{3}\times 1·5=1$$

∴ $t$ সাপেক্ষে $y$ বা ছায়ার দৈর্ঘ্যের পরিবর্তন হার $\frac{dy}{dt}$=সেকেণ্ডে 1 মিটার।

(ii) আবার, সময়সাপেক্ষে ছায়ার প্রান্তবিন্দু যে-হারে সরিবে সেই হারেই $\overline{BD}$ বা $z$-এর দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি পাইবে, যেখানে $z=\overline{BD}$

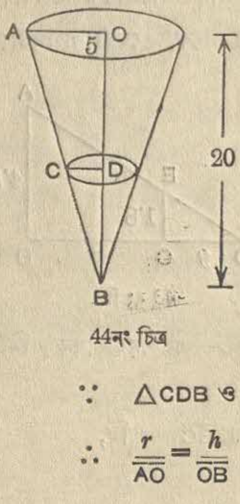
এখন, $\triangle EDC$ ও $\triangle ADB$ সদৃশ বলিয়া

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{BD}}=\frac{\overline{CE}}{\overline{BA}} \text{ বা } \frac{y}{z}=\frac{1\cdot8}{4\cdot5}=\frac{2}{5} \text{ বা } z=\frac{5}{2}y.$$

$$\therefore \quad \frac{dz}{dt}=\frac{5}{2}\frac{dy}{dt}=\frac{5}{2} \text{ বা } 2\cdot5 \text{ মি।}$$

∴ প্রশ্নোল্লিখিত ছায়ার প্রান্তবিন্দু সেকেণ্ডে 2·5 মি হারে সরিতেছে।

**উদা. 15.** এক ব্যক্তি একটি শঙ্কুর আকৃতি-বিশিষ্ট পাত্র হইতে শোলার নল দিয়া সরবৎ খাইতেছে। পাত্রটির উচ্চতা 20 সেমি ও উহার উপরকার বৃত্তাকার তলের ব্যাস 10 সেমি.। সরবতের উপরতলের উচ্চতা যখন 7 সেমি. তখন লোকটি সেকেণ্ডে 44 ঘন সেমি হারে যদি সরবৎ পান করে তবে কত হারে সরবতের উপরিভাগের উচ্চতা কমিতে থাকে ?



44নং চিত্র

প্রশ্নানুসারে অঙ্কিত চিত্র হইতে দেখা যায়,

শঙ্কুর উচ্চতা $=\overline{OB}=20$ সেমি, উহার ব্যাসার্ধ $=\overline{OA}=5$ সেমি

ধরা যাক্ $\overline{BD}=h$ সেমি এবং $\overline{CD}=r$ সেমি।

∵ $\triangle CDB$ ও $\triangle AOB$ সদৃশ,

$$\therefore \quad \frac{r}{\overline{AO}}=\frac{h}{\overline{OB}} \text{ বা } \frac{r}{5}=\frac{h}{20}.$$

$$\text{বা } r=\frac{h}{4}.$$

আবার শঙ্কুর আয়তন $v$ হইলে,

$$v=\tfrac{1}{3}\pi r^2h=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{h^2}{16}\cdot h=\frac{\pi}{48}\cdot h^3$$

∴ সময় $t$ সাপেক্ষে আয়তনের পরিবর্তনের হার

$$\frac{dv}{dt}=\frac{1}{48}\pi\, 3h^2\frac{dh}{dt}.$$

কিন্তু প্রশ্নানুসারে, যখন $h=7$ সেমি. তখন $\frac{dv}{dt}=44$ c.c.

$$\therefore \quad \frac{\pi}{48}.3.7.7.\frac{dh}{dt}=44$$

$$\text{বা} \quad \frac{dh}{dt}=\frac{44\times48}{\pi.3.7\times7}=\frac{44\times48\times7}{22\times3\times7\times7}=\frac{2\times16}{7}=4\tfrac{4}{7}$$

∴ সেকেণ্ডে $4\frac{4}{7}$ সেমি হারে শরবতের উপরিভাগের উচ্চতা কমিতেছে।

## প্রশ্নমালা 7

1. প্রথম নিয়ম হইতে $f(x)$-এর তজ্জবক নির্ণয় কর :

(i) $f(x)=3x+2$ ; (ii) $f(x)=2-3x$ ;

(iii) $f(x)=\frac{1}{3}x+1$ ; (iv) $f(x)=x+\frac{1}{3}$ ;

(v) $f(x)=mx+c$ ; (vi) $f(x)=c-\dfrac{1}{m}x$ ;

(vii) $f(x)=x^2+1$ ; (viii) $f(x)=4-2x^2$ ;

(ix) $f(x)=ax^2+b$ ; (x) $f(x)=ax^2+bx+c$ ;

(xi) $f(x)=x^3$ ; (xii) $f(x)=\sqrt[3]{x}$ ;

(xiii) $f(x)=x^4$ ;

2. সংজ্ঞা হইতে নিম্নলিখিত প্রত্যেকটি অপেক্ষকমানের তজ্জবক ( অবকলনাঙ্ক ) নির্ণয় কর :

(i) $1+\sin x$ ; (ii) $c+\cos x$ ; (iii) $\cos^{-1}x$

3. প্রথম নিয়ম হইতে নিম্নের প্রত্যেক ক্ষেত্রে $y$-এর তজ্জবক $y'$ নির্ণয় কর :

(i) $y=\log\dfrac{x}{2}$ ; (ii) $y=\log ax$ ; (iii) $y=x\log x$ ;

(iv) $y=\log\cos x$ ; (v) $y=\log\sin\left(\dfrac{x}{a}\right)$.

4. $f(x)$-এর তজ্জবক $f'(x)$ হইলে প্রথম নিয়ম হইতে নিচের প্রত্যেক ক্ষেত্রে $f'(2)$ নির্ণয় কর :

(i) $f(x)=2x^2$ ; (ii) $f(x)=\dfrac{4}{x}$ ; (iii) $f(x)=\dfrac{x^3}{3}$ ;

(iv) $f(x)=\dfrac{x^4}{2}$

5. সংজ্ঞা হইতে নিচের প্রত্যেকটি অপেক্ষকমানের তজ্জবক নির্ণয় কর :

(i) $e^{2x}$ ; (ii) $x^{e^x}$ ; (iii) $e^{ax}$ ;

6. অবকলনের নিয়ম প্রয়োগ করিয়া নিচের প্রত্যেকটি অপেক্ষকমানের অবকলনাঙ্ক নির্ণয় কর :

(i) $x^2+c$ ; (ii) $\frac{c}{x}+\frac{x}{c}$ ; (iii) $x^2+2x+\frac{1}{2}$ ;

(iv) $x^3-3x^2+c$ ; (v) $x^2-x+1-\sqrt{x}$ ;

(vi) $\sin x+\cos x$ ; (vii) $\tan x-x$ ;

(viii) $\cot x+x$ ; (ix) $e^x+\log x-ax$ ;

(x) $\sin^{-1} x+\cos^{-1} x-\log x-\frac{1}{x}$.

7. $y$-এর তত্তবক $y'$ হইলে নিচের প্রত্যেক ক্ষেত্রে $y'$ নির্ণয় কর :

(i) $y=\frac{x^4 \sin x}{4}$ ; (ii) $y=x \log x$ ;

(iii) $y=(x^2+3x) \log x$ ; (iv) $y=\sin x \cos x+x$ ;

(v) $y=\sin x \tan x$ ; (vi) $y=(x-5)(x-1)$ ;

(vii) $y=\cos x \cot x$.

(viii) $y=(x+1)(x-3)(x-1)(x+3)$

[ সংকেত : $y=(x^2-1)(x^2-9)$ ধরিয়া অগ্রসর হও।]

(ix) $y=(\sqrt{x}+1)(x+1)$ ; (x) $y=\sqrt{x+1}\,.\,(x+1)$

(xi) $y=(\sin x+1)(\cos x+1)$.

8. $f(x)$-এর তত্তবক $f'(x)$ হইলে নিচের প্রত্যেক ক্ষেত্রে $f'(x)$ নির্ণয় কর :

(i) $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ ; (ii) $f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$ ;

(iii) $f(x)=\frac{\sqrt{2x}}{x-1}$ ; (iv) $f(x)=\frac{x^2-3}{x}$ ;

(v) $f(x)=\frac{x^2}{e^x}$ ; (vi) $f(x)=\frac{e^x}{x}$ ;

(vii) $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ ; (viii) $f(x)=\frac{x}{\sin x}$ ;

(ix) $f(x)=\frac{\sin x}{1+\cos x}$ ; (x) $f(x)=\frac{\cos x}{1-\sin x}$ ;

(xi) $f(x)=\frac{1-\sin x}{1+\sin x}$ ; (xii) $f(x)=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$ ;

(xiii) $f(x)=\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$ ; (xiv) $f(x)=\frac{e^x}{x^2}$

(xv) $f(x)=\frac{\log x+1}{\log x-1}$.

9. অবকলনের নিয়মে 4 ও 5 নং প্রশ্নের উত্তর কর।

10. অপেক্ষকের অপেক্ষক মানের অবকলন-নিয়ম প্রয়োগ করিয়া নিচের প্রত্যেকটি অপেক্ষক মানের অবকলনাঙ্ক নির্ণয় কর :

(i) $\sqrt{2x+1}$ ; (ii) $(-8t)^{\frac{1}{3}}$ ; (iii) $\sqrt{\log x}$

(iv) $\sin 2x$ ; (v) $\log \sin x$ ; (vi) $\sin \log x$ ;

(vii) $\log \tan x$ ; (viii) $\log \cot x$ ; (ix) $\log \sec x$ ;

(x) $\log \operatorname{cosec} x$ ; (xi) $e^{x^2}$ ; (xii) $e^{\sin x}$ ;

(xiii) $e^{\cos x}$ ; (xiv) $e^{\tan x}$ ; (xv) $e^{ax^2+bx+c}$ ;

(xvi) $\log^{(\sin x+\cos x)}$ ; (xvii) $\cos \log x$ ; (xviii) $\sin e^x$ ;

(xix) $\sin^{-1} 2x$ ; (xx) $\sin^{-1}\sqrt{x}$ ; (xxi) $\tan^{-1} e^x$ ;

(xxii) $e^{\tan^{-1}x}$ ; (xxiii) $\sin^{-1}\sqrt{\tan x}$ ;

(xxiv) $\log \sin^{-1} x$ ; (xxv) $\sin^{-1} \log x$

11. $\dfrac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর :

(i) যখন, $x=a\cos\theta$ ও $y=b\sin\theta$ ;

(ii) যখন, $x=at^2$ ও $y=2at$ ;

(iii) যখন, $x=\sin\theta$ ও $y=\tan\theta$ ;

(iv) যখন, $x=a\sec^2\theta$ ও $y=a\tan^3\theta$ ;

(v) যখন, $x=\dfrac{3at}{1+t^3}$ এবং $y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}$.

12. $f'(x)$ নির্ণয় কর :

(i) $f(x)=\sin^{-1}(3x-4x^3)$ ;

[ সংকেত : $\sin^{-1}x=\theta$ ধর ; $3\sin\theta-4\sin^3\theta=\sin 3\theta$ বলিয়া $\sin^{-1}(3x-4x^3)=\sin^{-1}\sin 3\theta=3\theta$ ইত্যাদি ]

(ii) $f(x)=\tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}$ ; [ সংকেত : $\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ বলিয়া $\tan\theta=x$ ধরিলে $f(x)=\tan^{-1}\tan 2\theta=2\theta$ ইত্যাদি।]

(iii) $f(x)=\cos^{-1}\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$;

[ সংকেত : $x=\tan\theta$ ধর ; $\because$ $\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\cos 2\theta$,

$\therefore$ $\cos^{-1}\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=\cos^{-1}\cos 2\theta=2\theta$ ইত্যাদি। ]

(iv) $f(x)=\sin^{-1}\dfrac{2x}{1+x^2}$

[ সংকেত : $\sin 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$ এই সূত্রটির সাহায্য লও। ]

(v) $f(x)=\tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

[ সংকেত : $\sec^{-1}x=\theta$ ধরিলে $x=\sec$ এবং $\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{d(\sec\theta)}{d\theta}=\sec\theta\tan\theta$

$=x\sqrt{\sec^2\theta-1}=x\sqrt{x^2-1}$ ;

আবার, $\tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}=\tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}$

$=\tan^{-1}\cot\theta=\tan^{-1}\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\dfrac{\pi}{2}-\theta$

$\therefore$ $f(x)=\dfrac{\pi}{2}-\theta$ এবং $f'(x)=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=-\dfrac{d\theta}{dx}$ ইত্যাদি। ]

13. $y'$ যদি $y$-এর অবকলনাঙ্ক হয়, তবে নিচের প্রত্যেকটি সমীকরণের উভয়পক্ষের লগারিদম লইয়া $y'$ নির্ণয় কর :

(i) $y=a^x$ ; (ii) $y=(1+x)^x$ ;

(iii) $y=(1-x)^x$ ; (iv) $y=a^{e^x}$;

(v) $y=e^{a^x}$.

14. যদি $y=\{f(x)\}^{g(x)}$ হয়, তবে লগারিদম লইয়া অবকলন দ্বারা দেখাও যে, $y$-এর অবকলনাঙ্ক $y'=\{f(x)\}^{g(x)}\left\{g(x).\dfrac{f'(x)}{f(x)}+g'(x)\,.\,\log f(x)\right\}$, যেখানে $g'(x)=g(x)$-এর অবকলনাঙ্ক।

15. $\dfrac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর, যখন—

(i) $x^2+y^2=1$ ; (ii) $3x^2=2y^3$ ;

(iii) $x^2+y^2=\log(xy)$ ; (iv) $x^2-y^2=2xy$ ;

(v) $e^{xy}-mxy=x$ ; (vi) $y=x^y$ ;

(vii) $x=y^x$ ; (viii) $\sin y=\cos x$ ;

(ix) $x^3+y^3=3axy$ ; (x) $x^y=y^x$ .

16. $\dfrac{dy}{dz}=\dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dz}$ — এই সূত্রের সাহায্যে,

(i) $x^2$ সাপেক্ষে $x^4$-এর অবকলন কর ;

(ii) $\cos x$-সাপেক্ষে $\sin x$-এর অবকলন কর ;

(iii) $\sin x$-সাপেক্ষে $\cos x$-এর অবকলন কর ;

(iv) $\sqrt{1+x}$-সাপেক্ষে $\sin^{-1}x$-এর অবকলনাঙ্ক নির্ণয় কর ;

(v) $\sin^{-1}x$-সাপেক্ষে $\cos^{-1}x$-এর অবকলন কর ।

17. উত্তাপ-প্রয়োগে একটি বৃত্তাকার ধাতব পাতের ব্যাসার্ধ সেকেণ্ডে ·021 বর্গ-সেন্টিমিটার পরিমাণ বৃদ্ধি পায়। উহার ব্যাসার্ধ যখন 5 সে.মি., তখন কত হারে উহার আয়তন বৃদ্ধি পাইতে থাকিবে ?

18. এক ব্যক্তি দেখিল, মাটি হইতে 3 কিলোমিটার উর্ধ্বে থাকিয়া সমান্তরাল রেখায় একটি ব্যোমযান তাহার মাথার উপর আসিতেছে। ঐ ব্যক্তির চক্ষু হইতে ব্যোমযানটি পর্যন্ত রেখাটি সমান্তরাল রেখার সহিত $\frac{\pi}{3}$ রেডিয়ান পরিমাণ কোণ উৎপন্ন করে এবং তাহা সেকেণ্ডে ·06 রেডিয়ান হারে পরিবর্তিত হয়। ব্যোমযানটি কত বেগে চলিতেছে ? ঐ ব্যক্তি হইতে ব্যোমযানের দূরত্ব সেকেণ্ডে কত হারে পরিবর্তিত হইতেছে ?

19. একটি শঙ্কুর আকার-বিশিষ্ট পাত্রের উপরতলের ব্যাসার্ধ 5 সে.মি. এবং উচ্চতা 15 সে.মি.। ঐ পাত্রে সেকেণ্ডে $1\frac{4}{7}$ ঘন-সেন্টিমিটার জল পড়িতেছে। উহাতে জলের তল যখন 9 সে.মি. উচ্চে ওঠে, তখন কত হারে উহার উচ্চতা বৃদ্ধি পাইবে ?

20. 7·5 মিটার উচ্চে একটি আলো ঝুলিতেছে। ঐ আলোর ঠিক তলায় ভূতল-স্থিত বিন্দু হইতে একটি বালক সেকেণ্ডে 4 মিটার হারে সম্মুখে চলিতেছে। বালকটির উচ্চতা 1·5 মিটার হইলে ঐ বালকটির ছায়া কত হারে দীর্ঘতর হইতেছে ?

21. 5 মিটার লম্বা একটি মইয়ের মাথা একটি দেওয়াল ঘেঁষিয়া সেকেণ্ডে $1\frac{1}{2}$ মি. হারে নিচে নামিতেছে। মইটির মাথা যখন মাটি হইতে 4 মিটার উপরে অবস্থিত সেই মুহূর্তে মইয়ের তল-স্থিত প্রান্ত কত হারে সরিতে থাকিবে ?

# পঞ্চম অধ্যায়

## দ্বিতীয় ক্রমের তত্ত্ববক

## (Derivative of the Second Order)

### 5.1. অবকল (Differentials) :

এ-পর্যন্ত $\frac{d}{dx}$ দ্বারা $x$-সাপেক্ষে একটি অবকলন-প্রক্রিয়াসূচক চিহ্ন বুঝানো হইয়াছে। সুতরাং $\frac{dy}{dx}$ বলিতে বুঝিতে হইয়াছে $x$-সাপেক্ষে $y$-এর তত্ত্ববক বা অবকলনাঙ্ক। এই অর্থে $dy$ ও $dx$-এর স্বতন্ত্র অস্তিত্ব ও অর্থ স্বীকৃত হয় নাই। সেই কারণে বলা হইয়াছে যে $\frac{dy}{dx}$ কখনও $(dy \div dx)$ বুঝায় না।

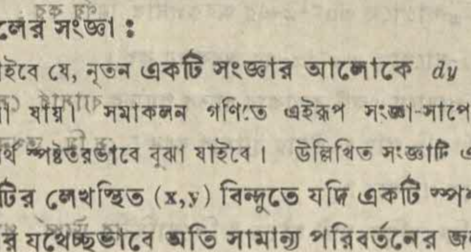
**(a) অবকলের সংজ্ঞা :**

এখন দেখা যাইবে যে, নূতন একটি সংজ্ঞার আলোকে $dy$ ও $dx$-এর স্বতন্ত্র সত্তা স্বীকার করা যায়। সমাকলন গণিতে এইরূপ সংজ্ঞা-সাপেক্ষে $dy$ ও $dx$-এর স্বতন্ত্র অস্তিত্ব ও অর্থ স্পষ্টতরভাবে বুঝা যাইবে। উল্লিখিত সংজ্ঞাটি এইরূপ :

**f-অপেক্ষকটির লেখস্থিত (x,y) বিন্দুতে যদি একটি স্পর্শক অঙ্কন করা যায়, তবে x-এর যথেচ্ছভাবে অতি সামান্য পরিবর্তনের জন্য ঐ স্পর্শকের উপর যে-একটি বিন্দু পাওয়া যায়, তাহার কোটি ও y-এর অন্তরফলকে y-এর অবকল বলে এবং তাহাকে dy-দ্বারা সূচিত করা হয়।**

**(b) অবকলের সূত্র :**

ধরা যাক, $f$ অপেক্ষকটির সংজ্ঞা, $y=f(x)$. উহার লেখস্থিত $(x,y)$ বিন্দুটি P দ্বারা




45 নং চিত্র

চিহ্নিত। P বিন্দুগামী একটি ছেদক যেন $\overleftrightarrow{PQ}$ এবং স্পর্শকটি যেন $\overrightarrow{TP}$. Q বিন্দু

লেখটির উপর অবস্থিত এবং P ও Q হইতে ভুজাক্ষের উপর লম্ব যেন যথাক্রমে PM ও $\overline{QN}$. PL ∥ MN এবং $\overline{PL}$ ও $\overrightarrow{TP}$, $\overline{QN}$-কে যথাক্রমে L ও R বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

এখন, $\overline{PL}$ যদি $x$-এর $\delta x$ পরিমাণ পরিবর্তন সূচিত করে, তবে ঐ পরিমাণ-পরিবর্তনের জন্য $\overrightarrow{TP}$-এর উপর যেন R বিন্দুটি পাওয়া যায়। সংজ্ঞানুসারে R-এর কোটি NR ও $y$-এর অন্তরফল, অর্থাৎ (NR $-y$) এক্ষেত্রে $y$-এর **অবকল।**

এখন, $NR-y=NR-MP=NR-NL=RL$ ;

এবং $RL=\frac{RL}{PL}.\ PL=PL.\tan RPL=f'(x).\ \delta x.$

[ ∵ $(x, y)$ বিন্দুগামী স্পর্শকের নতি $\tan RPL=y$ বা $f(x)$-এর তন্তুবক $f'(x)$ ]

সুতরাং সংজ্ঞানুসারে (NR $-y$) বা RL

$=y$-এর অবকল $=dy$, (৩)

এবং $dy=f'(x).\ \delta x$, অথবা $df(x)=f'(x).\ \delta x.$

কিন্তু যদি $f(x)=x$ হয়, তবে $f'(x)=1.$ সেক্ষেত্রে $f(x)$-এর স্থলে $x$ বসাইলে,

$$dx=f'(x).\ \delta x=1.\ \delta x=\delta x$$

$$\therefore\ dy=f'(x).\ dx.$$

অতএব, **অপেক্ষক-বিশেষের সাপেক্ষে চলকটির অবকল ঐ অপেক্ষকের নিরপেক্ষ চলকটির অবকল দ্বারা গুণিত তন্তুবকের সমান হয়।**

**(c) 'অবকল' পরিভাষার ব্যাখ্যা :**

"অবকলন"-এর আভিধানিক অর্থ—বিয়োগফল বা অবকল গ্রহণ অর্থাৎ Subtraction. আসলে, অবকল যে-একটি বিয়োগফল, তাহা অবকলের সংজ্ঞা হইতেই স্পষ্ট বুঝা যায়।

**(d) dy ও δy-এর পার্থক্য :**

$x$-এর পরিবর্তন $\delta x$ হইলে $y$-এর পরিবর্তন যদি $\delta y$ হয়, তবে

$$y+\delta y=f(x+\delta x).$$

তাহা হইলে, $(x, y)$ এবং $(x+\delta x, y+\delta y)$—এই দুইটি বিন্দুই $f$-এর লেখটির উপর অবস্থিত।

কিন্তু $(x+\delta x,\ y+dy)$ বিন্দুটি অবস্থিত $f$-এর লেখটির $(x, y)$ বিন্দুগামী স্পর্শকটির উপর।

45নং চিত্র হইতে দেখা যায় $\delta y = \text{LQ}$ এবং $dy = \text{LR}$. স্পষ্টতঃ $dy$ মানটি $\delta y$ হইতে ক্ষুদ্রতর।

অতএব **বিশেষভাবে লক্ষণীয়** যে, $dy = f'(x) . dx$ সূত্রে $\delta x = dx$ হইলেও $\delta y \neq dy$.

বলা বাহুল্য, $\delta x$ বা $dx$ যত ক্ষুদ্র হইবে $\delta y$ ও $dy$-এর পার্থক্য ততই ক্ষুদ্র হইবে।

অতএব $\delta x \to 0$ হইলে $\delta y \to dy$ হইবে।

সুতরাং $x$-এর অতিক্ষুদ্র পরিবর্তন $\delta x$-এর জন্য $y$-এর পরিবর্তন $\delta y$ ও $dy$-এর ক্ষুদ্র পার্থক্যটুকুকে অগ্রাহ্য করিলে $dy$-এর মানই $\delta y$-এর আসন্নমান হয়।

[ সূত্রের সাহায্যে $dy$ বা $y$-এর অবকল-নির্ণয় সহজসাধ্য এবং ঐ অবকলের সাহায্যে সহজেই আসন্নমান প্রভৃতি নির্ণয় করা যায়। পরবর্তী উদাহরণমালায় ইহার প্রয়োগ দেখানো হইয়াছে। ]

(e) **অবকল সহগ (Differential coefficient)**

$dy = f'(x)dx$ সূত্রে $f'(x)$ হইল $dx$-এর সহগ। এখন $dy$ যেমন $y$-এর অবকল, তেমনি $dx$-কেও $x$-এর অবকল বলা যায়। এই অর্থে $f'(x)$ একটি অবকল-সহগ। সেইজন্য $f(x)$-এর অন্তরক $f'(x)$ **অবকল সহগ** (Differential coefficient) নামেও সুপরিচিত।

**5·2. অবকল-সংক্রান্ত সূত্রাবলী ( Formulae involving differentials) :**

অবকলের সংজ্ঞা $dy = f'(x) . dx$ বলিয়া অবকল-সহগ, $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$.

$\delta x \to 0$ হইলে $\delta y \to dy$ হয় এবং সেক্ষেত্রে, অবকল-সহগ এবং অন্তরক সমার্থক হইয়া পড়ে। এইভাবে দেখিলে অবকল-সহগকে দুইটি অবকলের অনুপাত-রূপে গণ্য করা যায় এবং তাহা হইতে অবকল-সংক্রান্ত নিম্নলিখিত সূত্রগুলি পাওয়া যায়।

(i) $d(c) = 0,\ \left[ \because\ \dfrac{d(c)}{dx} = 0,\quad \therefore\ dc = 0 . dx = 0. \right]$

(ii) $d(x) = dx,\ \left[ \because\ \dfrac{d(x)}{dx} = 1,\quad \therefore\ d(x) = dx. \right]$

(iii) $d(u + v + \cdots) = du + dv + \cdots,$

$$\left[\text{কারণ, } \frac{d(u+v+\cdots)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \cdots = \frac{du + dv + \cdots}{dx}\right]$$

(iv) $d(cv)=cdv$, যেখানে $c$ একটি ধ্রুবক-সংখ্যা ;

$$\left[ \text{কারণ } \frac{d(cv)}{dx}=\frac{cdv}{dx} \text{ বলিয়া } d(cv)=cdv \right]$$

(v) $d(uv)=vdu+udv$,

$$\left[ \therefore \frac{d(uv)}{dx}=\frac{vdu}{dx}+\frac{udv}{dx}=\frac{vdu+udv}{dx} \right].$$

(vi) $d(x^n)=nx^{n-1}.dx \qquad \left[ \because \frac{d(x^n)}{dx}=n\,x^{n-1} \right]$

(vii) $d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}$,

$$\left[ \therefore \frac{d(u/v)}{dx}=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}=\frac{vdu-udv}{dx.v^2} \right]$$

(viii) $d(\log v)=\frac{dv}{v}$, $\left[ \frac{d(\log v)}{dx}=\frac{1}{v}\cdot\frac{dv}{dx}=\frac{dv}{v.dx} \right]$

(ix) $d(\sin v)=\cos v.dv, \qquad \left[ \because \frac{d(\sin v)}{dv}=\cos v \right]$

(x) $d(\cos v)=-\sin v\,dv \qquad \left[ \because \frac{d(\cos v)}{dv}=-\sin v \right]$ ইত্যাদি।

## উদাহরণমালা

উদা. 1. মাপিয়া দেখা গেল যে, একটি বৃত্তের ব্যাস 13 সেন্টিমিটার দীর্ঘ। এই মাপে ভুলের পরিমাণ যদি ·14 সেন্টিমিটার হইয়া থাকে, তবে ঐ বৃত্তের আয়তনের মাপে সর্বাধিক কত পরিমাণ ভুল হইবে ?

বৃত্তের ব্যাস $=2r$ এবং আয়তন $=A$ হইলে,

$$A=\pi r^2,$$

এখানে $2r=13$ সে.মি. ; সুতরাং $r=6{\cdot}5$ সে মি.। দ্বিতীয়ত, $2r$ মাপিতে ভুলের পরিমাণ ·14 সে.মি. হয় বলিয়া $r$ মাপিতে ভুলের পরিমাণ হইবে $\frac{{\cdot}14}{2}$ বা ·07 সে মি.।

এখন অবকল লইলে,

$$dA=2\pi r.dr$$

প্রশ্নানুসারে, $dr$ ব্যাসার্ধ $r$ মাপিবার সময় ভুলের পরিমাণ $= \cdot 07$ সে.মি.।

স্থতরাং এই ভুলের জন্য আয়তনের মাপে প্রাসঙ্গিক ভুলের পরিমাণ হইবে $d\Delta$.

$\therefore \quad d\Delta = 2\pi . 6\cdot 5 . \cdot 07$ ঘন সে.মি., $\quad [\quad r = 6\cdot 5$ সে.মি. ]

$= \dfrac{2 \times 22 \times 6\cdot 5 \times \cdot 07}{7}$ ঘন সে.মি.

$= 22 \times 13 \times \cdot 01$ ঘন সে.মি.

$= 2\cdot 86$ ঘন সে.মি. ( প্রায় )।

উদা. 2. $\sin\ 60° = 0\cdot 86603$ এবং $1° = 0\cdot 01745$ রেডিয়ান হইলে অবকলনের সাহায্যে $\sin 62°$-এর 4 দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান নির্ণয় কর।

ধরা যাক্, $y = \sin 60°$

তাহা হইলে, $dy = \cos 60° . dx = \frac{1}{2} . dx$

এখানে $x$-এর $2°$ পরিমাণ পরিবর্তন ধর্তব্য এবং $2° = 0\cdot 01745 \times 2$ রেডিয়ান

$\therefore \quad dx = 2 \times 0\cdot 01745$

$\therefore \quad dy = \frac{1}{2} \times 2 \times 0\cdot 01745 = 0\cdot 01745.$

অতএব $x$ যখন $x + dx$ ( অর্থাৎ $60°$ হইতে $60° + 2° = 62°$ ) হইবে, $y$ তখন $y$ হইতে $y + dy$-এ পরিবর্তিত হইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় মান. $y + dy = \sin 60° + 0\cdot 01745 = \cdot 86603 + \cdot 01745$

$= \cdot 88348 = \cdot 8835$ ( প্রায় )।

উদা. 3. $\log 10 = 2\cdot 303$ হইলে অবকলনের সাহায্যে $\log\ 10\cdot 2$-এর আসন্ন মান নির্ণয় কর।

$y = \log x$ ধরিলে, $dy = \dfrac{1}{x} dx.$

এখানে, $x = 10,\ dx = (10\cdot 2 - 10) = \cdot 2$ এবং $y = \log\ 10 = 2\cdot 303.$

$\therefore$ $x$ যখন $x + dx$-তে অর্থাৎ 10 হইতে $10 + \cdot 02$ বা $10\cdot 2$ তে বৃদ্ধি পাইবে, তখন $y$-এর মান হইবে $y + dy$

এখন, $dy = \frac{1}{10} . \cdot 2 = \cdot 02$

$\therefore \quad y + dy = 2\cdot 303 + \cdot 02 = 2\cdot 323$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $\log 10\cdot 2 = 2\cdot 323$ ( প্রায় )।

উদা. 4. $e^{2\cdot 3} = 9\cdot 9742$ হইলে অবকলনের সাহায্যে $e^{2\cdot 303}$-এর আসন্ন মান কত হইবে নির্ণয় কর।

$y = e^x$ ধরিলে $\quad dy = \dfrac{d\ (e^x)}{dx} . dx = e^x . dx$

এখানে, $x=2{\cdot}3$, $dx=(2{\cdot}303-2{\cdot}3)={\cdot}003$, এবং $y=e^x=e^{2\cdot 3}=9{\cdot}9742$.

$$\therefore\quad dy=9{\cdot}9742\times{\cdot}003={\cdot}0279226$$

$$\therefore\quad e^{2\cdot303}=y+dy=9{\cdot}9742+{\cdot}0279226=10{\cdot}0021226$$

$$=10 \text{ ( প্রায় )।}$$

## প্রশ্নমালা ৪

1. 10 সে.মি. বাহুবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্রের বাহু মাপিবার সময় ·05 সে.মি. পরিমাণ ভুল হয়। ঐ ভুলের দরুন বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের মাপে কত ভুল হইবে?

2. একটি বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 10 সে.মি.। ঐ মাপে 0·1 পরিমাণ ভুল হইয়া থাকিলে বর্গক্ষেত্রটির আয়তনের মাপে কত ভুল হইবে?

3. একটি ঘনকের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা প্রত্যেকটি 15 সে.মি.; ঐ মাপে ভুলের পরিমাণ 0·05 সে.মি. হইলে ঘনকটির আয়তন ও সমগ্র তলের মাপে কত পরিমাণ ভুল হইবে?

4. একটি বৃত্তাকার তারের আংটির ব্যাস 7 সে.মি. এবং তারের বেধ 0·2̇7 সে.মি হইলে অবকল লইয়া ঐ আংটির অভ্যন্তর ভাগের ক্ষেত্রফল-নির্ণয়ে কত পরিমাণ ভুল হইবে নির্ণয় কর।

[ সংকেত: এখানে $r=\frac{7}{2}$ বা 3·5 সে.মি., তারের বেধ অগ্রাহ্য করিলে ভুল $dr=0{\cdot}\dot{2}\dot{7}$ হইবে। বৃত্তের ক্ষেত্রফল $A=\pi r^2$ হইতে অবকল লও। ]

5. $y=x^{2/3}$ হইলে, যখন $x=64$ একক তখন $x$ মাপিতে 0·6 একক ভুল হয়। ইহার ফলে, (i) $y$-এর মাপে কত ভুল হইবে?

প্রাপ্তফলের ভিত্তিতে, (ii) $(64{\cdot}6)^{2/3}$ এবং (iii) $(63{\cdot}6)^{2/3}$-এর আসন্ন মান কত হইবে?

[ সংকেত: (i) $dy={\cdot}1$; $64{\cdot}6=x+dx$ এবং $63{\cdot}6=x-dx$. $x$ হইতে $x\pm dx$ পরিবর্তনের জন্য $y$-এর পরিবর্তন হইবে $y\pm dy$ ইত্যাদি।

6. $1^\circ=0{\cdot}01745$ রেডিয়ান হইলে $\tan 46^\circ$ এর আসন্ন মান নির্ণয় কর।

7. $\sin 60^\circ=0{\cdot}86603$ এবং $1^\circ=0{\cdot}01745$ রেডিয়ান হইলে (i) $\sin 62^\circ$ এবং (ii) $\sin 58^\circ$ এর আসন্ন মান নির্ণয় কর।

[ সংকেত: এখানে $dx=2^\circ=2\times0{\cdot}01745={\cdot}03490$ এবং $\cos 60^\circ={\cdot}5$, $y=\sin x$ হইতে $dy$-এর মান এবং তাহার পর $y\pm dy$-এর মান নির্ণেয়। ]

8. $\log 8 = 2\text{·}0794$ হইলে, অবকল লইয়া

(i) $\log 8\text{·}3$ ও (ii) $\log 7\text{·}7$ এর আসন্ন মান নির্ণয় কর।

9. $e^{2\cdot 4} = 11\text{·}023$ হইলে অবকলের সাহায্যে

$e^{2\cdot 5}$-এর আসন্ন মান নির্ণয় কর।

10. $\log 10 = 2\text{·}303$ হইলে $e^{2\cdot 302}$-এর তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান নির্ণয় কর।

[ সংকেত : $\log_e 10 = 2\text{·}303$ হইলে $e^{2\cdot 303} = 10$ ধর ]

**5·3. দ্বিতীয় ক্রমের তদ্ভবক (Derivative of the second order) :**

পূর্বেই ( 4·1 অনুচ্ছেদে ) বলা হইয়াছে যে, একটি অপেক্ষক $f$-এর প্রসারভুক্ত প্রতিটি $x$-মান হইতে $f$-এর $(x, f(x))$ বিন্দুর নতিসূচক একটি $f'(x)$ মান পাওয়া গেলে $f'(x)$ হইবে $f(x)$ এর তদ্ভবক। স্পষ্টত $f(x)$ অপেক্ষক-মান হইতে এইভাবে প্রাপ্ত $f'(x)$ হইবে অপর অপেক্ষক $f'$-এর একটি অপেক্ষক-মান। সুতরাং $f'$-অপেক্ষকের মান বলিয়া $f'(x)$-এরও দ্বিতীয় আরেকটি তদ্ভবক পাওয়া যাইতে পারে। যদি তাহা পাওয়া যায়, তবে সেই দ্বিতীয় তদ্ভবকটিকে $f''(x)$ সংকেতে প্রকাশ করা যাইবে এবং তাহাকে **বলা হইবে $f(x)$-এর দ্বিতীয় ক্রমের তদ্ভবক।**

এখন, $y = f(x)$ হইলে

$y$-এর তদ্ভবক, $f'(x)$ বা $y'$ বা $\dfrac{dy}{dx}$ দ্বারা সূচিত হয়।

কাজেই $f(x)$-এর দ্বিতীয় ক্রমের তদ্ভবক যেমন সংজ্ঞানুসারে $f''(x)$ দ্বারা সূচিত হয়, তেমনি $y$-এর দ্বিতীয় ক্রমের তদ্ভবক-কে $y''$ বা $\dfrac{d^2y}{dx^2}$-দ্বারা সূচিত করা যায় কারণ,

$$\frac{d^2y}{dx} \text{ -এর অর্থ } \frac{dy}{dx} \text{ এর } \frac{d}{dx}$$

অর্থাৎ, $\dfrac{d}{dx} \cdot \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d^2y}{dx^2}$.

স্পষ্টত, $y$-এর তদ্ভবক যেমন $y$-এর $\dfrac{d}{dx}$ অর্থাৎ $\dfrac{dy}{dx}$

তেমনি $\dfrac{dy}{dx}$-এর তদ্ভবক $\dfrac{dy}{dx}$-এর $\dfrac{d}{dx}$ বা $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

লক্ষণীয় যে $\frac{d}{dx} \cdot \frac{dy}{dx}$ কে $\frac{d^2y}{(dx)^2}$ রূপে না লিখিয়া

$\frac{d^2y}{dx^2}$ রূপে লেখাই রীতি।

সুতরাং (i) $y = 2x^2$ হইলে,

$$\frac{dy}{dx} = 2.2x = 4x$$

এব $\frac{d}{dx} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(4x) = 4.$

অর্থাৎ $\frac{d^2y}{dx^2} = 4.$

(ii) অনুরূপে, $y = \sin x$ হইলে,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x$$

এবং $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x.$

(iii) সেইরূপে, $y = \sqrt{x}$ হইলে

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d(\sqrt{x})}{dx}\right) = \frac{d}{dx} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dx}\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot -1 \quad x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}}$$

$$= -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}.$$

(iv) দ্বিতীয় ক্রমের তন্ত্বকের একটি সুপরিচিত প্রয়োগের ক্ষেত্র হইল বেগ-পরিবর্তনের হার নির্ণয়ে। $s$ দূরত্ব যাইতে $t$ সময় লাগিলে গড় বেগ হয় $\frac{s}{t}$ এবং $t$ সময়ের মাথায় তাৎক্ষণিক (instantaneous) বেগ হইবে $\frac{ds}{dt}$ পরিমাণ। অর্থাৎ বেগ, $v = \frac{ds}{dt}$; অতএব $s = f(t)$ হইলে $\frac{ds}{dt} = f'(t)$ এবং সেই কারণে $v = \frac{ds}{dt} = \;' t$

এখন বেগ যদি পরিবর্তনশীল হয়, তবে বলবিদ্যায় বেগের পরিবর্তন-হারকে ত্বরণ (acceleration) বলে। সুতরাং ত্বরণকে '$a$'-দ্বারা সূচিত করিলে

$$(\text{ত্বরণ})\ a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2s}{dt}.$$

এইবার পরবর্তী উদাহরণমালায় দ্বিতীয় ক্রমের তন্ত্বক-নির্ণয়ে বিবিধ কৌশল দেখানো যাইতেছে।

## উদাহরণমালা

উদা. 1. $y=ax^3+bx^2+c$ হইলে $\frac{d^2y}{dx^2}$ নির্ণয় কর।

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(ax^3+bx^2+c)=\frac{adx^3}{dx}+\frac{bdx^2}{dx}+\frac{d(c)}{dc}$$

$$=3ax^2+2bx+0=3ax^2+2bx.$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(3ax^2+2bx)$$

$$=3a\frac{dx^2}{dx}=2b\frac{d(x)}{dx}=6ax+2b.$$

উদা. 2. $\frac{1+2x}{1-2x}$ -এর দ্বিতীয় ক্রমের তন্তবক নির্ণয় কর।

$y=\frac{1+2x}{1-2x}$ ধরিলে,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1+2x}{1-2x}\right)=\frac{(1-2x).\frac{d}{dx}(1+2x)-(1-2x).\frac{d}{dx}(1-2x)}{(1-2x)^2}$$

$$=\frac{2(1-2x)-(1-2x)\times-2}{(1-2x)^2}$$

$$=\frac{2.4x+2-4x}{(1-2x)^2}=4(1-2x)^{-2}$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2}=4\frac{d}{dx}(1-2x)^{-2}=4\times-2(1-2x)^{-2-1}.\frac{d(-2x)}{dx}$$

$$=-8(1-2x)^{-3}.-2=16(1-2x)^{-3}$$

$$=\frac{16}{(1-2x)^3}$$

$\therefore$ $\frac{1+2x}{1-2x}$-এর দ্বিতীয় ক্রমের তন্তবক$=\frac{16}{(1-2x)^3}$.

উদা. 3. $y=\sqrt{a^2+x^2}$ হইলে $y''$ নির্ণয় কর।

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{d(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}}{dx}=\frac{1}{2}(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}-1}.\frac{dx^2}{dx}$$

$$=\frac{1}{2}(a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}.2x=\frac{x}{(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

$$\therefore \quad y'' = \frac{d}{dx}y' = \frac{d}{dx}\left\{\frac{x}{(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}}\right\} = \frac{(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{dx}{dx} - x\frac{d}{dx}(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}}{\left\{(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}\right\}^2}$$

$$= \frac{(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}} - x \cdot \frac{1}{2}(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}-1} \cdot \frac{dx^2}{dx}}{(a^2+x^2)}$$

$$= \frac{(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{x \cdot \frac{1}{2} \cdot 2x}{(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}}}{(a^2+x^2)} = \frac{\frac{a^2+x^2-x^2}{(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}}}{(a^2+x^2)}$$

$$= \frac{a^2}{(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}.(a^2+x^2)} = \frac{a^2}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

উদা. 4. $y = e^x \cos x$ হইলে $\frac{d^2y}{dx^2}$ নির্ণয় কর।

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^x \cos x) = e^x \frac{d}{dx}\cos x + \frac{de^x}{dx}\cos x$$

$$= -e^x \sin x + e^x \cos x = e^x(\cos x - \sin x)$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\{e^x(\cos x - \sin x)\}$$

$$= (\cos x - \sin x)\frac{de}{dx} + e^x . \frac{d}{dx}(\cos x - \sin x)$$

$$= (\cos x - \sin x)\, e^x + e^x(-\sin x - \cos x)$$

$$= e^x(\cos x - \sin x - \sin x - \cos x)$$

$$= -2e^x \sin x$$

উদা. 5. $\log \sqrt{x}$-এর দ্বিতীয় তত্ত্বক নির্ণয় কর।

$y = \log \sqrt{x}$ ধরিলে $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{d\sqrt{x}}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}$.

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2x}\right) = \frac{2x.\frac{d(1)}{dx} - 1.\frac{d}{dx}(2x)}{(2x)^2}$$

$$= \frac{0-2}{4x^2} = \frac{-2}{4x^2} = \frac{1}{2x^2}.$$

অর্থাৎ $\log \sqrt{x}$-এর দ্বিতীয় তত্ত্বক $= -\frac{1}{2x^2}$.

উদা. 6. $y=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ হইলে $\frac{d^2y}{dx^2}$ -এর মান কত

$$z=\frac{1}{x} \text{ ধরিলে}$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{d}{dx}(x^{-1})=-1\,.\,x^{-1-1}=-\frac{1}{x^2}$$

$$\therefore \quad y=\sin\frac{1}{x}=\sin z \text{ হইতে}$$

$$\frac{dy}{dx}(\sin z)\,.\,\frac{dz}{dx}=\cos z\,.\,\frac{-1}{x^2}=-\frac{\cos(1/x)}{x^2}$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{-\cos 1/x}{x^2}\right)$$

$$=-\frac{\left\{x^2\,.-\sin\frac{1}{x}\,.\,-\frac{1}{x^2}-\cos\frac{1}{x}\,.\,2x\right\}}{x^4}$$

$$=\frac{2x\cos\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x}}{x^4}.$$

উদা. 7. $y=a\cos\theta$ এবং $x=b\sin\theta$ হইলে $\frac{d^2y}{dx^2}$ -এর মান কত ?

$$y=a\cos\theta \text{ হইতে } \frac{dy}{d\theta}=-a\sin\theta$$

$$\text{এবং } x=b\sin\theta \text{ হইতে } \frac{dx}{d\theta}=b\cos\theta$$

$$\therefore \quad \frac{d\theta}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{1}{b\cos\theta}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dx}=-a\sin\theta\,.\,\frac{1}{b\cos\theta}=-\frac{a}{b}\tan\theta.$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(-\frac{a}{b}\tan\theta\right)=-\frac{a}{b}.\frac{d}{dx}(\tan\theta)$$

$$=-\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{d\theta}(\tan\theta).\;\frac{d\theta}{dx}=-\frac{a}{b}\sec^2\theta\,.\,\frac{d}{dx}$$

$$=-\frac{a}{b}\sec^2\theta\,:\,\frac{1}{b\cos\theta}=-\frac{a}{b^2}\sec^2\theta.\sec\theta=-\frac{a}{b^2}\sec^3\theta.$$

উদা. 8. $y=\sin^{-1}x$ হইলে $\frac{d^2y}{dx^2}$ -এর মান নির্ণয় কর।

$$y=\sin^{-1} x \text{ হইলে } \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)=\frac{d}{dx}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=-\tfrac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}-1}.-2x$$

$$=x(1-x^2)^{-3/2}=\frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}.$$

উদা. 9. $y=e^{x^2}$ হইলে $\frac{d^2v}{dx^2}$ -এর মান কত?

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(e^{x^2})=e^{x^2}.\frac{d(x^2)}{dx}=e^{x^2}.2x$$

$$\therefore \quad \frac{d^2v}{dx}=\frac{d}{dx}\left(2x.e^{x^2}\right)=2\frac{d}{dx}\left(x.e^{x^2}\right)$$

$$=2\left\{e^{x^2}.\frac{d(x)}{dx}+\frac{x\ d(e^{x^2})}{dx}\right\}$$

$$=2\left\{e^{x^2}+x.e^{x^2}\ 2x\right\}=2e^{x^2}(1+2x^2).$$

উদা. 10. $y=a\cos x+b\sin x$ হইলে দেখাও যে,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-y.$$

$$\frac{dv}{dx}=\frac{d}{dx}(a\cos x+b\sin x)=a\frac{d}{dx}(\cos x)+b\frac{d}{dx}(\sin x)$$

$$=-a\sin x+b\cos x$$

$$\therefore \quad \frac{d^2v}{dx^2}=\frac{d}{dx}(b\cos x-a\sin x)$$

$$=b\frac{d}{dx}(\cos x)-a\frac{d}{dx}(\sin x)$$

$$=-b\sin x-a\cos x$$

$$=-(a\sin x+b\cos x)$$

$$=-y.$$

উদা. 11. সরলরেখায় চলমান একটি বস্তুকণা $t$ সময়ে, $s$ দূরত্ব অতিক্রম করে। যদি $s=(t^2+t)$ মিটার হয়, তবে, (i) কণাটির প্রারম্ভিক ও 1 সেকেণ্ডের মাথায় বেগ কত হয়? (ii) উহার বেগ-পরিবর্তনের হার অর্থাৎ ত্বরণ কত? (iii) দেখাও যে, কণাটির ত্বরণ সমহার।

$$s=t^2+t \text{ বলিয়া } \frac{ds}{dt}=2t+1.$$

$$\therefore \text{ কণাটির বেগ}=v=\frac{ds}{dt}=(2t+1) \text{ মি./সে.}$$

(i) $t=0$ বসাইয়া কণাটির প্রারম্ভিক বেগ পাওয়া যাইবে।

$\therefore$ প্রারম্ভিক বেগ $=(2.0+1)=1$ মি./সে.

আবার $t=1$ বসাইলে,

কণাটির 1 সেকেণ্ডের মাথায় বেগ হয় $2.1+1$ বা 3 মি./সে.

(ii) কণাটির বেগ $=v=\dfrac{ds}{dt}=2t+1$

$\therefore$ উহার বেগ-পরিবর্তনের হার বা ত্বরণ $=\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{d^2s}{dt^2}$.

$\dfrac{ds}{dt}=2t+1$ বলিয়া

$\dfrac{d^2s}{dt^2}=2$ অর্থাৎ কথাটির বেগ $v$-এর পরিবর্তন হার বা ত্বরণ $=2$ মি./সে$^2$.

(ii) প্রাপ্তফল হইতে দেখা যায়, ত্বরণ এখানে সময় $t$-নিরপেক্ষ। অর্থাৎ $t$-এর মান যাহাই হউক না কেন, সর্বদা ত্বরণ $=2$ মি./সে$^2$. সুতরাং ঐ ত্বরণ সমহার অর্থাৎ উহা পরিবর্তিত হয় না।

## প্রশ্নমালা 9

নিম্নলিখিত প্রত্যেকটি প্রশ্ন হইতে ( 1 হইতে 25 পর্যন্ত ) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ -এর মান নির্ণয় কর:

1. $y=2x^3+3x^2+4$.
2. $y=x^4-3x^3+5x$.
3. $y=\dfrac{1+x}{1-x}$.
4. $y=x+\dfrac{1}{x}$.
5. $y=\sin x$.
6. $y=\cos x$.
7. $y=2\sin x$.
8. $y=\sin 2x$

9. $y=\cos 2x.$

10. $y=2\cos x.$

11. $y=\tan x.$

12. $y=\frac{1}{\tan x}.$

13. $y=\tan\frac{1}{x}$

14. $y=\sqrt{1+x^2}.$

15. $y\sqrt{2-x^2}.$

16. $y=\frac{x}{\sqrt{2x+1}}.$

17. $y=\frac{x^2}{K+x}.$

18. $y=\frac{x^3-2x^2}{1-x}.$

19. $y=e^{ax}.$

20. $y=x\,e^{a}$ .

21. $y=\frac{e^{ax}}{x}.$

22. $y=\log 2x.$

23. $y=\log\sqrt{x^3}.$

24. $y=\cos\frac{1}{-}$

25. $y=e^{\sqrt{x}}$

নিচের প্রত্যেকটি প্রশ্নের (26 হইতে 30 পর্যন্ত) $y$-এর দ্বিতীয় তম্ভবক $y''$ নির্ণয় কর :

26. $y=\cos^{-1}x.$

27. $y=\tan^{-1}x.$

28. $y=x+\sin^{-1}x.$

29. $y=x^2+\cos^{-1}x$

30. $y=x\sin^{-1}x.$

31 নং হইতে 33 নং পর্যন্ত প্রত্যেকটি প্রশ্ন হইতে $\frac{d^2y}{dx^2}$ নির্ণয় কর :

31. $y=t^2,\ x=\sin t$

32. $y=a\sec t,\ x=b\tan t.$

33. $y=2at,\ x=at^2.$

নিচের প্রশ্নগুলি নির্দেশ অনুসারে উত্তর কর :

34. $y=\sin mx$ হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{d^2y}{dx^2}+m^2y=0.$$

35. $y=t\sin t$ হইলে, দেখাও যে $y''+y=2\cos t.$

36. $y=\sec Kx$ এবং $\frac{d^2y}{dx^2}+y=2y^3$ হইলে, দেখাও যে, $K=\pm 1.$

37. $y^2=4ax$ হইলে প্রমাণ কর যে,

$$y\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}=0.$$

38. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

39. অবাধে পতনশীল একটি বস্তুর বেগ ক্রমাগত বৃদ্ধি পাইতেছে। $t$ সময়ে যদি উহা $s$ দূরত্ব অতিক্রম করে এবং যদি $s=16t^2$ হয়, তবে, (i) $t$ সময়ের মাথায় উহার বেগ কত হইবে? (ii) বস্তুটির বেগ-পরিবর্তনের হার অর্থাৎ ত্বরণ কত?

40. সরলরেখায় চলমান কোন বস্তুকণা $t$ সময়ে $s$ দূরত্ব অতিক্রম করে। যদি $s=3t^2-6t$ হয়, তবে (i) কণাটির প্রারম্ভিক বেগ ও (ii) 3 সেকেণ্ডের মাথায় বেগ কত? (iii) উহার বেগ-পরিবর্তনের হার কত? ঐ হার সমহার কি?

41. সরলরেখায় গতিশীল একটি বস্তুকণা $t$ সময়ে $s$ দূরত্ব অতিক্রম করে। যদি $s=A\sin(at+b)$ হয়, যেখানে, $A$, $a$ ও $b$ ধ্রুবক-সংখ্যা, তবে দেখাও যে $s''$ ও সরলভেদে রহিয়াছে।

[ সংকেত : দেখাও যে, $\frac{s''}{s}$ = একটি ধ্রুবক-সংখ্যা। ]

# ষষ্ঠ অধ্যায়

## সমাকলন (Integration)

### 6·1. সমাকলন ও সমাকল (Integration and Integral) :

(a) **সমাকলন :** অবকলন-প্রক্রিয়ায় একটি অপেক্ষক মান হইতে উহার তজ্জবক (derivative) বা অবকল-সহগ (Differential coefficient) পাওয়া যায়। বিপরীতক্রমে, **যে-প্রক্রিয়ায় অবকল-সহগ হইতে উহা যে-আদিম অপেক্ষক মানটির তজ্জবক, তাহা ফিরিয়া পাওয়া যায়, সেই প্রক্রিয়াকে সমাকলন (Integration) বলে।** কারণ, অবকলন যেহেতু বিয়োগফল গ্রহণ-সংক্রান্ত একটি প্রক্রিয়া, সেইহেতু অবকলনের বিপরীত প্রক্রিয়াটি হইবে যোগফল গ্রহণ-সংক্রান্ত একটি প্রক্রিয়া। এই অর্থেই, অবকলনের বিপরীত প্রক্রিয়ার নাম হইয়াছে সমাকলন। পরের অধ্যায়ে কোন্ অর্থে সমাকলন যোগফল গ্রহণ-সংক্রান্ত প্রক্রিয়া তাহা আলোচনা করা হইবে।

আপাতত, ইহাই মনে রাখিতে হইবে যে যোগ বা sum-এর ধারণা হইতে উৎপন্ন বলিয়া sum-এর আদ্যক্ষর s-এর প্রলম্বিত আকার $\int$-চিহ্ন দ্বারা সমাকলন প্রক্রিয়া সূচিত করা হয়।

এখন, সংজ্ঞানুসারে সমাকলন যেমন অবকলনের বিপরীত প্রক্রিয়া তেমনি অবকলনও সমাকলনের বিপরীত প্রক্রিয়া। কাজেই $f(x)$-কে অবকলন করিলে যদি $f'(x)$ পাওয়া যায়, তবে $x$-সাপেক্ষে $f'(x)$-কে সমাকলন করিলে আবার $f(x)$ ফিরিয়া পাওয়া যাইবে।

সাংকেতিক ভাষায় $x$-সাপেক্ষে $f'(x)$-এর সমাকলন বুঝাইতে লেখা হয়, $\int f'(x).dx$. এখানে $dx$ দ্বারা $x$-সাপেক্ষে বুঝায় এবং তাহার $x$ অক্ষরটি বুঝায় সমাকলনের চলক (Variable of integration)। তাহা হইলে,

$$\frac{d}{dx} f(x) = f'(x) \quad \cdots \quad (1)$$

এবং $$\int f'(x).dx = f(x) \quad \cdots \quad (2)$$

এখন, (1) হইতে উভয়পক্ষের সমাকলন দ্বারা

$$\int \left\{ \frac{d}{dx} f(x) \right\} dx = \int f'(x)\, dx \quad \cdots \quad (3)$$

$$= f(x) \qquad [\because \text{ (2) হইতে } \int f'(x)dx = f(x)]$$

আবার, (2) হইতে উভয়পক্ষের অবকলন দ্বারা

$$\frac{d}{dx} \int f'(x).dx = \frac{d}{dx} f(x) = f'(x) \quad \cdots \quad (4)$$

সুতরাং (3) ও (4) হইতে দেখা যায়, সমাকলন-সূচক $\int$ প্রক্রিয়া যেমন অবকলন-সূচক $\frac{d}{dx}$ প্রক্রিয়াকে খণ্ডন করে, অবকলন-সূচক $\frac{d}{dx}$ প্রক্রিয়া তেমনি সমাকলন-সূচক $\int$ প্রক্রিয়াকে খণ্ডন করে।

(b) **সমাকল (Integral) :** উপরের (2) নম্বর সূত্র হইতে দেখা যায়, $x$ সাপেক্ষে $f'(x)$-এর সমাকলন-প্রাপ্ত ফল এবং তাহার মান $f(x)$-এর সমান। এইরূপ সমাকলন দ্বারা প্রাপ্ত ফলকে **সমাকল** বলে। অর্থাৎ,

**f(x)-এর অবকল-সহগ যদি f′(x) হয়, তবে f(x)-কে x-সাপেক্ষে f′(x)-এর সমাকল (Integral) বলা হয় এবং তাহাকে সাংকেতিক ভাষায় নিম্নরূপে প্রকাশ করা হয়।**

$$\int f'(x)dx = f(x).$$

অবকলের সহিত সমাকলের সংজ্ঞার তুলনা করিলে দেখা যায়, $x$-সাপেক্ষে $f(x)$-এর অবকল $= f'(x).dx$, এবং $x$-সাপেক্ষে $f'(x)$-এর সমাকল $= \int f'(x).dx = f(x)$.

সুতরাং অপেক্ষক মান-মাত্রই উহার অবকলের সমাকলের সমান।

উদাহরণস্বরূপ,

(i) $f(x)=x^2$ হইলে, যেহেতু, $\frac{d}{dx}f(x)=2x$

সেইহেতু, $\int 2x.dx = f(x) = x^2$ অর্থাৎ $x$-সাপেক্ষে $2x$-এর সমাকল $= x^2$

(ii) $f(x)=\sin x$ হইলে, যেহেতু

$$\frac{d}{dx}f(x)=\frac{d}{dx}\sin x=\cos x,$$

সেইহেতু, $\int \cos\ dx = \sin x$ অর্থাৎ $x$-সাপেক্ষে $\cos x$ এর সমাকল $= \sin x$.

(iii) অনুরূপে, $\frac{d}{dx}\log x = \frac{1}{x}$ হয় বলিয়া,

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log x$$

অর্থাৎ $x$-সাপেক্ষে $\frac{1}{x}$-এর সমাকল $= \log x$.

**টীকা :** ইংরেজীতে সমাকলের অপর নাম **Primitive**; বাংলায় ঐ নামকে আদিম অপেক্ষক বলা যাইতে পারে।

## 6·2. অনির্দিষ্ট সমাকল (Indefinite integral) :

সংজ্ঞা হইতে দেখা যাইতেছে যে, $\int F(x).dx = f(x)$, যেখানে $F(x)$ হইল $f(x)$-এর অবকল-সহগ ( বা তদ্ভবক )। কিন্তু $c$ একটি ধ্রুবক-সংখ্যা হইলে,

$$\frac{d}{dx}\{f(x)+c\} = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}(c) = F(x) + 0 = F(x) \text{ বলিয়া}$$

$$d\{f(x)+c\} = F(x)dx.$$

$$\therefore \quad \int F(x)dx = f(x) + c.$$

এইভাবে দেখা যায়, $c$-এর 0, 1, 2, 3 প্রভৃতি বিভিন্ন মানের জন্য $\int F(x)dx$-এর মান যথাক্রমে $f(x)$, $f(x)+1$, $f(x)+2$, $f(x)+3$ প্রভৃতি হইতে পারে। ইহার অর্থ $\int F(x)dx$-এর কোন সুনির্দিষ্ট মান নাই এবং নাই বলিয়া $\int F(x)dx$-কে **অনির্দিষ্ট সমাকল** (Indefenite integral) বলা হয়।

$\therefore \quad f(x) = x^2$ হইলে, যেমন

$$df(x) = 2x\ dx,$$

তেমনি $f(x) = x^2 + c$ হইলেও

$$df(x) = 2x\ dx$$

$$\therefore \quad \int 2x\ dx = f(x) + c = x^2 + c$$

অনুরূপে $\int \cos x\ dx = \sin x + c$

এবং $\int \frac{dx}{x} = \log x + c$



**সুতরাং, $\int F(x)dx$ আকারের যে-সকল সমাকলের সুনির্দিষ্ট একটিমাত্র মান থাকে না, তাহাদিগকে অনির্দিষ্ট সমাকল (Indefinite integral) বলে।**

## 6·3. একটি ধ্রুবক-সংখ্যা এবং একটি অপেক্ষক মানের গুণফলের সমাকল (Integral of the product of a constant and a functional value) :

$c$ যেন একটি ধ্রুবক-সংখ্যা। এখন, $x$-সাপেক্ষে $f(x)$-এর সমাকল $\int f(x).dx$ বলিয়া, $c\int f(x)\,dx$-কে অবকলন করিলে

$$\frac{d}{dx}\{c\int f(x).dx\} = c\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = c.f(x)$$

$$\left[\text{কারণ } \frac{d}{dx} \text{ ও } \int \text{ পরস্পরকে খণ্ডন করে।}\right]$$

$\therefore$ সমাকলের সংজ্ঞা অনুসারে,

$$\int c.f(x)dx = c\int f(x)dx.$$

এইভাবে দেখা যায় যে,

**একটি ধ্রুবক-সংখ্যা ও একটি অপেক্ষক মানের গুণফলের সমাকল =ঐ ধ্রুবক-সংখ্যা গুণিত ঐ অপেক্ষক মানের সমাকল।**

**6·4. কয়েকটি আদর্শ সমাকল (A few standard integral) :**

সমাকলের সংজ্ঞা হইতে স্পষ্ট দেখা যায় যে, কোন অপেক্ষক মানের অবকল-সহগ জানা থাকিলে উহা হইতে অনায়াসে একটি সমাকল নির্ণয় করা যায়। ইহার দৃষ্টান্তচ্ছলে কয়েকটি অতি প্রয়োজনীয় আদর্শ সমাকল নির্ণয় করা যাইতেছে।

**(i) $x^n$-এর সমাকল (Integral of $x^n$) :**

$c$ যদি একটি ধ্রুবক-সংখ্যা হয়, তবে,

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{x^{n+1}}{x+1}+c\right\}=\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)+\frac{d}{dx}(c)$$

$$=\frac{(n+1)}{n+1}\cdot x^n+0$$

$$=x^n.$$

$\therefore$ সংজ্ঞা অনুসারে, $x$-সাপেক্ষে $x^n$-এর সমাকল,

$$\int x^n.dx=\frac{x^{n+1}}{x+1}+c, \text{ যেখানে } n\neq -1.$$

[ **লক্ষণীয়** যে, $n=-1$ হইলে, $x^n=x^{-1}$ হয় এবং সেক্ষেত্রে

$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}=\dfrac{x^{-1+1}}{-1+1}=\dfrac{x^0}{0}=\dfrac{1}{0}$ হইয়া পড়ে। কিন্তু $\dfrac{1}{0}$ বলিতে কোন সংখ্যা নাই। সেইজন্য $n=-1$ হইলে (i)-এর সূত্রটি প্রযোজ্য নহে। ]

**বিশেষ দ্রষ্টব্য :** $x^n$-আকারের অপেক্ষক মানের সমাকল নির্ণয় করিবার সময় $x$-এর সূচকের সহিত এক যোগ করিতে হয় এবং তাহাকে ঐ 1 যুক্ত সূচক সংখ্যাটিকে দিয়া ভাগ করিতে হয়। সর্বশেষে যোগ করিতে হয় ঐ ভাগফলের সহিত একটি ধ্রুবক-সংখ্যা।

**(ii) sin mx-এর সমাকল (Integral of sin mx) :**

$m$ ও $c$ ধ্রুবক-সংখ্যা হইলে, $\cos mx+c$-এর অবকল-সহগ

$$=\frac{d}{dx}(\cos mx+c)$$

$$=\frac{d}{dx}\cos mx+\frac{d}{dx}(c)=-\sin mx.m+0$$

$$=-m\sin mx.$$

∴ সমাকলের সংজ্ঞা অনুসারে,

$\int -m \sin mx \, dx = \cos mx + c$

বা $-m \int \sin mx \, dx = \cos mx + c$

∴ $\int \sin mx \, dx = \frac{\cos mx}{-m} + \frac{c}{-m}$

$= -\frac{\cos mx}{m} + K$, যেখানে

K, একটি ধ্রুবক-সংখ্যা $= \frac{c}{-m}$.

লক্ষণীয় যে, $m = 1$ হইলে $\int \sin x = -\cos x + K$.

(iii) **cos mx-এর সমাকল (Integral of cos mx) :**

$m$ ও $c$ ধ্রুবক-সংখ্যা হইলে, $(\sin mx + c)$-এর অবকল-সহগ

$= \frac{d}{dx}(\sin mx + c) = \frac{d}{dx}\sin mx + \frac{d}{dx}(c)$

$= \cos mx.m + 0 = m \cos mx$.

∴ সমাকলের সংজ্ঞা অনুসারে

$\int m \cos mx \, dx = \sin mx + c$

বা, $m \int \cos mx \, dx = \sin mx + c$

∴ $\int \cos mx.dx = \frac{\sin mx}{m} + \frac{c}{m}$

$= \frac{\sin mx}{m} + K$, যেখানে K এমন একটি ধ্রুবক-সংখ্যা যে $K = \frac{c}{m}$

লক্ষণীয় যে, $m = 1$ হইলে $\int \cos x \, dx = \sin x + K$.

(iv) **$x^{-1}$ বা $\frac{1}{x}$-এর সমাকল (Integral of $x^{-1}$ or $\frac{1}{x}$) :**

$c$ একটি ধ্রুবক-সংখ্যা হইলে, $(\log x + c)$-এর অবকল-সহগ

$= \frac{d}{dx}(\log x + c)$

$= \frac{d}{dx}(\log x) + \frac{d}{dx}(c) = \frac{1}{x} + 0 = \frac{1}{x}$

∴ সংজ্ঞা অনুসারে,

$\int \frac{1}{x}.\, dx = \log x + c$

অর্থাৎ, $\int x^{-1}.dx = \log x + c$

(v) **$e^{ax}$-এর সমাকল (Integral of $e^{ax}$) :**

$a$ ও $c$ ধ্রুবক-সংখ্যা হইলে, $(e^{ax}+c)$-এর অবকল-সহগ

$$=\frac{d}{dx}(e^{ax}+c)$$

$$=\frac{d}{dx}e^{ax}+\frac{d}{dx}(c)=e^{ax}.\,a+0=a\,e^{ax}.$$

∴ সমাকলের সংজ্ঞা অনুসারে,

$$\int a\,e^{ax}\,dx=e^{ax}+c$$

অথবা, $a\int e^{ax}dx=e^{ax}+c$

$$\therefore\ \int e^{ax}\,dx=\frac{e^{ax}}{a}+\frac{c}{a}$$

$$=\frac{e^{ax}}{a}+\text{K},\text{ যেখানে K}=\frac{c}{a}=\text{একটি ধ্রুবক সংখ্যা।}$$

**লক্ষণীয় যে $a=1$ হইলে $\int e^{x}dx=e^{x}+\text{K}$.**

**6·5.** (a) পূর্বের অনুচ্ছেদে প্রদত্ত আদর্শ সমাকলগুলি ছাড়া এমন বহু সমাকল আছে, যাহাদের অবকল সহগের তালিকা হইতে সরাসরি পাওয়া যায়। উদাহরণস্বরূপ,

(i) $\frac{d}{dx}(\tan x+c)=\sec^2 x$ বলিয়া $\int \sec^2 x\,dx=\tan x+c$.

(ii) $\frac{d}{dx}(\sec x+c)=\sec x\tan x$ বলিয়া $\int \sec x\tan x\,dx=\sec x+c$

(iii) $\frac{d}{dx}(\text{cosec}\,x+c)=\text{cosec}\,x\cot x$ বলিয়া $\int \text{cosec}\,x\cot x\,dx$

$$=-\text{cosec}\,x+c$$

(iv) $\frac{d}{dx}(-\cot x+c)=\text{cosec}^2 x$ বলিয়া $\int \text{cosec}^2 x.dx=-\cot x+c$

(v) $\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x+c)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

এবং (vi) $\frac{d}{dx}(-\cos^{-1}x+c)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

বলিয়া $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\sin^{-1}x+c$

$$=-\cos^{-1}x+c$$

**6·6. দুইটি অপেক্ষক মানের বৈজিক সমষ্টির সমাকল (Integral of the sum of two functional values).**

$f(x)$ ও $g(x)$ দুইটি অপেক্ষক মান হইলে, $x$-সাপেক্ষে উহাদের সমাকল যথাক্রমে,

$\int f(x).dx$ এবং $\int g(x).dx$. এই সমাকল-দুইটির বৈজিক সমষ্টির অবকল-সহগ লইলে,

$$\frac{d}{dx}\left\{\int f(x).dx \pm \int g(x).dx\right\}$$

$$= \frac{d}{dx}\int f(x).dx \pm \frac{d}{dx}\int g(x).dx$$

$$= f(x) \pm g(x)$$

$\therefore$ সংজ্ঞা অনুসারে

$$\int \{\mathbf{f(x)} \pm \mathbf{g(x)}\}.\mathbf{dx} = \int \mathbf{f(x\ dx} + \int \mathbf{g.(x)dx}.$$

**সুতরাং, দুইটি অপেক্ষক মানের বৈজিক সমষ্টির সমাকল = ঐ দুইটি অপেক্ষক মানের সমাকল-দুইটির বৈজিক সমষ্টি।**

## উদাহরণমালা

উদা 1. মান নির্ণয় কর :

(i) $\int x^{\frac{3}{5}}dx$ ; (ii) $\int\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx$ (iii) $\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^2 dx$.

(i) $\int x^{\frac{3}{5}}dx = \dfrac{x^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1} + c$ [ c একটি ধ্রুবক-সংখ্যা ]

$$= \frac{x^{8/5}}{8/5} + c = \frac{5}{8}x^{8/5} + c$$

(ii) $\int\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx = \int\left(x^2+2+\frac{1}{x^2}\right)dx$

$$= \int x^2 dx + \int 2.dx + \int x^{-2}.dx$$

$$= \frac{x^{2+1}}{2+1} + 2\int x^0.\,dx + \frac{x^{-2+1}}{-2+1}$$

$$= \frac{x^3}{3} + 2.\frac{x^{0+1}}{0+1} + \frac{x^{-1}}{-1} + c$$

$$= \frac{x^3}{x} + 2x - \frac{1}{x} + c.$$

(iii) $$\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^2 dx=\int\left(x+\frac{2\sqrt{x}}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$=\int x\,dx+\int\frac{2}{\sqrt{x}}dx+\int\frac{1}{x^2}dx$$

$$=\frac{x^{1+1}}{1+1}+2\int x^{-\frac{1}{2}}dx+\int x^{-2}dx$$

$$=\frac{x^2}{2}+2.\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+\frac{x^{-2+1}}{-2+1}+c$$

$$=\frac{x^2}{2}+\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+\frac{x^{-1}}{-1}+c$$

$$=\frac{x^2}{2}+4\sqrt{x}-\frac{1}{x}+c.$$

উদা. 2. $\int\frac{2-4x+6x^3-8x^4}{x^4}dx$-এর মান নির্ণয় কর।

$$\int\frac{2-4x+6x^3-8x^4}{x^4}dx=\int\left(\frac{2}{x^4}-\frac{4x}{x^4}+\frac{6x^3}{x^4}-\frac{8x^4}{x^4}\right)dx$$

$$=\int 2x^{-4}dx-\int 4x^{-3}dx+\int 6x^{-1}dx-\int 8dx$$

$$=2\int x^{-4}dx+4\int x^{-3}dx+6\int x^{-1}dx-8\int dx$$

$$=2\,.\frac{x^{-4+1}}{-4+1}+4\,.\frac{x^{-3+1}}{-3+1}+6\,.\log x-8x+c$$

[ যেখানে $c$ একটি ধ্রুবক-সংখ্যা ]

$$=-\frac{2}{3}x^{-3}-2x^{-2}+6\log x-8x+c$$

$$=6\log x-\frac{2}{3x^3}-\frac{2}{x^2}-8x+c$$

উদা. 3. $\int(e^{2x}+\sin 2x-3x^{-1})\,dx$-এর মান নির্ণয় কর।

$$\int(e^{2x}+\sin 2x-3x^{-1})dx=\int e^{2x}dx+\int\sin 2x\,dx-3\int x^{-1}dx$$

$$=2e^{2x}-\frac{\cos 2x}{2}-3\log x+c$$

[ যেখানে $c$ একটি ধ্রুবক-সংখ্যা ]

উদা. 4. (i) $\int\sqrt{1+\sin 2x}\,dx$ এবং (ii) $\int(1+\sin 2x)\,dx$-এর মান নির্ণয় কর।

(i) $$\int\sqrt{1+\sin 2x}\,dx=\int\sqrt{1+2\sin x\cos x}\,dx$$
$$=\int\sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x}\,dx$$
$$=\int\sqrt{(\sin x+\cos x)^2}\,dx=\int(\sin x+\cos x)\,dx$$
$$=\int\sin x\,dx+\int\cos x\,dx=-\cos x+\sin x+c$$
$$=\sin x-\cos x+c$$

(ii) $$\int(1+\sin 2x)\,dx=\int dx+\int\sin 2x$$
$$=x-\frac{\cos 2x}{2}+c$$

[ যেখানে $c$ একটি ধ্রুবক-সংখ্যা ]

উদা. 5. $\int(5+9\sin 3x-8\sin^2 2x)\,dx$-এর মান নির্ণয় কর।

$$\int(5+9\sin 3x-8\sin^2 2x)\,dx$$
$$=\int\{1+4(1-2\sin^2 2x)+9\sin 3x\}\,dx$$
$$=\int(1+4\cos 4x+9\sin 3x)\,dx$$
$$=\int dx+4\int\cos 4x\,dx+9\int\sin 3x\,dx$$
$$=x+4\,.\,\frac{\sin 4x}{4}+9\,.\,-\frac{\cos 3x}{3}+c$$
$$=x+\sin 4x-3\cos 3x+c$$

উদা. 6. $\int\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}\,dx$-এর মান নির্ণয় কর।

$$\int\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$$
$$=\int\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx+\int\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$$
$$=\int\sec^2 x\,dx+\int\operatorname{cosec}^2 x\,dx=\tan x-\cot x+c.$$

উদা. 7. $\int\left(\sec x \tan x+\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}+\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}\right) dx$-এর মান নির্ণয় কর।

$$\int\left(\sec x \tan x+\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}+\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}\right)dx$$

$$=\int \sec x \tan x\, dx+\int \frac{1+x+1-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\sec x+\int \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx=\sec x+2\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

$$=\sec x+2 \sin^{-1}x+c.$$

## প্রশ্নমালা 10

মান নির্ণয় কর :

1 $\int x^5\, dx.$ 2 $\int x^{\frac{2}{3}}dx.$ 3. $\int \sqrt{x}\, dx.$

4. $\int \sqrt[5]{x^4}\, dx.$ 5. $\int \frac{dx}{x^2}.$ 6. $\int \frac{3dx}{x^4}.$

7. $\int \frac{1}{2}\sqrt{ax}\, dx.$ 8. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}.$ 9. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x}}.$

10. $\int \frac{2dx}{3\sqrt[3]{x}}.$ 11. $\int\left(6x^5-3x^3+\frac{1}{x^2}\right)dx.$

12 $\int\left(\frac{2x^2+\frac{1}{3}\sqrt{x}}{x}\right)dx.$ 13. $\int\left\{(2x)^2-\frac{1}{(2x)^2}\right\}dx.$

14. $\int(x-1)(x-2)\, dx.$ 15. $\int\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(a+\frac{1}{a}\right)dx.$

16. $\int(1+\sin 3x)\, dx.$ 17. $\int(x-\cos 2x)\, dx.$

18. $\int(a \sin ax+b \cos bx)\, dx.$ 19. $\int(e^{2x}-e^{x/2})dx.$

20. $\int\left(\frac{2x^3-x^2+3x-7}{x}\right)dx.$ 21. $\int \sqrt{1-\cos 2x}\, dx.$

22. $\int \sqrt{1+\cos 2x}\, dx.$ 23. $\int \sqrt{1-\sin 2x}\, dx.$

24. $\int(\frac{3}{2}e^{2x}-\frac{3}{2}\sin 3x)\,dx.$ 25. $\int\left(e^{\frac{Kx}{2}}+e^{\frac{2x}{K}}\right)dx$

26. $\int\sin^2 x\,dx.$ [ সংকেত : $\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$]

27. $\int\cos^2 x\,dx.$ [ সংকেত : $\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$]

28. $\int\left(\sin x\cos x-\frac{\cos 2x}{2}\right)dx.$

[সংকেত : $\sin x\cos x=\frac{1}{2}.\,2\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$ ধর।]

29 $\int\left(1+\frac{1}{x}\right)dx.$ 30. $\int\left(\frac{x^2-1}{x}\right)dx.$

31. $\int\frac{\sin^3 x+\cos^3 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\,dx.$

32. $\int\left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx.$

33. $\int\frac{x-\sqrt{1-x^2}}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx.$



**67. সহজ পরিবর্তন দ্বারা সমাকলন (Integration by simple substitution) :**

অনেক সময় অপেক্ষক মানের নিরপেক্ষ চলকটিকে সুবিধামতো অন্য একটি চলক-সাপেক্ষে প্রকাশ করিলে সমাকলনের কাজ সহজ হয়। $\int f(x)dx$ সমাকলটির মান নির্ণয় করিবার জন্য তাই $x=g(z)$ ধরা যাইতে পারে।

সেক্ষেত্রে,

$\frac{dx}{dz}=g'(z)$ বা $dx=g'(z)dz$ হইবে।

$\therefore\ \int f(x)dx=\int f\{g(z)\}\,g'(z)dz$ হইয়া যাইবে।

এইভাবে সহজ পরিবর্তন দ্বারা সমাকলনের কাজ কি-ভাবে অনায়াসে করা যায় তাহার কয়েকটি উদাহরণ দেওয়া হইতেছে। পরিচিত সমাকলের সাহায্য লইবার জন্যই এইরূপ এই পরিবর্তন-পদ্ধতির প্রয়োগ করা হইয়া থাকে।

(i) $\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}$ dx-এর সমাকল (Integral of

$$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\, dx\Big) :$$

$ax^2+bx+c=z$ ধরিলে, উভয়পক্ষের অবকলন করিয়া দেখা যায়,

$$2ax+b=\frac{dz}{dx} \text{ অথবা } (2ax+b)dx=dz.$$

$$\therefore \int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx=\int \frac{(2ax+b)\,dx}{ax^2+bx+c}=\int \frac{dz}{z}$$

$$=\log z+K, \text{ যেখানে K একটি ধ্রুবক-সংখ্যা}$$

$$=\log (ax^2+bx+c)+K$$

**বিঃ দ্রঃ** ইহা হইতে দেখা যায়, সমাকলনযোগ্য কোন অপেক্ষক-মানের লব-টি যদি হরের অবকল-সহগ হয়, তবে উহার সমাকল = হরের log + c, যেখানে c একটি ধ্রুবক-সংখ্যা।

(ii) অনুরূপে, $\int \tan x\, dx=\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$ এর ক্ষেত্রে,

$$\cos x=z \text{ ধরিলে, } \frac{d}{dx}\cos x=\frac{dz}{dx}$$

$$\text{বা, } -\sin x=\frac{dz}{dx} \text{ বা, } dz=-\sin x\, dx$$

$$\therefore \int \tan x\, dx=\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx=\int \frac{-dz}{z}=-\int \frac{dz}{z}$$

$$=-\log z+c \text{ ( c একটি ধ্রুবক-সংখ্যা )}$$

$$=-\log \cos x+c$$

(iii) (i) ও (ii) উদাহরণ-দুইটি হইতে প্রাপ্ত সিদ্ধান্তটিকে সাধারণভাবে নিম্নরূপে প্রমাণ করা যায়

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\log f(x)+c$$

**প্রমাণ :** $f(x)=z$ ধরিলে, $f'(x)=\frac{dz}{dx}$

অর্থাৎ $dz=f'(x).dx$

$$\therefore \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\int \frac{dz}{z}=\log z+c=\log f(x)+c$$

(iv) $x \neq -1$ হইলে, $\int (ax+b)^x \, dx$-এর মান—

ধরা যাক, $ax+b=z$. তাহা হইলে, উভয় পক্ষের অবকলন দ্বারা

$$a=\frac{dz}{dx} \text{ অথবা } dx=\frac{dz}{a}$$

$$\therefore \int (ax+b)^x dx = \int z^x \frac{dz}{a} = \int \frac{1}{a} \cdot z \; dz = \frac{1}{a}\int z^x \, dz.$$

$$= \frac{1}{a} \frac{z^{x+1}}{x+1} + c \quad \text{( যেখানে } c \text{ একটি ধ্রুবক-সংখ্যা )}$$

$$= \frac{1}{a(x+1)} \cdot (ax+b)^{x+1} + c$$

(v) $\int \frac{\sin 2x}{(a+b \cos x)^2} \, dx$-এর মান—

ধরা যাক, $a+b\cos x = z$. তাহা হইলে, $\cos x = \frac{z-a}{b}$

এবং $\frac{d}{dx}(a+b \cos x)=\frac{dz}{dx}$, বা, $-b \sin x = \frac{dz}{dx}$

বা, $\sin x \, dx = -\frac{dz}{b}$

$$\therefore \int \frac{\sin 2x}{(a+b \cos x)^2} dx = \int \frac{2 \sin x \cos x}{(a+b \cos x)^2} dx$$

$$= 2\int \frac{\cos x \cdot \frac{-dz}{b}}{z^2} = -2\int \frac{(z-a)\, dz}{b^2 z^2}$$

$$= -\frac{2}{b^2}\int \left(\frac{z}{z^2}-\frac{a}{z^2}\right)dz = -\frac{2}{b^2}\left\{\int \frac{1}{z}dz - a\int \frac{dz}{z^2}\right\}$$

$$= \frac{2}{b^2}\left\{\log z - \frac{a}{z}\right\} + c$$

## 6·8. কয়েকটি আদর্শ সমাকল (A few standard integral) :

(i) $\int \frac{dx}{x^2+a^2}$ -এর মান :

$x = a \tan \theta$ ধরিলে, $\frac{dx}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}(a \tan \theta) = a \sec^2\theta$

বা, $dx = a \sec^2\theta \, d\theta$.

$$\therefore \int\frac{dx}{x^2+a^2}=\int\frac{a\sec^2\theta\, d\theta}{a^2(\tan^2\theta+1)}=\int\frac{a\sec^2\theta\, d\theta}{a^2\sec^2\theta}=\int\frac{d\theta}{a}$$

$$=\frac{1}{a}\int d\theta=\frac{1}{a}.\theta+c,$$ [যেখানে $c$ একটি ধ্রুবক-সংখ্যা।]

কিন্তু কল্পনানুসারে, $\tan\theta=\frac{x}{a}$ বলিয়া $\theta=\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$.

$$\therefore \int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\theta+c=\frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c$$

**অনুসিদ্ধান্ত :** $\int\frac{dx}{1+x^2}=\tan^{-1}x+c.$ [সূত্রে, $a=1$ বসাইয়া]

(ii) $\int\frac{dx}{x^2+a^2}$ **-এর মান :**

$$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\int\frac{1}{2a}\left\{\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right\}dx=\frac{1}{2a}\left\{\int\frac{dx}{x-a}-\frac{dx}{x+a}\right\}$$

$$=\frac{1}{2a}\left\{\log(x-a)-\log(x+a)+c\right\}$$ [$c$ একটি ধ্রুবক-সংখ্যা]

$$=\frac{1}{2a}\log\frac{x-a}{x+a}+c.$$

(iii) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$ **-এর মান :**

$\frac{x+\sqrt{x^2\pm a^2}}{a}=z$ ধরিলে, অবকলন করিয়া

$$\frac{1}{a}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2\pm a^2}}.2x\right)=\frac{dz}{dx}$$

বা, $\frac{1}{a}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\right)=\frac{dz}{dx}$ বা $\frac{dz}{dx}=\frac{\sqrt{x^2\pm a^2}+x}{a\sqrt{x^2\pm a^2}}=\frac{z}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$

$$\therefore \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\frac{dz}{z}$$

$$\therefore \int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\int\frac{dz}{z}=\log z+c$$ [যেখানে $c$ একটি ধ্রুবক-সংখ্যা]

$$=\log\frac{x+\sqrt{x^2\pm a^2}}{a}+c$$

(iv) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$-এর মান :

$x=a\sin\theta$ ধরিলে $\frac{dx}{d\theta}=a\cos\theta$

বা, $dx=a\cos\theta\, d\theta$.

$$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int \frac{a\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}}=\int \frac{a\cos\theta\, d\theta}{a\sqrt{1-\sin^2\theta}}$$

$$=\int \frac{\cos\theta\, d\theta}{\cos\theta}=\int d\theta=\theta+c,$$

[ যেখানে $c$ একটি ধ্রুবক সংখ্যা ]

$$=\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c, \left[\because \sin\theta=\frac{x}{a}, \therefore \theta=\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]$$

অনুসিদ্ধান্ত : $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\sin^{-1}x+c$, [সূত্রে $a=1$ বসাইয়া ]

## উদাহরণমালা

উদা. 1. $\int \frac{dx}{bx+c}$ -এর মান নির্ণয় কর।

$bx+c=z$ ধরিলে $\frac{d}{dx}(bx+c)=\frac{dz}{dx}$

বা, $b=\frac{dz}{dx}$ বা $dx=\frac{dz}{b}$.

$$\therefore \int \frac{dx}{bx+c}=\int \frac{dz}{bz}=\frac{1}{b}\int \frac{dz}{z}=\frac{1}{b}\log z+c$$

$$=\frac{1}{b}\log(bx+c)+c,$$ [ যেখানে $c$ একটি ধ্রুবক-সংখ্যা ]

উদা. 2. $\int \frac{e^{\cos^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$ -এর মান নির্ণয় কর।

$\cos^{-1}x=\theta$ ধরিলে $\cos\theta=x$,

$\therefore \frac{d(\cos\theta)}{d\theta}=\frac{dx}{d\theta}$ বা $-\sin\theta=\frac{dx}{d\theta}$

বা, $dx=-\sin\theta\, d\theta$

$$\therefore \int \frac{e^{\cos^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{e^{\theta}.-\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}} = -\int \frac{e^{\theta}\sin\theta}{\sin\theta}\,d\theta$$

$= -\int e^{\theta}\,d\theta = -e^{\theta}+c,$ [ যেখানে $c$ একটি ধ্রুবক সংখ্যা ]

$= c - e^{\cos^{-1}x}.$

উদা. 3. $\int e \;\; \cos e^x\,dx$-এর মান নির্ণয় কর।

$e^x = z$ ধরিলে $\frac{de^x}{dx} = \frac{dz}{dx}$ বা $\frac{dz}{dx} = e$ বা $dz = e^x\,dx.$

$\therefore \int e^x \cos e^x\,dx = \int \cos e^x\; e^x dx = \int \cos z\,dz$

$= \sin z + c,$ [ যেখানে $c$ একটি ধ্রুবক-সংখ্যা ]

$= \sin e^x + c.$

উদা. 4. $\int \frac{\log\sqrt{x}}{x}\,dx$-এর মান নির্ণয় কর।

$\log x = t$ ধরিলে $\frac{d}{dx}\log x = \frac{dt}{dx}$ বা $\frac{1}{x} = \frac{dt}{dx}$ বা $dt = \frac{dx}{x}.$

$$\therefore \int \frac{\log\sqrt{x}}{x}dx = \int \frac{\log x^{\frac{1}{2}}}{x}dx = \int \frac{\frac{1}{2}\log x}{x}dx$$

$= \frac{1}{2}\int t\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{2} + c,$ [ $c$ একটি ধ্রুবক-সংখ্যা]

$= \frac{1}{4}(\log x)^2 + c.$

উদা. 5. $\int \sqrt{\sin x}\,\cos x\,dx$-এর মান নির্ণয় কর।

$\sin x = z$ ধরিলে $\cos x\,dx = dz.$

$$\therefore \int \sqrt{\sin x}\,\cos x\,dx = \int (\sin x)^{\frac{1}{2}}\cos x\,dx = \int z^{\frac{1}{2}}\,dz$$

$$= \frac{z^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{z^{3/2}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{3}\sin^{3/2}x + c.$$

উদা. 6. $\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\sin x\cos x}\,dx$-এর মান নির্ণয় কর।

$\tan x = z$ ধরিলে $\frac{d\tan x}{dx} = \frac{dz}{dx}$

বা $\sec^2 x\,dz = dz$

$$\therefore \int \frac{\sqrt{\tan x}}{\sin x \cos x} dx = \int \frac{\sqrt{\tan x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{\sin x \cos x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}} dx$$

$$= \int \frac{\sqrt{\tan x} \sec^2 x \, dx}{\tan x}$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{\tan x}} \cdot \sec^2 x \, dx = \int \frac{dz}{\sqrt{z}}$$

$$= 2\sqrt{z} + c \qquad \text{[ যেখানে } c \text{ একটি ধ্রুবক-সংখ্যা ]}$$

$$= 2\sqrt{\tan x} + c.$$

উদা. 7. $\int \sec x \, dx$ -এর মান নির্ণয় কর।

$$\sec x = \frac{\sec x (\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} = \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}.$$

এখন $\sec x + \tan x = z$ ধরিয়া

$$\frac{d}{dx}(\sec x + \tan x) = \frac{dz}{dx} \text{ বা, } \frac{d}{dx}\sec x + \frac{d}{dx}\tan x = \frac{dz}{dx}$$

$$\text{বা, } \sec x \tan x + \sec^2 x = \frac{dz}{dx}$$

$$\therefore \int \sec x \, dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} dx$$

$$= \int \frac{\frac{dz}{dx} \cdot dx}{z} = \int \frac{dz}{z}$$

$$= \log z + c = \log(\sec x + \tan x) + c$$

[ যেখানে $c$ একটি ধ্রুবক-সংখ্যা ]

উদা. 8. $\int \frac{x^2}{x^6 + 3}$ -এর মান নির্ণয় কর।

$x^3 = z$ ধরিলে, $3x^2 \, dx = dz$.

$$\therefore \int \frac{x^2 \, dx}{(x^3)^2 + (\sqrt{3})^2} = \int \frac{\frac{1}{3} \cdot 3x^2 \, dx}{(x^3)^2 + (\sqrt{3})^2} = \frac{1}{3} \int \frac{dz}{z^2 + (\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{3}} \tan^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{3}}\right) + c,$$

[ সূত্র অনুসারে, এখানে $a = \sqrt{3}$ ]

$$= \frac{1}{3\sqrt{3}} \tan^{-1}\left(\frac{x^3}{\sqrt{3}}\right) + c.$$

উদা. 9. $\int \frac{x\,dx}{x^2+x-\frac{3}{4}}$ -এর মান নির্ণয় কর।

$$\int \frac{dx}{x^2+x-\frac{3}{4}} = \int \frac{dx}{x^2+2.x\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-1} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-1^2}$$

এখন $x+\frac{1}{2}=z$ ধরিলে $\frac{d}{dx}\left(x+\frac{1}{2}\right)=\frac{dz}{dx}$ বা $1+0=\frac{dz}{dx}$

বা, $dz=dx$

$$\therefore \int \frac{dx}{x^2+x-\frac{3}{4}} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-1^2} = \int \frac{dz}{z^2-1^2} = \frac{1}{2}\log\frac{z-1}{z+1}+c$$

$$= \frac{1}{2}\log\frac{x^2+\frac{1}{2}-1}{x^2+\frac{1}{2}+1}+c = \frac{1}{2}\log\frac{x^2-\frac{1}{2}}{x^2+\frac{3}{2}}+c.$$

উদা. 10. $x$-সাপেক্ষে $\frac{1}{\sqrt{x^2+3x+\frac{5}{2}}}$ -এর সমাকলন কর।

$x$-সাপেক্ষে $\frac{1}{\sqrt{x^2+3x+\frac{5}{2}}}$-এর সমাকল $= \int \frac{1}{\sqrt{x^2+3x+\frac{5}{2}}}\,dx$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2.x.\frac{3}{2}+\frac{9}{4}+\frac{1}{4}}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}$$

$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \log\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a}$ সূত্রে

$z=x+\frac{3}{2}$ বসাইলে $dz=dx$ হয়। ইহার পর $a$-র স্থলে $\frac{1}{2}$ ধরিয়া

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \int \frac{dz}{\sqrt{z^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}$$

$$= \log\frac{z+\sqrt{z^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}{\frac{1}{2}}+c$$

$$= \log\frac{\left\{\left(x+\frac{3}{2}\right)+\sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}\right\}}{\frac{1}{2}}+c.$$

উদা. 11 $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3}}$ -এর মান নির্ণয় কর।

$\sqrt{1+x^3}=z$ ধরিলে $1+x^3=z^2,\ x^3=z^2-1$

এবং $\frac{d}{dx}(1+x^3)=2z.\frac{dz}{dx}$

বা, $3x^2=2z.\frac{dz}{dx}$ বা $3x^2\,dx=2z.dz$.

$$\therefore \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3}}=\int \frac{\frac{1}{3}\cdot 3x^2\,dx}{x^2\cdot x\sqrt{1+x^3}}=\frac{1}{3}\int \frac{2z.dz}{(z^2-1)z}$$

$$=\frac{2}{3}\int \frac{dz}{z^2-1}$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\log\frac{z-1}{z+1}+c$$

$$\left[\because \int \frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\log\frac{x-a}{x+a}+c\right]$$

$$=\frac{1}{3}\log\frac{\sqrt{1+x^3}-1}{\sqrt{1+x^3}+1}+c.$$

উদা. 12. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2+2x^2-x^4}}$ -এর মান নির্ণয় কর।

$$2+2x^2-x^4=2-(x^4-2x^2)=3-(x^4-2x^2+1)$$

$$=(\sqrt{3})^2-(x^2-1)^2$$

এখন, $x^2-1=z$ ধরিলে, $2x\,dx=dz$ হয়

$$\therefore \int \frac{x\,dx}{\sqrt{2+2x^2-x^4}}=\frac{\frac{1}{2}\,2x\,.\,dx}{\sqrt{(\sqrt{3})^2-(x^2-1)^2}}=\frac{1}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{(\sqrt{3})^2-z^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{z}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{x^2-1}{\sqrt{3}}.$$

## প্রশ্নমালা 11

মান নির্ণয় কর :

1. $\int a\,e^{ax}\,dx$. 2. $\int e^x\sin e^x\,dx$. 3. $\int (e^x+K)\,e^x\,dx$.

4. $\int \frac{e^x}{e^x-a}\,dx$. 5. $\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx$. 6. $\int \frac{e^x+\frac{1}{e^x}}{e^x-\frac{1}{e^x}}\,dx$.

7. $\int \cot x\, dx.$ 8. $\int \frac{\sec^2 x}{\tan x}\, dx.$ 9. $\int \frac{4x+3}{2x^2+3x+1}\, dx.$

10. $\int \frac{3x+1}{3x^2+2x+1}\, dx.$ 11. $\int \frac{b\, e^{ax}}{e^a x+b}\, dx.$

12. $\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}\, dx.$ 13. $\int e^{\tan x} \sec^2 x dx.$

14. $\int \frac{e^{\log x}}{dx}\, dx$ [ সংকেত : $\log_e x = z$ ধরিলে,

$e^z = x$ বা $e^{\log x} = x$ ; ইত্যাদি । ]

15. $\int \frac{\sin \theta\, d\theta}{1-\cos \theta}$. [ সংকেত : দেখাও যে $\frac{\sin \theta}{1-\cos\theta} = \cot \frac{\theta}{2}$ ইত্যাদি । ]

16. $\int \frac{e^\theta + a}{e^\theta - a}\, d\theta$. [ সংকেত : প্রত্যক্ষ ভাগ দ্বারা,

$$\frac{e^\theta+a}{e^\theta-a} = \frac{a+e^\theta}{-a+e^\theta} = -1 + \frac{2e^\theta}{-a+e^\theta}$$ বলিয়া,

$\int \frac{e^\theta+a}{e^\theta-a}\, d = \int \left(\frac{2e^\theta}{e^\theta-a} - 1\right) d\theta$ ; $e^\theta = z$ ধরিয়া অগ্রসর হও । ]

17. $\int \operatorname{cosec} x\, dx$

[ সংকেত : $\operatorname{cosec} x = \frac{\operatorname{cosec} x\,(\operatorname{cosec} x - \cot x)}{\operatorname{cssec} x - \cot x}$

$$= \frac{\operatorname{cosec}^2 x - \operatorname{cosec} x \cot x}{\operatorname{cosec} x - \cot x};$$

$\operatorname{cosec} x - \cot x = z$ ধরিয়া দেখাও যে,

$dz = (\operatorname{cosec}^2 x - \operatorname{cosec} x \cot x)\, dx$ ; ইত্যাদি ]

18. $\int \sin^2 x \cos x\, dx$ [ সংকেত : $\sin x = z$ ধরিয়া অগ্রসর হও । ]

19. $\int \frac{\cos (\log x)}{x}\, dx$ [ সংকেত : $\log x = z$ ধর । ]

20. $\int \frac{e^{\sin^{-1} x}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$

21. $\int \frac{e^{\tan^{-1} x}}{1+x^2}\, dx.$ 22. $\int \frac{(\log x+a)}{x}\, dx.$

23. $\int \frac{\log \sqrt[3]{x}}{d}\, dx.$ 24. $\int \sqrt{\tan x \sec^2 x\, dx}.$

25. $\int \frac{1}{(1+\tan x)^2 \cos^2 x} dx.$ 26. $\int \frac{e^x (1+x)\, dx}{\sin^2 (x e^x)}.$

27. $\int \frac{dx}{x^2+25}.$ 28 $\int \frac{e^x\, dx}{1+e^{2x}}.$

29. $\int \frac{x^2\, dx}{1+x^6}.$ 30. $\int \frac{x^4\, dx}{1+x^{10}}.$

31. $\int \frac{dx}{e^{2x}+e^{-2x}}.$ 32. $\int \frac{\cos x\, dx}{1+\sin^2 x}.$

33. $\int \frac{\sin 2x\, dx}{1+\sin^4 x}.$ 34. $\int \frac{\tan x \sec^2 x\, dx}{1+\tan^4 x}.$

35. $\int \frac{dx}{x^2-4x+13}.$ 36. $\int \frac{dx}{x^2+2}.$

37. $\int \frac{dx}{\{1+(\log x)^2\}x}.$ 38. $\int \frac{2a^2 x\, dx}{x^4+b^4}.$

39. $\int \frac{dx}{x^2-4}.$ 40. $\int \frac{dx}{a^2x^2-b^2}.$

41. $\int \frac{dx}{4x^2-1}.$ 42. $\int \frac{b\, dx}{b^2x^2-c^2}.$

43. $\int \frac{dx}{4-x^2}.$ 44. $\int \frac{\cos x\, dx}{9-\sin^2 x}.$

45. $\frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}.$ 46. $\frac{dt}{\sqrt{t^2-16}}.$

47. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}.$ 48. $\int \frac{dt}{\sqrt{16-t^2}}.$

49. $\int \frac{dx}{\sqrt{10+2x-x^2}}.$ 50. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}.$

51. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)(2-x)}}.$

52. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$ [ সংকেত : $x=\frac{1}{z}$ ধরিয়া $dx=-\frac{1}{z^2}\, dz$ লও।]

53. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^3+1}}.$ [ সংকেত : $\sqrt{x^3+1}=z$ ধরিয়া $3x^2\, dx=2z\, dz$ এবং $x^3=z^2-1$ লইয়া অগ্রসর হও। ]

7. $\int \cot x\, dx.$ 8. $\int \frac{\sec^2 x}{\tan x} dx.$ 9. $\int \frac{4x+3}{2x^2+3x+1} dx.$

10. $\int \frac{3x+1}{3x^2+2x+1} dx.$ 11. $\int \frac{b\, e^{ax}}{e^a x+b} dx.$

12. $\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} dx.$ 13. $\int e^{\tan x} \sec^2 x dx.$

14. $\int \frac{e^{\log x}}{dx} dx$ [ সংকেত : $\log_e x = z$ ধরিলে,

$e^z = x$ বা $e^{\log x} = x$ ; ইত্যাদি। ]

15. $\int \frac{\sin \theta\, d\theta}{1-\cos \theta}$. [ সংকেত : দেখাও যে $\frac{\sin \theta}{1-\cos\theta} = \cot\frac{\theta}{2}$ ইত্যাদি। ]

16. $\int \frac{e^\theta + a}{e^\theta - a} d\theta.$ [ সংকেত : প্রত্যক্ষ ভাগ দ্বারা,

$\frac{e^\theta+a}{e^\theta-a} = \frac{a+e^\theta}{-a+e^\theta} = -1 + \frac{2e^\theta}{-a+e^\theta}$ বলিয়া,

$\int \frac{e^\theta + a}{e^\theta - a}\, d = \int \left(\frac{2e^\theta}{e^\theta - a} - 1\right) d\theta$ ; $e^\theta = z$ ধরিয়া অগ্রসর হও। ]

17. $\int \operatorname{cosec} x\, dx$

[ সংকেত : $\operatorname{cosec} x = \frac{\operatorname{cosec} x\, (\operatorname{cosec} x - \cot x)}{\operatorname{cssec} x - \cot x}$

$= \frac{\operatorname{cosec}^2 x - \operatorname{cosec} x \cot x}{\operatorname{cosec} x - \cot x}$ ;

$\operatorname{cosec} x - \cot x = z$ ধরিয়া দেখাও যে,

$dz = (\operatorname{cosec}^2 x - \operatorname{cosec} x \cot x)\, dx$ ; ইত্যাদি ]

18. $\int \sin^2 x \cos x\, dx$ [ সংকেত : $\sin x = z$ ধরিয়া অগ্রসর হও। ]

19. $\int \frac{\cos (\log x)}{x} dx$ [ সংকেত : $\log x = z$ ধর। ]

20. $\int \frac{e^{\sin^{-1} x}}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

21. $\int \frac{e^{\tan^{-1} x}}{1+x^2} dx.$ 22. $\int \frac{(\log x + a)}{x} dx.$

23. $\int \frac{\log \sqrt[3]{x}}{d} dx.$ 24. $\int \sqrt{\tan x \sec^2 x\, dx}.$

25. $\displaystyle\int\frac{1}{(1+\tan x)^2\cos^2 x}\,dx.$ 26. $\displaystyle\int\frac{e^x(1+x)\,dx}{\sin^2(x e^x)}.$

27. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+25}.$ 28. $\displaystyle\int\frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}}.$

29. $\displaystyle\int\frac{x^2\,dx}{1+x^6}.$ 30. $\displaystyle\int\frac{x^4\,dx}{1+x^{10}}.$

31. $\displaystyle\int\frac{dx}{e^{2x}+e^{-2x}}.$ 32. $\displaystyle\int\frac{\cos x\,dx}{1+\sin^2 x}.$

33. $\displaystyle\int\frac{\sin 2x\,dx}{1+\sin^4 x}.$ 34. $\displaystyle\int\frac{\tan x\sec^2 x\,dx}{1+\tan^4 x}.$

35. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-4x+13}.$ 36. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+2}.$

37. $\displaystyle\int\frac{dx}{\{1+(\log x)^2\}x}.$ 38. $\displaystyle\int\frac{2a^2x\,dx}{x^4+b^4}.$

39. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-4}.$ 40. $\displaystyle\int\frac{dx}{a^2x^2-b^2}.$

41. $\displaystyle\int\frac{dx}{4x^2-1}.$ 42. $\displaystyle\int\frac{b\,dx}{b^2x^2-c^2}.$

43. $\displaystyle\int\frac{dx}{4-x^2}.$ 44. $\displaystyle\int\frac{\cos x\,dx}{9-\sin^2 x}.$

45. $\displaystyle\frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}.$ 46. $\displaystyle\frac{dt}{\sqrt{t^2-16}}.$

47. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}.$ 48. $\displaystyle\int\frac{dt}{\sqrt{16-t^2}}.$

49. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{10+2x-x^2}}.$ 50. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}.$

51. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{(x+1)(2-x)}}.$

52. $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$ [ সংকেত : $x=\frac{1}{z}$ ধরিয়া $dx=-\frac{1}{z^2}\,dz$ লও ।]

53. $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{x^3+1}}.$ [ সংকেত : $\sqrt{x^3+1}=z$ ধরিয়া $3x^2\,dx=2z\,dz$ এবং $x^3=z^2-1$ লইয়া অগ্রসর হও ।]

**৮.৭. অংশতঃ সমাকলন (Integration by parts) :**

$x$-সম্বলিত $f$ ও $g$ অপেক্ষক-দুইটি যদি অবকলনযোগ্য হয়, তবে

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\,g(x)\}=f(x)\frac{d}{dx}g(x)+g(x)\frac{d}{dx}f(x)$$

∴ উভয়পক্ষের সমাকলন করিলে,

$$f(x)\,g(x)=\int f(x)\frac{d}{dx}g(x)\,dx+\int g(x)\frac{d}{dx}f(x)\,dx$$

$$=\int f(x)\,g'(x)\,dx+\int g(x)\,f'(x)\,dx$$

$$\left[\because \frac{d}{dx}g(x)=g'(x) \text{ এবং } \frac{d}{dx}f(x)=f'(x)\right]$$

অথবা, $\int f(x)\,g'(x)\,dx=f(x)\,gx-\int f'(x)\,g(x)\,dx.$

কিন্তু, $\frac{d}{dx}g(x)=g'(x)$ বলিয়া $g(x)=\int g'(x)dx.$

সুতরাং $g'(x)=\phi(x)$ ধরিলে, $g(x)=\int \phi(x)dx.$

$$\therefore \int \mathbf{f}(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})\,\mathbf{dx}=\mathbf{f}(\mathbf{x})\int\phi(\mathbf{x})\mathbf{dx}-\int \mathbf{f}'(\mathbf{x}).[\int\phi(\mathbf{x})\mathbf{dx}]\mathbf{dx}.$$

অর্থাৎ, $x$-সাপেক্ষে, **দুইটি অপেক্ষক মানের গুণফলের সমাকল= প্রথম অপেক্ষক মান ও দ্বিতীয় অপেক্ষক মানের সমাকলের গুণফল− প্রথম−অপেক্ষক মানের অবকল-সহগ ও দ্বিতীয় অপেক্ষক মানের সমাকলের গুণফলের সমাকল।**

বিশ্লেষণ করিলে দেখা যায় যে, এই সূত্রটির সাহায্যে সমাকলনের কাজ দুইটি অংশে সম্পন্ন হয়। প্রথম অংশের জন্য লইতে হয় দ্বিতীয় অপেক্ষক মানটির সমাকল এবং দ্বিতীয় অংশে লইতে হয় প্রথম অপেক্ষক মানের অবকল-গুণিত দ্বিতীয় অপেক্ষক-মানের সমাকলের সমাকল।

এইভাবে অংশে অংশে সমাকলন পদ্ধতিকে তাই অংশতঃ সমাকলন বা Integration by parts বলিয়া অভিহিত করা হয়।

**বিশেষ দ্রষ্টব্য :** $f(x)=u,\ \phi(x)=v$ ধরিলে,

$\int f(x)\phi(x)dx=\int uvdx,$

$f(x)\int\phi(x)dx=u\int vdx$ এবং

$$\int f'(x)[\int\phi(x)dx]\,dx=\int\left(\frac{du}{dx}\times\int vdx\right)dx \text{ হইবে।}$$

∴ সূত্রটিকে নিম্নলিখিত আকারেও লেখা যায়—

$$\int (uv)dx = u\int vdx - \int\left(\frac{du}{dx}\times\int vdx\right)dx$$

নিচের উদাহরণ-কয়টিতে পদ্ধতিটির প্রয়োগ কৌশল দেখানো যাইতেছে। লক্ষ্য করিতে হইবে যে, এই পদ্ধতির সার্থকতা নির্ভর করে অপেক্ষক মান-দুইটির কোন্‌টিকে প্রথম এবং কোন্‌টিকেই বা দ্বিতীয় অপেক্ষক মান রূপে গ্রহণ করিতে হইবে, তাহা ঠিক করার উপর।



## উদাহরণমালা

**উদা. 1.** $\int x \log x\, dx$-এর মান নির্ণয় কর।

$\int x \log x\, dx = \int \log x . x\, dx$

এখন, $u=\log x$ এবং $v=x$ ধরিলে

$\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}$ এবং $\int vdx=\int xdx=\frac{x^2}{2}$

$$\therefore \int x\log x\, dx = \int \log x\times x\, dx = \int (uv)\, dx$$

$$= u\int vdx - \int\left(\frac{du}{dx}\times\int vdx\right)dx$$

$$= \log x . \frac{x^2}{2} - \int\left(\frac{1}{x}\times\frac{x^2}{2}\right)dx$$

$$= \frac{x^2\log x}{2} - \frac{1}{2}\int xdx$$

$$= \frac{x^2\log x}{2} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + c,$$

[ $c$ একটি ধ্রুবক সংখ্যা ]

$$= \frac{x^2\log x}{2} - \frac{x^2}{4} + c.$$

[**লক্ষণীয় :** এই প্রশ্নে, $\log x$-এর অবকলন-সহগ $\frac{1}{x}$ সুবিদিত বলিয়া উহাকে প্রথম অপেক্ষক-মান ধরাই সুবিধাজনক।]

**উদা. 2.** $\int xe^x dx$-এর মান নির্ণয় কর।

$x=u$ এবং $e^x=v$ ধরিলে, $\frac{du}{dx}=\frac{dx}{dx}=1$ এবং

$\int vdx=\int e^x dx=e^x$ বলিয়া

$\int x\, e^x\, dx=\int (uv)\, dx$

$$= u\int vdx - \int\left(\frac{du}{dx}.\int vdx\right)dx$$

$$=xe^x-\int(1.e^x)\,dx$$
$$=xe^x-\int e^x dx$$
$$=xe^x-e^x+c,$$ [ $c$ একটি ধ্রুবক-সংখ্যা ]

[ লক্ষণীয়, এখানে $\int e^x x\,dx=e^x\int x\,dx-\int\left(\frac{de}{dx}\times\int x\,dx\right)dx=\frac{e^x x^2}{2}-\int\frac{e^x x^2}{2}\,dx$ হইয়া পড়ে। সেক্ষেত্রে $\int e^x x\,dx$-এর সমাকল বাহির করিতে গিয়া জটিলতর $\frac{1}{2}\int e^x x^2 dx$-এর সমাকল-নির্ণয়ের সমস্যা দেখা দেয়। সেই কারণে $x$-কে প্রথম এবং $e^x$-কে দ্বিতীয় অপেক্ষক মান ধরা হইয়াছে। ]

উদা. 3. $\int x\cos x\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

$$\int x\cos x\,dx=x\times\int\cos x\,dx-\int\left(\frac{dx}{dx}\times\int\cos x\,dx\right)dx$$
$$=x\sin x-\int(1.\sin x)\,dx=x\sin x-(-\cos x)+c$$
$$=x\sin x+\cos x+c$$

উদা. 4. $\int\log x\,dx$-এর মান নির্ণয় কর।

$\log x=u$ এবং $1=v$ ধরিলে,

$\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}$ এবং $\int v dx=\int 1.dx=\int dx=x.$

$$\therefore\int\log x\,dx=\int\log x.1.dx$$
$$=\int(uv)dx$$
$$=u\int vdx-\int\left(\frac{du}{dx}\times\int vdx\right)dx$$
$$=\log x.x-\int\frac{1}{x}.x.dx$$
$$=x\log x-\int dx$$
$$=x\log x-x+c,$$ যেখানে $c$ একটি ধ্রুবক-সংখ্যা।

উদা. 5. $\int x(x-3)^2dx$-এর মান নির্ণয় কর।

$$\int x(x-3)^2dx=x\int(x-3)^2dx-\int\left(\frac{dx}{dx}.\int(x-3)^2dx\right)dx$$
$$=x\frac{(x-3)^3}{3}-\int 1.\frac{(x-3)^3}{3}\,dx$$
$$=\frac{x(x-3)^3}{3}-\frac{1}{3}\frac{(x-3)^4}{4}+c=\frac{x(x-3)^3}{3}-\frac{(x-3)^4}{12}+c$$

উদা. 6. $\int \cos^{-1}x\, dx$-এর মান নির্ণয় কর।

$u=\cos^{-1}x$ এবং $v=1$ ধরিলে

$\frac{du}{dx}=\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ এবং $\int v dx=\int dx=x$

$$\therefore \int \cos^{-1}x\, dx=\int \cos^{-1}x.1.dx=\int (uv)\, dx$$

$$=u\int v\, dx-\int\left(\frac{du}{dx}\times\int v dx\right)dx.$$

$$=\cos^{-1}x.x-\int\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.x\right)dx$$

$$=x\cos^{-1}x-\int\frac{-x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

এখন $1-x^2=z$ ধরিলে $-2x\, dx=dz$.

$$\therefore \int\frac{-x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{-2x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{dz}{\sqrt{z}}=\frac{1}{2}\int z^{-\frac{1}{2}}dz$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{z^{-\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}}+c=z^{\frac{1}{2}}+c=\sqrt{1-x^2}+c$$

$$\therefore \int\cos^{-1}x\, dx=x\cos^{-1}x-\sqrt{1-x^2}+c.$$

## প্রশ্নমালা 12

মান নির্ণয় কর :

1. $\int x^2e^x dx$.
2. $\int xe^{2x}dx$.
3. $\int \log x^2 dx$.
4. $\int x^2\log x\, dx$.
5. $\int \frac{\log x}{x^2}dx$
6. $\int x\sin x\, dx$.
7. $\int x\sec^2 x\, dx$.
8. $\int x\operatorname{cosec}^2 x\, dx$.
9. $\int x\sin 2x\, dx$.
10. $\int x\cos 2x\, dx$.
11. $\int x^2\sin x\, dx$
12. $\int x^2\cos dx$.
13. $\int \sin^{-1}x\, dx$.
14. $\int \tan^{-1}x\, dx$
15. $\int \cot^{-1}x\, dx$
16. $\int \sec^{-1}x\, dx$.
17. $\int \operatorname{cosec}^{-1}x\, dx$.
18. $\int x\tan^{-1}x\, dx$.
19. $\int x\cot^{-1}x\, dx$.
20. $\int x(x-2)^4 dx$.

21. $\int (\log x)^2 dx$.  22 $\int x^{\frac{1}{2}} (\log x)^2 dx$.

23. $\int x \sec x \tan x \, dx$  24. $\int x \operatorname{cosec} x \cot x \, dx$.

25. $\int e^x(1+x) \log (xe^x)$  [সংকেত : $xe^x = z$ ধরিয়া অগ্রসর হও]

26. $\int (x-1)^2 (x-2)^{10} dx$.

27. $\int x \sin^2 x \, dx$.  28 $\int x \cos^2 x \, dx$

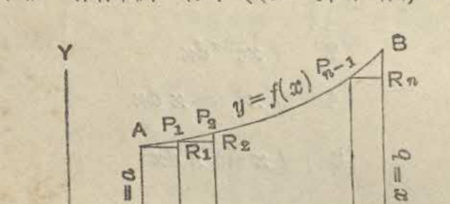
**6 10. নির্দিষ্ট সমাকল (Definite integral) :**

(*a*) এ-পর্যন্ত সমাকলনকে অবকলনের বিপরীত প্রক্রিয়া-রূপে গণ্য করিয়া সমাকল-নির্ণয়ের পদ্ধতি আলোচিত হইয়াছে। দেখা গিয়াছে যে, ঐভাবে প্রাপ্ত সমাকল-সমূহের কোন নির্দিষ্ট মান থাকে না। সেইজন্য তাহাদের নাম হইয়াছে অনির্দিষ্ট সমাকল।

এইবার নির্দিষ্ট সমাকল বলিতে কি বুঝায়, তাহার আলোচনা করা যাইতে পারে। ঐতিহাসিক দিক্ দিয়া বলিতে গেলে এই নির্দিষ্ট সমাকলের ধারণা হইতেই সমাকলন গণিতের জন্ম ঘটে। জ্যামিতিক অর্থে সীমাবদ্ধ সমতলের ক্ষেত্রফলের সীমান্ত-মানকেই নির্দিষ্ট সমাকল বলা হয়। অন্য অর্থে নির্দিষ্ট সমাকল হইল একটি সমষ্টির সীমান্ত-মান। পরবর্তী নির্দিষ্ট সমাকলের জ্যামিতিক ব্যাখ্যায় সমাকলের এই দুইটি অর্থই পরিস্ফুট হইবে।

**(*b*) সীমাবদ্ধ সমতলবিশেষের ক্ষেত্রফল হিসাবে নির্দিষ্ট সমাকল (Definite integral as an area of a closed plane region) :**

$y=f(x)$, $x=a$, $x=b$ এবং $y=0$—এই কয়টি অপেক্ষকের দ্বারা যেন AMNB ক্ষেত্রটি সীমাবদ্ধ। চিত্র হইতে দেখা যায়, A বিন্দুর ভুজ $=$ OM $=a$ এবং কোটি $=$ AM $=f(a)$ ; B বিন্দুর ভুজ $=$ ON $= b$ এবং কোটি $=$ BN $=f(b)$.




46 নং চিত্র

স্পষ্টত, *f*-এর ব্যাপ্তি $[a,b]$ এবং তাহা $a$ ও $b$-এর মধ্যে সীমাবদ্ধ। এখন, $f$ যদি $(b-a)$ অবকাশে সন্তত হয়, তবে $(b-a)$ বা MN-কে যেন $Q_1, Q_2, Q_3 \cdots Q_{n-1}$ ও N বিন্দু দ্বারা $h$-দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট $n$-সংখ্যক, $MQ_1$, $Q_1Q_2$, $Q_2Q_3$, প্রভৃতি খণ্ডে বিভক্ত করা হইল।

চিত্র হইতে দেখা যায়, AB-এর উপরিস্থ $P_1$ বিন্দুর ভুজ $= OQ_1 = OM + MQ_1 = a+h$ এবং উহার কোটি $P_1Q_1 = f(a+h)$. অনুরূপে $P_2$, $P_3 \cdots$ প্রভৃতি বিন্দুর ভুজ

যথাক্রমে $a+2h$, $a+3h$ প্রভৃতি এবং তাহাদের কোটি যথাক্রমে $f(a+2h)$, $f(a+3h)$ প্রভৃতি। এখন, $b-a=nh$ বা $\frac{b-a}{n}=h$ বলিয়া, $n\to\infty$ হইলে $h\to 0$ হইবে; এবং সেক্ষেত্রে A, $P_1$, $P_2$··· প্রভৃতি বিন্দুগুলি পরস্পরের অতি সন্নিকটে ঘেঁষিয়া আসিবে। সেই অবস্থায় $AQ_1$ আয়তটির (অর্থাৎ $AMQ_1R_1$ আয়তটি) প্রায় $AMQ_1P_1$ ক্ষেত্রের সমান বলিয়া ধরা যাইবে। এইভাবে $n\to\infty$ হইলে $AQ_1$, $P_1Q_2$, $P_2Q_3$ প্রভৃতি আয়তগুলির সমষ্টির সীমান্ত-মানই শেষ পর্যন্ত AMNB-এর ক্ষেত্রফলের সমান হইয়া যাইবে।

কিন্তু $n\to\infty$ হইলে $h\to 0$ হইবে এবং $AQ_1$, $P_1Q_2$, $P_2Q_3$ প্রভৃতি আয়তের ক্ষেত্রফল হইবে যথাক্রমে $\underset{h\to 0}{\text{Lt}}\ f(a)h$, $\underset{h\to 0}{\text{Lt}}\ f(a+h)h$, $\underset{h\to 0}{\text{Lt}}\ f(a+2h)h$ প্রভৃতি।

যেহেতু, এই সীমান্ত মানগুলির সমষ্টি উহাদের সমষ্টির সীমান্ত মানের সমান, সেইহেতু AMNB-এর ক্ষেত্রফল হইবে $\underset{h\to 0}{\text{Lt}}\ [f(a)h+f(a+h)h+f(a+2h)h+\cdots+f(a+\overline{n-1}h)h]$

তাহা হইলে দেখা যায়, AMNB-এর ক্ষেত্রফল অমিতক্ষুদ্র $n$-সংখ্যক আয়তের সমষ্টির সীমান্ত মান।

গ্রীক অক্ষর $\Sigma$ (সিগ্‌মা) দ্বারা এই সমষ্টির সীমান্ত মানটিকে সংক্ষেপে

$\underset{h\to 0}{\text{Lt}}\ \sum_{r=0}^{n-1} f(a+rh)h$ বা $\underset{h\to 0}{\text{Lt}}\ h\sum_{r=0}^{n-1} f(a+rh)$ আকারে প্রকাশ করা যায়।

$\Sigma$ অক্ষরটি ইংরেজি Sum-এর আদ্য অক্ষর S-এর স্থলাভিষিক্ত।

সুতরাং $r=0, 1, 2, 3, 4\cdots(n-1)$ বসাইয়া দেখা যায়,

$$\underset{h\to 0}{\text{Lt}}\ h\sum_{r=0}^{n-1} f(a+rh)=\underset{h\to 0}{\text{Lt}}\ h\,[f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\cdots\cdots+f(a+\overline{n-1}h)]$$

কলন গণিতের সংকেতে $\underset{h\to 0}{\text{Lt}}\ \sum_{r=0}^{n-1} f(a+rh)\,h$ কে $\int_a^b f(x)dx$ রূপে লেখা হয় এবং তাহাকেই $a$ ও $b$ সীমার মধ্যে $x$-সাপেক্ষে $f(x)$-এর নির্দিষ্ট সমাকল বলা হয়।

এইভাবে দেখা যায়, নির্দিষ্ট সমাকল দ্বারা একটি সীমাবদ্ধ সমতল ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সূচিত হয়। আবার উহার মান একটি সমষ্টির সীমান্ত মান বলিয়া নির্দিষ্ট সমাকলকে একটি সমষ্টির সীমান্ত মানরূপেও বর্ণনা করা যায়।

(c) **একটি সমষ্টির সীমান্ত-মান হিসাবে নির্দিষ্ট সমাকল (Definite integral as the limit of a sum) :**

পূর্ববর্তী (b) বিভাগের আলোচনা হইতে নির্দিষ্ট সমাকলের নিম্নরূপ একটি সংজ্ঞা নির্দেশ করা চলে :

**x-সম্বলিত একটি অপেক্ষক f-এর ব্যাপ্তি যদি [a, b] অবকাশে সীমাবদ্ধ হয়, যেখানে $b>a$ এবং যদি $\frac{b-a}{n}=h$ হয় তবে,**

**$\underset{h\to 0}{\text{Lt.}}\ h[f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\cdots\cdots+f(a+\overline{n-1}.h)]$-কে x-সাপেক্ষে a ও b সীমার মধ্যে f(x)-এর নির্দিষ্ট সমাকল বলে এবং তাহাকে $\int_a^b f(x)dx$ সংকেত দ্বারা প্রকাশ করা হয়।**

অর্থাৎ $\int_a^b f(x)dx=\underset{h\to 0}{\text{Lt}}\ h[f(a)+f(a+h)+(a+2h)+\cdots+f(a+\overline{n-1}.h)]$

$\int_a^b f(x)dx$-সূচিত সমাকলটির **নিম্ন-সীমা** (Lower limit) $a$ দ্বারা এবং **উর্ধ্ব সীমা** (Upper limit) $b$ দ্বারা সূচিত হয়।

তাহা হইলে, উপরের সংজ্ঞা অনুসারে নির্দিষ্ট সমাকল হইল একটি সমষ্টির সীমান্ত-মান। এই সীমান্ত-মান নির্দিষ্ট বলিয়াই এইরূপ সমাকলকে নির্দিষ্ট বলা হয়।

**বিশেষ দ্রষ্টব্য :** $h\to 0$ হইলে $h\,f(a)$ এবং $h\,f(b)$ উভয়ই শূন্যগামী হয়। সেইজন্য $h\,f(a)$ কে বাদ দিয়া তাহার বদলে $h\,f(b)$ অর্থাৎ $h\,f(a-nh)$ লিখিলে সীমান্ত-মানটির হেরফের হয় না। অতএব কখনও কখনও নির্দিষ্ট সমাকলকে নিম্নরূপেও লেখা যায় :

$$\int_a^b f(x)dx=\underset{h\to 0}{\text{Lt}}\ h[f(a+h)+f(a+2h)+\cdots\cdots f(a-nh)].$$

(d) **কয়েকটি আদর্শ নির্দিষ্ট সমাকল**

(i) **c একটি ধ্রুবক-সংখ্যা হইলে সংজ্ঞা হইতে $\int_a^b c\,dx$-এর মান নির্ণয় কর :**

এখানে $f(x)=c$ বলিয়া $f(a)=c$, $f(a+h)=c$, ইত্যাদি এবং $b-a=nh$.

∴ সংজ্ঞানুসারে,

$$\int_a^b c\,dx = \int_b^b f(x)\,dx$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{Lt}}\ h[f(a)+f(a+h)+\cdots\cdots f(a+\overline{n-1}h)]$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{Lt}}\ h[c+c+\cdots\cdots n\text{-সংখ্যক পদ পর্যন্ত}]$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{Lt}}\ h[cn] = \underset{h\to 0}{\text{Lt}}\ cnh$$

$$= c(b-a) \qquad [\because\ nh = b-a].$$

(ii) প্রথম নিয়ম বা সংজ্ঞা হইতে $\int_a^b x\,dx$-এর মান নির্ণয় :

এখানে $f(x)=x$ এবং $b-a=nh$.

$$\therefore \int_a^b x\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{Lt}}\ h[f(a)+f(a+h)-f(a+2h)+\cdots\cdots+f(a+\overline{n-1}h)]$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{Lt}}\ h[a+(a+h)+(a+2h)+\cdots\cdots+(a+\overline{n-1}h)]$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{Lt}}\ h[(a+a+\cdots\cdots n\text{-সংখ্যক পদ পর্যন্ত})+h(1+2+3+\cdots\ (n-1)\text{-সংখ্যক পদ পর্যন্ত}]$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{Lt}}\ h\left[an+h\,.\,\frac{n(n-1)}{2}\right]$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{Lt}}\left[an\,.\,h+nh\,.\frac{h(n-1)}{2}\right]$$

$$= \underset{h\to}{\text{Lt}}\left[a\,b-a)+\frac{(b-a)(nh-h)}{2}\right)$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{Lt}}\left[(b-a\left(a+\frac{nh-h}{2}\right)\right]$$

$$= \left[\frac{(b-a)(2a+b-a)}{2}\right]$$

$$= \left[\frac{(b-a)(b+a)}{2}\right] = \frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}.$$

(iii) সংজ্ঞা হইতে $\int_a^b x^2\,dx$-এর মান নির্ণয় :

$b-a=nh$ এবং $f(x)=x^2$ ধরিয়া,

$$\int_a^b x^2\,dx=\int_a^b f(x)\,dx=\underset{h\to 0}{\mathrm{Lt}}\ h\left[f(a)+f(a+h)+\cdots\cdots+f(a+\overline{n-1}h)\right]$$

$$=\underset{h\to 0}{\mathrm{Lt}}\ h[a^2+(a+h)^2+(a+2h)^2+\cdots\cdots n\text{-সংখ্যক পদ পর্যন্ত}]$$

$$=\underset{h\to 0}{\mathrm{Lt}}\ h[a^2+(a^2+2ah+h^2)+(a^2+4ah+4h^2)+\cdots\cdots$$
$$n\text{-সংখ্যক পদ পর্যন্ত}]$$

$$=\underset{h\to 0}{\mathrm{Lt}}\ h[a^2n+2ah\{1+2+3+\cdots\cdots(n-1)\text{ পদ পর্যন্ত}\}$$
$$+h^2\{1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots(n-1)\text{ পদ পর্যন্ত}\}]$$

$$=\underset{h\to 0}{\mathrm{Lt}}\left[a^2\,nh+2ah^2\,.\,\frac{n(n-1)}{2}+h^3\frac{(n-1)\,n(2n-1)}{6}\right]$$

$$=\underset{h\to 0}{\mathrm{Lt}}\left[a^2(b-a)+a\,nh(nh-h)+\frac{nh\,(nh-h)(2nh-h)}{6}\right]$$

$$=a^2(b-a)+a(b-a)(b-a)+\frac{(b-a)(b-a)\,2(b-a)}{6}$$

[ $h$ অগ্রাহ্য করিয়া ]

$$=(b-a)\,(a^2+ab-a^2)+\frac{(b-a)^3}{3}$$

$$=ab(b-a)+\frac{(b-a)^3}{3}$$

$$=\frac{(b-a)^3+3ab(b-a)}{3}=\tfrac{1}{3}(b^3-a^3)$$

(iv) $\int_a^b e^x\,dx$-এর মান নির্ণয় :

এখানে $f(x)=e^x$ এবং $b-a=nh$.

$$\therefore \int_a^b e^x\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{Lt}}\; h[f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\cdots\cdots+f(a+\overline{n-1}h)]$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{Lt}}\; h[e^a+e^{a+h}+e^{a+2h}+\cdots\cdots+e^{a+(n-1)h}]$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{Lt}}\; h[e^a+e^a.\,e^h+e^a\,e^{2h}+\cdots\cdots+e^a.\,e^{(n-1)h}]$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{Lt}}\; h\,e^a\,[1+e^h+e^{2h}+\cdots\cdots+e^{(n-1)h}]$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{Lt}}\; h\,e^a\,\frac{e^{nh}-1}{e^h-1}$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{Lt}}\; (e^{nh}-1)\,e^a.\frac{h}{e^h-1}$$

$$= (e^{b-a}-1)e^a, \text{ যেহেতু } \underset{h\to 0}{\text{Lt}}\; \frac{e^h-1}{h}=1$$

$$= e^b - e^a.$$

## উদাহরণমালা

উদা. 1. $\int_1^3 4\,dx$-এর মান নির্ণয় কর।

এখানে $f(x)=4$, $nh=3-1=2$ এবং

$$f(1)=f(1+h)=\cdots\cdots f(1+\overline{n-1}h)=4$$

$$\therefore \int_1^3 4\,dx = \int_1^3 f(x)\,dx$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{Lt}}\; h[f(1)+f(1+h)+\cdots\cdots f(1+\overline{n-1}h)]$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{Lt}}\; h[4+4+4+\cdots\cdots n \text{ সংখ্যক পদ পর্যন্ত }]$$

$$= \underset{h\to 0}{\mathrm{Lt}}\ h\,4n = \underset{h\to 0}{\mathrm{Lt}}\ 4nh$$

$$= 4\times 2 = 8. \qquad [\because\ nh = 2]$$

উদা. 2. $\int_0^5 x\,dx$-এর মান নির্ণয় কর।

এখানে, $f(x) = x$ এবং $nh = 5 - 0 = 5$

$$\therefore \int_0^5 x\,dx = \int_0^5 f(x)\,dx$$

$$= \underset{h\to 0}{\mathrm{Lt}}\ h[f(0) + f(0+h) + f(0+2h) + \dots\dots + f(0+\overline{n-1h})]$$

$$= \underset{h\to 0}{\mathrm{Lt}}\ h[f(0) + f(h) + f(2h) + \dots\dots + f\{(n-1)h\}]$$

$$= \underset{h\to 0}{\mathrm{Lt}}\ h[0 + h + 2h + \dots\dots + (n-1)h]$$

$$= \underset{h\to 0}{\mathrm{Lt}}\ h^2[1 + 2 + \cdots\cdots (n-1) \text{ সংখ্যক পদ পর্যন্ত }]$$

$$= \underset{h\to 0}{\mathrm{Lt}}\ h^2.\frac{n(n-1)}{2} = \underset{h\to 0}{\mathrm{Lt}}\ \frac{nh\,(nh-h)}{2}$$

$$= \underset{h\to 0}{\mathrm{Lt}}\ \frac{5(5-h)}{2} = \underset{h\to 0}{\mathrm{Lt}}\left(\frac{25}{2} - \frac{5h}{2}\right)$$

$$= \frac{25}{2} = 12\tfrac{1}{2}.$$

উদা. 3. $\int_{-1}^3 x^2\,dx$-এর মান নির্ণয় কর।

$f(x) = x^2$ এবং $nh = \{3 - (-1)\} = 4$ ধরিয়া

$$\int_{-1}^3 x^2\,dx = \int_{-1}^3 f(x)\,dx$$

$$= \underset{h\to 0}{\mathrm{Lt}}\ h[f(-1) + f(-1+h) + \cdots\cdots + f(-1+\overline{n-1h})]$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{Lt}}\; h[1^2+(1^2-2h+h^2)+\cdots\cdots n\text{-সংখ্যক পদ পর্যন্ত}]$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{Lt}}\; h[(1^2+1^2+\ldots\ldots n^2)$$
$$-2h\{1+2+3+\ldots\ldots(n-1)\}$$
$$+h^2\{1+2^2+3^2+\ldots\ldots+(n-1)^2\}]$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{Lt}}\; h\left[n-2h\,\frac{n(n-1)}{2}+\frac{h^2(n-1)n\,(2n-1)}{6}\right]$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{Lt}}\left[nh-nh(nh-h)+\frac{(nh-h)\,nh\,(2nh-h)}{6}\right]$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{Lt}}\left[4-4(4-h)+\frac{(4-h)4(2.4-h)}{6}\right]$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{Lt}}\left[4-16+4h+\frac{2(4-h)(8-h)}{3}\right]$$

$$=\left[-12+\frac{2.4.8}{3}\right]=\left(\frac{-36+64}{3}\right)=\frac{28}{3}=9\tfrac{1}{3}.$$

## প্রশ্নমালা 13

নিম্নলিখিত নির্দিষ্ট সমাকলগুলির মান নির্ণয় কর :

1. $\int_1^2 3dx.$ 2. $\int_0^3 2dx.$ 3. $\int_{-1}^1 1dx.$

4. $\int_{a-1}^{a+1} a\,dx.$ 5. $\int_5^8 x\,dx$ 6. $\int_{-2}^3 x\,dx.$

7. $\int_l^k z\,dz.$ 8. $\int_0^1 t\,dt.$ 9. $\int_{-1}^0 s\,ds.$

10. $\int_1^4 x^2\,dx$ 11. $\int_{-1}^4 z^2\,dz.$ $\int^l t^2\,dt.$

13. $\int_2^3 e^x\,dx.$ 14. $\int_1^a e^x\,dx.$ 15. $\int_b^1 e^x\,dx.$

**6.11. নির্দিষ্ট সমাকলের কয়েকটি প্রাথমিক ধর্ম (Elementary properties of definite integrals) :**

(i) $\int_a^a f(x)dx = 0.$

সংজ্ঞা হইতে দেখা যায় যে, এখানে $a-a=nh$ অর্থাৎ $nh=0$ ;

অতএব $h=0$, কেননা $n \neq 0$.

$$\therefore \int_a^a f(x)dx = \underset{h\to 0}{\text{Lt}}\ h[f(a)+f(a+h)+\cdots\cdots+f(a+\overline{n-1}h)]$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{Lt}}\ 0\times[f(a)+f(a+h)+\cdots\cdots+f(a+\overline{n-1}h)]$$

$$=0$$

$$\therefore \int_a^a f(x)dx = 0.$$

(ii) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

$nh=b-a$ এবং $nh'=a-b$ ধরিলে,

$n(h+h')=b-a+a-b=0$ বা $h+h'=0$ বা $h'=-h.$

$$\therefore \int_a^b f(x)dx = \underset{h\to 0}{\text{Lt}}\ h[f(a+h)+f(a+2h)+\cdots\cdots+f(a+\overline{n-1}h)+f(a+nh)]$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{Lt}}\ -(-h)[f(b-\overline{n-1}h)+f(b-\overline{n-2}h)+\cdots\cdots+f(b-h)+f(b)],$$

$[\because\ a=b-nh]$

$$= -\underset{h'\to 0}{\text{Lt}}\ h'[f(b+\overline{n-1}h')+f(b+\overline{n-2}h')+\cdots\cdots+f(b+h')+f(b)]$$

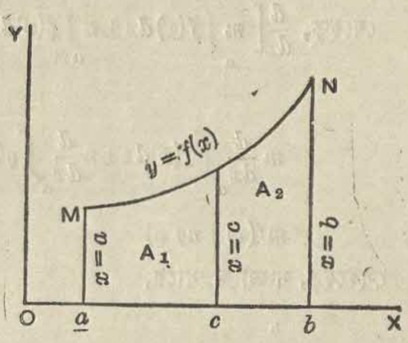
$$= -\underset{h'\to 0}{\text{Lt}}\ h'[f(b)+f(b+h')+\cdots\cdots+f(b+\overline{n-2}h')+f(b+\overline{n-1}h')]$$

$$= -\int_b^a f(x)dx$$

$$\therefore \quad \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

(iii) $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

$\int_a^b f(x)dx$ নির্দিষ্ট সমাকলটি যেন $y=f(x)$-এর লেখ, $x=a$, $x=b$ ও $x$-অক্ষদ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রফল = A.




47 নং চিত্র

অনুরূপে, $x=a$ ও $x=c$-এর মধ্যে $y=f(x)$ ও $x$-অক্ষের দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রফল $A_1 = \int_a^c f(x)dx$ এবং $x=c$ ও $x=b$-এর মধ্যে $y=f(x)$ ও $x$-অক্ষের দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রফল

$$A_2 = \int_c^b f(x)dx$$

চিত্র হইতে দেখা যায় যে, $A = A_1 + A_2$

অর্থাৎ $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

(iv) $$\int_a^b mf(x)dx = m\int_a^b f(x)dx.$$

যেহেতু, $\frac{d}{dx}\left[ m\int_a^b f(x)dx \right] = m\,\frac{d}{dx}\int_a^b f(x)dx = m\,f(x)$

সেইহেতু, সংজ্ঞা অনুসারে, $\int_a^b mf(x)dx = m\int_a^b f(x)dx.$

(v) $$\int_a^b [mf(x) \pm ng(x)]dx = m\int_a^b f(x)dx \pm n\int_a^b g(x)dx$$

যেহেতু, $\frac{d}{dx}\left[m\int_a^b f(x)\,dx \pm n\int_a^b g(x)\,dx\right]$

$$= m\frac{d}{dx}\int_a f(x)dx \pm n\frac{d}{dx}\int_a g(x)dx$$

$$= mf(x) \pm ng\, x)$$

সেইহেতু, সংজ্ঞা অনুসারে,

$$\int_a^b [mf(x) \pm ng(x)]\,dx = m\int_a^b f(x)dx \pm n\int_a^b g(x)dx.$$

## উদাহরণমালা

উদা. 1. $\int_5^5 x^2dx$-এর মান নির্ণয় কর।

$x^2 = f(x)$ এবং $5 = a$ ধরিলে,

$$\int_5^5 x^2dx = \int_a^a f(x)dx = 0.$$

উদা. 2. দেখাও যে $\int_1^3 x\,dx = -\int_3^1 x\,dx.$

$$\int_1^3 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3 = \frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{9-1}{2} = \frac{8}{2} = 4.$$

আবার,

$$\int_3^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_3^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{3^2}{2} = \frac{1-9}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

$$\therefore \quad \int_1^3 x\,dx = 4 = -(-4) = -\int_3^1 x\,dx.$$

উদা. 3. $\int_0^2 |x-1|\,dx$-এর মান নির্ণয় কর।

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)dx$$ সূত্র অনুসারে,

$$\int_0^2 |x-1|\,dx = \int_0^1 |x-1|\,dx + \int_1^2 |x-1|\,dx$$

এখন পরম মানের নিয়ম অনুসারে $(x-1) \leqslant 0$ হইলে অর্থাৎ $x \leqslant 1$ হইলে

$|x-1| = -(x-1)$ ; এবং $(x-1) \geqslant 0$

বা $x \geqslant 1$ হইলে $|x-1| = -(x-1)$

$\therefore$ [0, 1] অবকাশে $|x-1| = -(x-1)$ এবং [1, 2] অবকাশে $|x-1| = x-1.$

$$\therefore \quad \int_0 |x-1|\,dx = \int_0^1 |x-1|\,dx + \int_1^2 |x-1|\,dx$$

$$= \int_0^1 -(x-1)dx + \int_1^2 (x-1)dx$$

$$= -\int_0^1 (x-1)dx + \int_1^2 (x-1)dx$$

$$= -\int_0^1 x\,dx + \int_0^1 1\,dx + \int_1^2 x\,dx - \int_1^2 1.dx$$

$$= -\left(\frac{1^2}{2}-\frac{0}{2}\right)+(1-0)+\left(\frac{2^2}{2}-\frac{1^2}{2}\right)-(2-1)$$
$$= -\tfrac{1}{2}+1+2-\tfrac{1}{2}-1=2-1=1.$$

উদা. 4. $\int_3^4 (5x^2-3x+4)\,dx$-এর মান নির্ণয় কর।

$$\int_3^4 (5x^2-3x+4)\,dx = \int_3^4 5x^2 dx - \int_3^4 3x\,dx + \int_3^4 4dx$$
$$=5\int_3^4 x^2 dx - 3\int_3^4 x\,dx + 4\int_3^4 1.dx$$
$$=5\left(\frac{4^3}{3}-\frac{3^3}{3}\right)-3\left(\frac{4^2}{2}-\frac{3^2}{2}\right)+4(4-3)$$
$$=\tfrac{5}{3}(4-3)\,4^2+12+3^2)-\tfrac{3}{2}(4+3)(4-3)+4.1.$$
$$=\frac{5}{3}(16+12+9)-\frac{37}{2}+4$$
$$=\frac{5\times 37}{3}-\frac{21}{2}+4=\frac{185\times 2-21\times 3+4\times 3\times 2}{6}$$
$$=\frac{331}{6}=55\tfrac{1}{6}.$$

## প্রশ্নমালা 14

নিম্নলিখিত সমাকলগুলির প্রত্যেকটির মান নির্ণয় কর :—

1. $\int_{-3}^{5} 2x\,dx.$ 2. $\int_{-3}^{3} (3x+1)dx.$ 3. $\int_{-1}^{1} 2(x+1)dx.$

4. $\int_{-1}^{0} (cx+d)\,dx.$ 5. $\int_{-1}^{2} 3x^2 dx.$ 6. $\int_{-2}^{1} (x^2+2)\,dx.$

7. $\int_{-2}^{2} (2x^2+1)dx.$ 8. $\int_{1}^{4} (3z^2-6z)dz.$ 9. $\int_{-1}^{0} (1-r^2)dr.$

10. $\int_{-1}^{1} (1+r)^2 dr.$ 11. $\int_{-1}^{2} |\,x\,|\,dx.$ 12. $\int_{-2}^{1} |\,x\,|\,dx.$

13. $\int_0^5 |x-2|\,dx$ [ সংকেত : $|x-2| = -(x-2)$ যদি $(x-2)<0$

অর্থাৎ যদি $x<2$ হয় ; $\therefore \int_0^3 |x-2|\,dx = \int_3^2 |x-2|\,dx + \int_2^3 |x-2|\,dx$

লইয়া অগ্রসর হও। ]

14. $\int_0^3 |x|\,(3x+2)dx.$ 15. $\int_1^4 |x-3|\,(x+3)dx.$

16. $\int_a^b 5x\,dx + \int_b^a 3x\,dx.$ 17. $\int_c^b (x+a)^2 dx + \int_b^c (x-a)^2 dx.$

18. $\int_{-a}^{a} (x+a)^3\,dx + \int_a^{-a} (x-a)^3 dx.$ 19. $\int_{-a}^{2} (x-1)(x-2)dx.$

20. $\int_{-1}^{2} (x-1)dx \times \int_{-1}^{2} (x-2)dx.$

**6.12. সমাকলন-গণিতের মৌলিক উপপাদ্য (Fundamental theorem of integral calculus) :**

6.11 অনুচ্ছেদের আলোচনা ও উদাহরণমালা হইতে দেখা যায় যে, নির্দিষ্ট সমাকলের মান সর্বদা একটি অন্তরফলের আকারে প্রকাশিত হয়। সমাকলন-গণিতে এইরূপ অন্তরফল প্রকাশ করিবার জন্য একটি সংকেত ব্যবহার করা হয়। সংকেতটি এইরূপ –

একটি অপেক্ষক F-এর ব্যাপ্তিতে দুইটি মান যদি $a$ ও $b$ হয়, তবে $F(b)-F(a)$ দ্বারা সূচিত অন্তরফলটিকে সাংকেতিক ভাষায়

$$F(x)\Big|_a^b$$ আকারে প্রকাশ করা হয়।

অতএব, $$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

এখন, $F(x)=\frac{x^{r+1}}{r+1}$ এবং $f(x)=x^r$ হইলে,

$$\frac{d}{dx}F(x)=\frac{d}{dx}\frac{x^{r+1}}{r+1}=x^r=f(x)$$

$$\therefore \int f(x)dx=F(x) \text{ অর্থাৎ } \int x^r dx=\frac{x^{r+1}}{r+1}$$

এইবার, $r=0$, 1 ও 2 বসাইয়া অনুরূপ অনির্দিষ্ট ও নির্দিষ্ট সমাকলগুলিকে তুলনা করিলে দেখা যায়,

(i) $$\int x^0 dx=\frac{x^{0+1}}{0+1}=x \text{ এবং } \int_a^b x^0 dx=\int_a^b 1.dx=b-a=F(b)-F(a),$$

[ ∵ এখানে $f(x)=x^0$ এবং $F(x)=x$ ]

(ii) $$\int x\,dx=\frac{x^{1+1}}{1+1}=\frac{x^2}{2} \text{ এবং } \int_a^b x\,dx=\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}=F(b)-F(a),$$

[ ∵ এখানে $f(x)=x$ এবং $F(x)=\frac{x^2}{2}$ ]

(iii) $$\int x^2 dx=\frac{x^{2+1}}{2+1}=\frac{x^3}{3} \text{ এবং } \int_a^b x^2\,dx=\frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3}=F(b)-F(a),$$

[ ∵ এখানে $f(x)=x^2$ এবং $F(x)=\frac{x^3}{3}$ ]

এইরূপে সাধারণভাবে বলা যায়,

$$\int x^r\,dx=\frac{x^{r+1}}{r+1} \text{ বলিয়া } \int_a^b x^r dx=F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b$$

কিন্তু কল্পনা অনুসারে $x^r=f(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{r+1}}{r+1}\right)=\frac{d}{dx}F(x).$

$\therefore \int f(x)dx=F(x)$ হইলে,

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a).$$

স্পষ্টত, উল্লিখিত সম্বন্ধটি দ্বারা অনির্দিষ্ট ও নির্দিষ্ট সমাকলের মধ্যে একটি যোগসূত্র স্থাপিত হইয়াছে এবং ইহাই সমাকল-গণিতের মৌলিক উপপাদ্য নামে পরিচিত।

কিন্তু এই প্রসঙ্গে উল্লেখযোগ্য যে, $[a, b]$ বদ্ধ অবকাশে $f(x)$ সন্তত হইলেই ঐ অবকাশে প্রতিটি $x$-মানের জন্য $x$ সাপেক্ষে $f(x)$-এর সমাকল $F(x)$-এর অন্তরক বা derivative $\frac{d}{dx}F(x)$ হইবে $f(x)$ এবং সেই কারণে $[a, b]$ বদ্ধ অবকাশে $f$ সমাকলনযোগ্য হইবে।

সুতরাং উপরের আলোচনা অনুসারে সমাকল-গণিতের মৌলিক উপপাদ্যটিকে এইভাবে সূত্রবদ্ধ করা যায় :

**[a,b] বদ্ধ অবকাশে কোন অপেক্ষক f যদি সমাকলনযোগ্য হয় এবং ঐ অবকাশে f-এর আদিম অপেক্ষক (বা primitive) F যদি সন্তত হয়, তবে**

$$\int_a^b \mathbf{f(x)dx = F(b) - F(a)}.$$

বলা বাহুল্য, F যদি $f$-এর আদিম অপেক্ষক (Primitive) হয়, তবে $\frac{d\,F(x)}{dx} = f(x)$ অর্থাৎ $f(x)$ হইবে $F(x)$-এর অন্তরক বা derivative.

**বিশেষ দ্রষ্টব্য :** সমাকলন-গণিতের মৌলিক উপপাদ্যটির বিশ্লেষণমূলক প্রমাণ উচ্চমাধ্যমিক পাঠ্যক্রমের বহির্ভূত। পরবর্তী 6·14 অনুচ্ছেদে ইহার প্রমাণ সম্বন্ধে একটি মোটামুটি ধারণা দেওয়া হইয়াছে।

### 6.13. নির্দিষ্ট সমাকল নির্ণয়ে সমাকল-গণিতের মৌলিক উপপাদ্যটির প্রয়োগ :

$\int f(x)dx$ আকারের নির্দিষ্ট সমাকলের মান-নির্ণয়ের সময় প্রথম কাজ হইল $f$-এর আদিম অপেক্ষক F-নির্ণয়। অর্থাৎ $f$ যে-অপেক্ষকটির অন্তরক সেই F অপেক্ষকটি নির্ণয় করা হইল প্রথম কাজ। ইহার জন্য অনির্দিষ্ট সমাকলগুলির সূত্রাবলীর সাহায্য লইতে হয়। উদাহরণস্বরূপ,

$\int_0^1 x^2 dx$-এর মান নির্ণয় করিবার সময়ে, প্রথমে $\int x^2 dx$-এর অনির্দিষ্ট সমাকলটি নির্ণয় করিতে হইবে। এখানে $f(x) = x^2$ এবং

$$\int f(x)dx = \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} = F(x), \quad \left[\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} \text{ সূত্র অনুসারে।} \right]$$

অনির্দিষ্ট সমাকলের ধ্রুবক-সংখ্যাটি এখানে বর্জন করিলেও চলে। কারণ, $\int f(x)dx = \mathrm{F}(x) + c$ ধরিলে, মৌলিক উপপাদ্যের সূত্রে

$$\int_a^b f(x)dx = \mathrm{F}(b) + c - \{\mathrm{F}(a) + c\}$$

$$= \mathrm{F}(b) + c - \mathrm{F}(a) - c$$

$= \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$ হইবে।

এখানে $b=1, a=0, f(x) = x^2$ এবং $\mathrm{F}(x) = \frac{x^3}{3}$ বলিয়া

$$\int_0^1 x^2 dx = \mathrm{F}(1) - \mathrm{F}(0) = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{0} = \frac{1}{3}.$$

এইভাবে অনির্দিষ্ট সমাকলের সূত্র হইতে প্রথমে $\mathrm{F}(x)$ বাহির করিয়া মৌলিক উপপাদ্যটি প্রয়োগ করিতে হয়। পরবর্তী উদাহরণমালায় এই প্রয়োগ-পদ্ধতি বিস্তারিত ভাবে দেখানো হইতেছে।

## উদাহরণমালা

উদা. 1. $\int_{-1}^{2}\left(2x^3 - \frac{3}{x^2}\right)dx$-এর মান নির্ণয় কর।

$$\int_{-1}^{2}\left(2x^3 - \frac{3}{x^2}\right)dx = 2\int_{-1}^{2} x^3 dx - 3\int_{-1}^{2} x^{-2} dx$$

এখন $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4}$ এবং $\int x^{-2} dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x}$

বলিয়া $\int_{-1}^{2}\left(2x^3 - \frac{3}{x^2}\right)dx = 2\int_{-1}^{2} x^3 dx - 3\int_{-1}^{2} x^{-2} dx$

$$=2\left(\frac{x^4}{4}\right)\Big|_{-1}^{2}-3\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{-1}^{2}=2\left\{\frac{2^4}{4}-\frac{(-1)^4}{4}\right\}-3\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{-1}\right)$$

$$=2\left(\frac{16}{4}-\frac{1}{4}\right)-3\left(-1-\frac{1}{2}\right)=\frac{15}{2}+\frac{9}{2}=12.$$

উদা. 2. $\int_0^1 \frac{1-x}{1+x}dx$-এর মান নির্ণয় কর। (C. U. 1937).

$\frac{1-x}{1+x}=\frac{2}{1+x}-1$, ( লবকে হর দিয়া ভাগ করিয়া )

$$\therefore \int_0^1 \frac{1-x}{1+x}dx=\int_0^1\left(\frac{2}{1+x}-1\right)dx$$

$$=\int_0^1 \frac{2}{1+x}dx-\int_0^1 dx$$

$$=2\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx-\int_0^1 dx$$

এখন, $\int \frac{1}{1+x}dx=\log(1+x)$

এবং $\int dx=x$ বলিয়া

$$\int_0^1 \frac{1-x}{1+x}dx=2\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx-\int_0^1 dx$$

$$=2\left\{\log(1+x)\Big|_0^1\right\}-x\Big|_0^1$$

$$=2\{\log(1+1)-\log(1+0)\}-(1-0)$$

$$=2(\log 2-\log 1)-1$$

$$=2\log 2-1.$$

উদা. 3. $\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx$-এর মান নির্ণয় কর।

$$\int \sin x \, dx = -\cos x, \quad \text{( অনির্দিষ্ট সমাকলের সূত্র অনুসারে )}$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi/2}$$

$$= -\cos\frac{\pi}{2} - (-\cos 0) = 0 - (-1) = 1.$$

উদা. 4. $\int_0^{\pi/2} \sin 2x \cos x \, dx$-এর মান নির্ণয় কর।

$$\int_0^{\pi/2} \sin 2x \cos x \, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} 2 \sin 2x \cos x \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} [\sin(2x+x) - \sin(2x-x)] \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (\sin 3x - \sin x) dx = \frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi/2} \sin 3x \, dx - \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx\right]$$

এখন, $\int \sin 3x \, dx = -\frac{\cos 3x}{3}$ এবং $\int \sin dx = -\cos x$ বলিয়া,

$$\text{প্রদত্ত সমাকল} = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos 3x}{3}\right]_0^{\pi/2} - \frac{1}{2}\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi/2}$$

$$= -\frac{1}{6}\left(\cos\frac{3\pi}{2} - \cos 0\right) + \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right)$$

$$= -\frac{1}{6}(0-1) + \frac{1}{2}(0-1)$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}.$$

উদা. 5. $\int_{-3/2}^{3/2} \frac{1}{\sqrt{3-x^2}}dx$-এর সমাকল নির্ণয় কর।

$$\int_{-3/2}^{3/2} \frac{1}{\sqrt{3-x^2}}dx = \int_{-3/2}^{3/2} \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{3})^2-x^2}}dx$$

কিন্তু $\int \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{3})^2-x^2}}\,dx = \sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}}$

$$\therefore \quad \int_{-3/2}^{3/2} \frac{1}{\sqrt{3-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}}\Bigg|_{-3/2}^{3/1} = \sin^{-1}\left(\frac{3}{2\sqrt{3}}\right) - \sin^{-1}\left(-\frac{3}{2\sqrt{3}}\right)$$

$$= \sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\cdot\frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi.$$

উদা. 6. $\int_{3}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}dx$-এর মান নির্ণয় কর।

$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \tan^{-1}x$ বলিয়া,

$$\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}dx = \tan^{-1}x\Bigg|_{1}^{\sqrt{3}} = \tan^{-1}\sqrt{3} - \tan^{-1}1$$

$$= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{12}\pi.$$

উদা. 7. $\int_{2\pi}^{2\pi} \sin|x|\,dx$-এর মান নির্ণয় কর।

$$\int_{-\pi}^{2\pi} \sin|x|\,dx = \int_{-\pi}^{0} \sin|x|\,dx + \int_{0}^{2\pi} \sin|x|\,dx$$

$$= \int_{-\pi}^{0} \sin(-x)\,dx + \int_{0}^{2\pi} \sin x\,dx,$$

[$\because$ $|x| = -x$ যখন $x \leqslant 0$ এবং $|x| = x$ যখন $x \geqslant 0$]

$$=-\int_{-\pi}^{0}\sin x\,dx+\int_{0}^{2\pi}\sin x\,dx$$

$$=\cos x\Big|_{-\pi}^{0}-\cos x\Big|_{0}^{2\pi}$$

$$=\cos 0-\cos(-\pi)-\cos(2\pi)+\cos 0$$

$$=1-0-1+1=1.$$

**পরিবর্তন পদ্ধতি (Method of substitution)-এর প্রয়োগ :**

উদা. 8. $\int_0^1 \frac{\cos^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}dx$-এর মান নির্ণয় কর।

$\cos^{-1}x=z$ ধরিলে, উভয়পক্ষের সমাকলন দ্বারা পাওয়া যায়,

$$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=dz$$

বা $$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=-dz.$$

আবার, যখন $x=0$, তখন $z=\cos^{-1}0=-\frac{\pi}{2}$ এবং যখন $x=1$, তখন $z=\cos^{-1}1=0.$

$\therefore$ $x$-এর $(0,1)$ অবকাশ হইতে $z$-এর $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ অবকাশ পাওয়া যাইতেছে।

$$\therefore \int_0^1\frac{\cos^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^1\cos^{-1}x\,.\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=\int_{-\pi/2}^{0}z.-dz=-\int_{-\pi/2}^{0}z\,dz=-\frac{z^2}{2}\Big|_{-\pi/2}^{0}$$

$$=-\frac{1}{2}\left\{\frac{0}{2}-\frac{\pi^2}{4}\right\}=\frac{1}{2}\,.\,\frac{\pi^2}{4}\,.=\frac{\pi^2}{8}.$$

**বিশেষ দ্রষ্টব্য :** উদা. 7 হইতে দেখা যায়,

(i) $x$-সম্বলিত একটি অপেক্ষক মানের সমাকলকে $z$-সম্বলিত একটি অপেক্ষক মানের সমাকলে পরিবর্তন করা হইয়াছে। সেই কারণে, (ii) $x$-সাপেক্ষে অবকল $dx$ হইতে প্রাপ্ত $z$-সম্বলিত $dz$ অবকল এবং (iii) $x$-এর অবকাশ হইতে প্রাপ্ত $z$-এর অবকাশ লওয়া হইয়াছে।

এইভাবে **চলকের পরিবর্তন দ্বারা** অনেক ক্ষেত্রে নির্দিষ্ট সমাকলের মান নির্ণয় সুবিধাজনক হয়।

**উদা. 9.** $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)(b-x)}$-এর মান নির্ণয় কর।

$\sqrt{x-a}=t$ ধরিলে,

$$x-a=t^2 \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

$$b-x=b-(t^2+a)$$

$$=b-a-t^2 \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

(i) হইতে

$$dx=2t.dt \quad \cdots \quad \text{(iii)}$$

যখন $x=a$, তখন $t=0$

যখন $x=b$, তখন $t=\sqrt{b-a} \quad \cdots \quad$ (iv)

$\therefore$ (i) ও (ii) হইতে

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}=\int_0^{\sqrt{b-a}} \frac{2t.dt}{\sqrt{b-a-t^2}}$$

$$=2\int_0^{\sqrt{b-a}} \frac{dt}{\sqrt{(\sqrt{b-a})^2-t^2}}=2\sin^{-1}\frac{t}{\sqrt{b-a}}\Bigg|_0^{\sqrt{b-a}}$$

$$=2\left[\sin^{-1}\frac{\sqrt{b-a}}{\sqrt{b-a}}-\sin^{-1}0\right]=2\sin^{-1}1=2\frac{\pi}{2}=\pi.$$

উদা. 10. $\int_1^e \frac{1}{x(1+\log x)^2}\,dx$-এর মান নির্ণয় কর।

ধরা গেল যে, $1+\log x=z$.

উভয়পক্ষের সমাকল লইয়া পাওয়া যায়,

$$\frac{1}{x}\cdot dx=dz$$

আবার, যখন $x=1$, তখন $z=1+\log 1=1+0=1$

এবং, যখন $x=e$, তখন $z=1+\log e=1+1=2$.

$$\therefore \int_1^e \frac{1}{x(1+\log x)^2}\,dx=\int_1^e \frac{1}{(1+\log x)^2}\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$$=\int_1^2 \frac{1}{z^2}\,dz=\frac{z^{-2+1}}{-2+1}\Bigg|_1^2$$

$$=-z^{-1}\Bigg|_1^2=-\frac{1}{z}\Bigg|_1^2=-\left(\frac{1}{2}-1\right)=\tfrac{1}{2}.$$

## অংশতঃ সমাকলনের সূত্রের প্রয়োগ

[ সূত্র : $\int uv\,dx=u\int v dx-\int\left[\frac{du}{dx}\int v dx\right]dx$ ]

উদা. 11. $\int_1^2 x\,e^x dx$-এর মান নির্ণয় কর।

$$\int xe^x dx=x\int e^x dx-\int\left[\frac{dx}{dx}\int e^x dx\right]dx$$

$$=x\,.\,e^x-\int 1\,.\,e^x dx$$

$$=xe^x-e^x$$

$$\therefore \int_1^2 xe^x dx=[xe^x-e^x]_1^2$$

$$=2.e^2-e^2-1.e+e$$

$$=e^2.$$

উদা. 12. $\int_0^1 \cos^{-1}x\, dx$-এর মান নির্ণয় কর।

$$\int \cos^{-1}x\, dx = \int \cos^{-1}x . x^0\, dx$$

$$= \cos^{-1}x \int x^0 dx - \int \left[ \frac{d \cos^{-1}x}{dx} \int x^0 dx \right] dx$$

$$= \cos^{-1}x . x - \int - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} .x.dx$$

$$= x \cos^{-1}x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

এখন $1-x^2 = z$ ধরিলে উভয়পক্ষের অবকলন লইলে, $2x.\, dx = dz$ বলিয়া

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{-2x\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2} \int \frac{dz}{\sqrt{z}} = -\frac{1}{2}.2 \sqrt{2} = -\sqrt{z}$$

$$= -\sqrt{1-x^2}$$

$$\therefore \int \cos^{-1}x\, dx = x \cos^{-1}x + (-\sqrt{1-x^2}) = x \cos^{-1}x - \sqrt{1-x^2}$$

$$\therefore \int_0^1 \cos^{-1}x\, dx = \left[ x \cos^{-1}x - \sqrt{1-x^2} \right]_0^1$$

$$= 1. \cos^{-1}1 - \sqrt{1-1^2} - 0 + \sqrt{1-0}$$

$$= 0 - 0 + \sqrt{1} = 1.$$

উদা. 13. $\int_0^{\pi/2} x^2 \sin x\, dx$ – এর মান নির্ণয় কর।

$$\int x^2 \sin x\, dx = x^2 \int \sin x\, dx - \int \left[ \frac{dx^2}{dx} \int \sin x\, dx \right] dx$$

$$= -x^2 \cos x - \int 2x. -\cos x\, dx$$

$$= -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x\, dx$$

$$= -x^2 \cos x + 2 \left\{ x \int \cos x\, dx - \int \left[ \frac{dx}{dx} \int \cos x\, dx \right] dx \right\}$$

$$= -x^2 \cos x + 2 \{ x \sin x - \int 1. \sin x\, dx \}$$

$$= -x^2 \cos x + 2 \{ x \sin x + \cos x \}$$

$$= (2 - x^2) \cos x + 2x \sin x.$$

$$\therefore \int_0^{\pi/2} x^2 \sin x\, dx = \Big[ (2-x^2)\cos x + 2x \sin x \Big]_0^{\pi/2}$$

$$= \left(2 - \frac{\pi^2}{4}\right).\cos\frac{\pi}{2} + 2.\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}$$

$$-(2-0)\cos 0 - 2.0.\sin 0$$

$$= 0 + \pi.1 - 2.1 - 0$$

$$= \pi - 2.$$

উদা. 14. $\int_0^1 x^2 \tan^{-1} x\, dx$-এর মান নির্ণয় কর।

$\int x^2 \tan^{-1} x$

$$= \tan^{-1} x.\int x^2\, dx - \int \left[\frac{d\,(\tan^{-1} x)}{dx}\int x^2 dx\right] dx$$

$$= \tan^{-1} x\, \frac{x^3}{3} - \int \left[\frac{1}{1+x^2}.\frac{x^3}{3}\right] dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\tan^{-1} x - \frac{1}{3}\int \frac{x^3 + x - x}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\tan^{-1} x - \frac{1}{3}\int \left\{\frac{x(x^2+1)}{x^2+1} - \frac{x}{1+x^2}\right\} dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\tan^{-1} x - \frac{1}{3}\left[\int x\, dx - \int \frac{x}{1+x^2}\, dx\right]$$

$$= \frac{x^3}{3}\tan^{-1} x - \frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\, dx\right]$$

$$= \frac{x^3}{3}\tan^{-1} x - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6}\log(1+x^2).$$

$$\therefore \int_0^1 x^2 \tan^{-1} x = \left[\frac{x^3}{3}\tan^{-1} x - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6}\log(1+x^2)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3}\tan^{-1} 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\log(1+1^2)$$

$$-0 + 0 - \frac{1}{6}\log 1$$

$$= \frac{1}{3}.\frac{\pi}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\log 2 - \frac{1}{6}\cdot 0$$

$$= \frac{\pi}{12} + \frac{1}{6}\log 2 - \frac{1}{6}.$$

**নির্দিষ্ট সমাকলের সাহায্যে সংখ্যাশ্রেণীর সমষ্টি নির্ণয় :**

সংজ্ঞা অনুসারে

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underset{h\to 0}{\text{Lt}}\ h\sum_{r=1}^{n} f(a+rh),\ \text{যেখানে } nh = b-a.$$

$\therefore\ a=0$ এবং $b=1$ ধরিলে $nh=1$ বা $n=\frac{1}{h}$ হইবে।

অতএব, সেক্ষেত্রে $h\to 0$ হইলে $n\to\infty$ হইবে।

$$\therefore\ \int_0^1 f(x)\,dx = \underset{n\to\infty}{\text{Lt}}\ \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} f\left(\frac{r}{n}\right).$$

এই সূত্রটির প্রয়োগে বিভিন্ন শ্রেণীর সমষ্টি নির্ণয় করা যায়।

**উদা. 15.** $\underset{n\to\infty}{\text{Lt}}\left(\frac{1^4}{n^5}+\frac{2^4}{n^5}+\frac{3^4}{n^5}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$-এর মান নির্ণয় কর।

$$\underset{n\to\infty}{\text{Lt}}\left(\frac{1^4}{n^5}+\frac{2^4}{n^5}+\frac{3^4}{n^5}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

$$= \underset{n\to\infty}{\text{Lt}}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1^4}{n^4}+\frac{1}{n}\cdot\frac{2^4}{n^4}+\frac{1}{n}\cdot\frac{3^4}{n^4}+\cdots+\frac{1}{n}\cdot\frac{n^4}{n^4}\right)$$

$$= \underset{n\to\infty}{\text{Lt}}\ \frac{1}{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^4+\left(\frac{2}{n}\right)^4+\left(\frac{3}{n}\right)^4+\cdots\cdots\left(\frac{n}{n}\right)^4\right\}$$

$$= \underset{n\to\infty}{\text{Lt}}\ \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{r}{n}\right)^4 = \int_0^1 x^4\,dx,\ \left[\frac{r}{n}=x \text{ এবং } f(x)=x^4 \text{ ধরিয়া}\right]$$

$$= \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1^5}{5}-\frac{0}{5}=\frac{1}{5}.$$

**উদা. 16.** $\underset{n\to\infty}{\text{Lt}}\left[\frac{1}{\sqrt{n^2-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}\right]$-এর মান নির্ণয় কর।

$$\underset{n\to\infty}{\text{Lt}}\left[\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-2^2}}+\cdots\frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}\right]$$

$$= \underset{n\to\infty}{\text{Lt}}\ \frac{1}{n}\left[\frac{n}{\sqrt{n^2-1}}+\frac{n}{\sqrt{n^2-2^2}}+\cdots+\frac{n}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}\right]$$

$$=\underset{n\to\infty}{\mathrm{Lt}}\ \frac{1}{n}\left[\frac{1}{\frac{\sqrt{n^2-1^2}}{n}}+\frac{1}{\frac{\sqrt{n^2-2^2}}{n}}+\cdots+\frac{1}{\frac{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}{n}}\right]$$

$$=\underset{n\to\infty}{\mathrm{Lt}}\ \frac{1}{n}\left[\frac{1}{\sqrt{\frac{n^2-1^2}{n^2}}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{n^2-2^2}{n^2}}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{\frac{n^2-(n-1)^2}{n^2}}}\right]$$

$$=\underset{n\to\infty}{\mathrm{Lt}}\ \frac{1}{n}\left[\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{n}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2}{n}\right)^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}}\right]$$

$$=\underset{n\to\infty}{\mathrm{Lt}}\ \frac{1}{n}\cdot\sum_{r=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{r}{n}\right)^2}}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\sin^{-1}x\Big]_0^1$$

$$=\sin^{-1}1-\sin^{-1}0=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}.$$

## প্রশ্নমালা 15

মান নির্ণয় কর :

1. $\int_0^2 12x^3dx.$ 2. $\int_{-4}^{-2}\frac{1}{z^2}\,dz.$ 3. $\int_1^4\frac{1}{\sqrt{t}}\,dt.$

4. $\int_0^{-1}\sqrt[3]{x}\ dx.$ 5. $\int_0^1\sqrt[4]{z^3}\ dz.$

6. $\int_{-1}^2(1+2x-3x^2)dx.$ 7. $\int_0^3 x^2(x+3)dx.$

8. $\int_{-1}^2(x+3)^2dx.$ 9. $\int_0^1 e^{2x}dx.$ 10. $\int_{-1}^1\frac{2x-3}{2x+3}\,dx.$

11. $\int_1^2\frac{1+x}{x^2}\,dx.$ 12. $\int_1^2\frac{1-x^2}{x}\,dx.$ 13. $\int_0^4\frac{x^2}{1+x}\,dx.$

[ সংকেত : লবকে হর দ্বারা ভাগ করিলে $\frac{x^2}{1+x}=x-1+\frac{1}{1+x}$. ইহা হইতে সমাকলন কর। ]

14. $\int_0^2 \frac{x^3}{x+1}\,dx.$ 15. $\int_1^8 \frac{2r}{1+r^2}\,dr.$

16. $\int_0^{\pi/4} \sec^2 x\,dx.$ 17. $\int_0^{\pi/3} \sec x \tan x\,dx.$

18. $\int_0^{\pi/2} \sin 3x\,dx.$ 19. $\int_{-\pi/2}^{0} \sin x \cos x\,dx.$

20. $\int_0^1 (2x+\sin x)dx.$ 21. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin 2x - 2\sin x)dx.$

22. $\int_{-\pi/2}^{0} \sin 2x \sin x\,dx.$ 23. $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx.$

[ সংকেত : $\cos^2 x = \frac{1}{2}.2\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$ ধর। ]

24. দেখাও যে, $\int_0^{\pi/2} \sin^6\theta \cos^3\theta\,d\theta = \frac{2}{63}.$

[ সংকেত : $\sin\theta = z$ ধরিলে উভয়পক্ষের অবকল লইয়া, $\cos\theta\,d\theta = dz$ ;

$\therefore \int \sin^6\theta \cos^3\theta\,d\theta = \int \sin^6\theta \cos^2\theta.\cos\theta\,d\theta$

$= \int z^6(1-z^2)dz = \int (z^6 - z^8)dz = \frac{z^7}{7} - \frac{z^9}{9} = \frac{1}{7}\sin^7\theta - \frac{1}{9}\sin^9\theta.$

$\therefore \int_0^{\pi/2} \sin^6\theta\cos^3\theta\,d\theta = \frac{1}{7}\sin^7\theta\Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{9}\sin^9\theta\Big|_0^{\pi/2}$, ইত্যাদি। ]

25. $\int_0^{\pi/2} \sin^7\theta \cos^7\theta\,d\theta = \frac{1}{120}.$

26. $\int_0^{\pi/2} \sin^4\theta \cos^3\theta\,d\theta = \frac{2}{35}.$ 27. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin x|\,dx = 2.$

28. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(|x|+x)\,dx = 0.$ 29. $\int_{-\pi}^{\pi} [\sin|x| + \sin x]\,dx = 4.$

30. $\int_{-\pi}^{\pi} (|\sin x| + \sin|x|)\, dx = 8.$

31. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(|x| - x)\, dx = \pi.$ 32. $\int_{-\pi}^{\pi} (|\cos x| + \cos x) dx = 0.$

33. $\int_{-\pi}^{\pi} (\cos|x| + |\cos x|) dx = 0.$

34. মান নির্ণয় কর :

(i) $\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$ (ii) $\int_{\sqrt{3}/2}^{1} \frac{1}{\sqrt{(36-9x^2)}}\, dx.$

(iii) $\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\, dx.$ (iv) $\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1-3x^2}}\, dx.$

(v) $\int_{-\sqrt{3}}^{0} \frac{1}{1+x^2}\, dx.$ (vi) $\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+4x^2}\, dx.$ (vii) $\int_{0}^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{1+9x^2}\, dx.$

35. $\int_{0}^{1} \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$-এর মান নির্ণয় কর।

36. $\int_{a}^{b} \frac{\log x}{x}\, dx$-এর মান নির্ণয় কর। [সংকেত : $\log x = t$ ধরিয়া অগ্রসর হও।]

37. $\int_{1}^{2} \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} dx$-এর মান নির্ণয় কর। [সংকেত : $1+x^2=z$ ধরিয়া অগ্রসর হও।]

38. $\int_{3}^{5} \frac{dx}{\sqrt{(x-3)(5-x)}}.$

39. $\int_{0}^{a} \frac{(a^2-x^2)}{(a^2+x^2)^2}\, dx$-এর মান নির্ণয় কর।

[সংকেত : $x = a \tan\theta$ হইতে $dx = a \sec^2\theta\, d\theta$ ;

আবার $x=0$ হইলে $\theta=0$ এবং $x=a$ হইলে $\theta=\frac{\pi}{4}$ বলিয়া,

$$\int_0^a \frac{a^2-x^2}{(a^2+x^2)^2}dx=\int_0^{\pi/4} \frac{a^2(1-\tan^2\theta)}{a^4(1+\tan^2\theta)^2}.a\sec^2\theta\,d\theta\,;$$

$$=\int_0^{\pi/4}\frac{1-\tan^2\theta}{a\sec^4\theta}\cdot\sec^2\theta\,d\theta=\frac{1}{a}\int_0^{\pi/4}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)d\theta$$

$$=\frac{1}{a}\int_0^{\pi/4}\cos 2\theta\,d\theta=\frac{1}{a}\left.\frac{\sin 2\theta}{2}\right|_0^{\pi/4},$$ ইত্যাদি। ]

40. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x\,dx}{(1+\sin x)(2+\sin x)}$-এর মান নির্ণয় কর।

[ সংকেত : $\sin x=z$ ধরিলে $\cos x\,dx=dz$ ; আবার যখন $x=0$ তখন $z=0$ এবং যখন $x=\pi/2$ তখন $z=1$ বলিয়া

$$\text{প্রদত্ত সমাকল}=\int_0^1\frac{dz}{(1+z)(2+z)}=\int_0^1\left(\frac{1}{1+z}-\frac{1}{2+z}\right)dz$$

$$=\int_0^1\frac{dz}{1+z}-\int_0^1\frac{dz}{2+z}=\log(1+z)\Big|_0^1-\log(2+z)\Big|_0^1$$

ইত্যাদি। ]

41. $\displaystyle\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$-এর মান নির্ণয় কর।

[ সংকেত : $x=a\sin\theta$ ধরিলে, $dx=a\cos\theta\,d\theta$ ; ইহা হইতে দেখাও যে,

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=a^2\int\cos^2\theta\,d\theta=\frac{a^2}{2}\int 2\cos^2\theta\,d\theta=\frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2\theta)d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\left\{\int d\theta+\int\cos 2\theta\,d\theta\right\}=\frac{a^2}{2}\left(\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right)$$

$$=\frac{a^2}{2}\left\{\sin^{-1}\frac{x}{a}+\frac{x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}\right\}$$ ইত্যাদি।

42. $\int_0^a \sqrt{2ax-x^2}\,dx$-এর মান নির্ণয় কর।

[ সংকেত : $\int \sqrt{2ax-x^2}\,dx = \int \sqrt{a^2-(x-a)^2}\,dx$ ; $x-a=z$ ধরিলে $dx=dz$ এবং যখন $x=0$ তখন $z=-a$ ও যখন $x=a$ তখন $z=0$, ইহার পর 41নং প্রশ্নের প্রণালীতে সমাধান কর।

43. $\int_0^1 \sin^{-1}x\,dx$-এর মান নির্ণয় কর। ]

44. $\int_1^2 \log x\,dx$-এর মান নির্ণয় কর।

45. $\int_0^1 x.e^x dx$-এর মান নির্ণয় কর।

46. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x\sin x\,dx$-এর মান নির্ণয় কর।

47. $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\sin x\,dx$-এর মান নির্ণয় কর।

[ সংকেত : অংশতঃ সমাকলন দ্বারা দেখাও যে,

$\int \cos^2 x\sin x\,dx = \cos^3 x - 2\int \cos^2 x\sin x\,dx$ বা

$3\int \cos^2 x\sin x\,dx = \cos^3 x$, $\therefore$ প্রদত্ত সমাকল $=\frac{1}{3}\cos^3 x$ ; ইত্যাদি।]

মান নির্ণয় কর :

48. $\underset{n\to\infty}{\text{Lt}}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}\right]$

49. $\underset{n\to\infty}{\text{Lt}}\left[\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\cdots+\frac{n^2}{n^3}\right]$

50. $\underset{n\to\infty}{\text{Lt}}\left[\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\frac{n}{n^2+3^2}+\cdots+\frac{n}{2n^2}\right]$

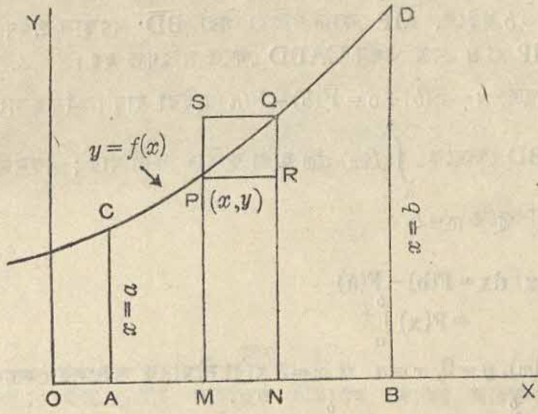
51. $\underset{n\to\infty}{\text{Lt}}\left[\frac{n+1}{n^2+1^2}+\frac{n+2}{n^2+2^2}+\frac{n+3}{n^2+3^2}+\cdots+\frac{1}{n}\right]$

**6·14. ক্ষেত্রফল নির্ণয় (Determination of an area) :**

সমাকল-গণিতের মৌলিক উপপাদ্যটির সাহায্যে কি-ভাবে একটি নির্দিষ্ট সমাকল-সূচিত ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা যায়, তাহা নিম্নে আলোচিত হইতেছে।

**y = f(x), y = 0, x = a এবং x = b দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলটির যেন ক্ষেত্রফল নির্ণয় করিতে হইবে।**

$y=f(x)$-এর লেখটির যে-অংশ $x=a$ এবং $x=b$ দ্বারা ছিন্ন, তাহা যেন CD ; $\overline{AC}$ যেন C বিন্দুর এবং $\overline{BD}$ যেন D বিন্দুর কোটি। CD-এর উপর অপর যে-কোন বিন্দু P-এর স্থানাঙ্ক যেন $(x, y)$.




48নং চিত্র

তাহা হইলে $y=f(x)$, $y=0$, $x=a$ এবং $x=b$ দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলটি হইল CABD ক্ষেত্র।

ধরা যাক্, CAMP ক্ষেত্রটির ফল বা কালি $=u$ ; Q যেন $f$-এর লেখটির উপরিস্থ P-এর অতি সন্নিকটে অন্য আরেকটি বিন্দু। Q-এর কোটি $\overline{NQ}$ ; Q হইতে $\overline{MP}$-এর উপর লম্ব $\overline{QS}$ এবং P হইতে $\overline{NQ}$-এর উপর লম্ব $\overline{PR}$.

এখন $x$-এর $\partial x=\overline{MN}$ পরিমাণ অমিতক্ষুদ্র বৃদ্ধি বা হ্রাস যে-কোন পরিবর্তনের জন্য $u$-এর পরিবর্তন PMNQ যেন $\partial u$.

স্পষ্টত, PMNR আয়তক্ষেত্র < PMNQ ক্ষেত্র < SMNQ আয়তক্ষেত্র

অর্থাৎ $\overline{MP}.\overline{MN}<\partial u<\overline{NQ}.\overline{MN}$

বা $\overline{MP}.\partial x<\partial u<\overline{NQ}.\partial x$

$$\therefore\quad \overline{MP}<\frac{\partial u}{\partial x}<\overline{NQ}.$$

কিন্তু $\partial x\to 0$ হইলে $\overline{NQ}\to\overline{MP}$

$$\therefore\quad \underset{\partial x\to 0}{\text{Lt}}\ \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{du}{dx}=\overline{MP}=y \text{ এবং } y=f(x)$$

অতএব, $\frac{du}{dx} = f(x)$.

$\therefore$ উভয়পক্ষের অবকল লইলে, $du = f(x)\,dx$

$\therefore$ সমাকলের সংজ্ঞা অনুসারে, $u = \int f(x)\,dx$

যদি $\int f(x)\,dx = F(x) + c$ হয়, তবে $u = F(x) + c$,

এবং যখন $x = a$, তখন $\overline{MP}$ কোটি সরিয়া আসিয়া $\overline{AC}$-এর উপর সমাপতিত হয় বলিয়া CAMP বা $u$-এর ক্ষেত্রফল শূন্যে পরিণত হয়।

অর্থাৎ $x = a$ হইলে $u = 0 = F(a) + c$ বা $c = -F(a)$.

আবার, $x = b$ হইলে, $\overline{MP}$ কোটি সরিয়া গিয়া $\overline{BD}$ অবস্থান গ্রহণ করে ; কাজে কাজেই CAMP বা $u$ ক্ষেত্র তখন CABD ক্ষেত্রে পরিণত হয়।

$\therefore$ সেক্ষেত্রে, $u = F(b) + c = F(b) - F(a)$ হইয়া যায়। কিন্তু সংজ্ঞা অনুসারে এই $u$ বা CABD ক্ষেত্রকে $\int_a^b f(x)\,dx$ দ্বারা সূচিত করা যায় ; কেননা A বিন্দুতে $x = a$ এবং B বিন্দুতে $x = b$.

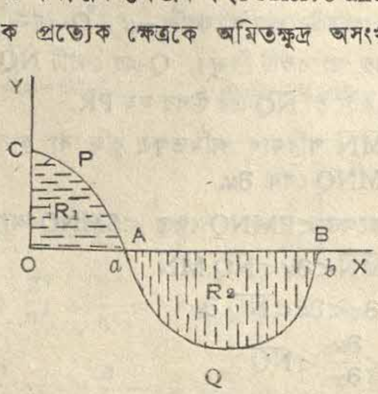
$$\therefore \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

$\therefore$ $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$ ও $x = b$ দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b.$$

**6·15. ধনাত্মক ও ঋণাত্মক ক্ষেত্রফল (Positive and negative area) :**

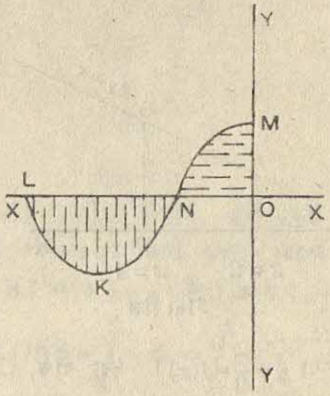
সীমাবদ্ধ সামতলিক প্রত্যেক ক্ষেত্রকে অমিতক্ষুদ্র অসংখ্য আয়তের সমষ্টিরূপে




49নং চিত্র

কল্পনা করা যায়। চিত্রে প্রদর্শিত OAPC-এর মতো এইরূপ যে-ক্ষেত্র কার্তেজীয় অক্ষতন্ত্রে $x$-অক্ষের উপর দিকে অবস্থিত তাহার উপাদানস্বরূপ প্রতিটি অমিতক্ষুদ্র

আয়তের উচ্চতা ধনাত্মক বলিয়া উহার ক্ষেত্রফলও ধনাত্মক। এইরূপ ধনাত্মক অমিতক্ষুদ্র আয়তগুলির সমষ্টি বলিয়া প্রথম পাদস্থিত OAPC-এর ক্ষেত্রফলও ধনাত্মক হইবে। কিন্তু চিত্রে প্রদর্শিত চতুর্থ পাদের AQB ক্ষেত্রের প্রতিটি আয়ত-উপাদানের ক্ষেত্রফল ঋণাত্মক, কেননা উহাদের উচ্চতা ঋণাত্মক। সুতরাং AQB-এর ক্ষেত্রফল ঋণাত্মক। অনুরূপে দ্বিতীয় পাদস্থিত ক্ষেত্রের আয়ত-উপাদানগুলির প্রত্যেকটির




50নং চিত্র

উচ্চতা ধনাত্মক; এবং তৃতীয় পাদস্থিত সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের আয়ত-উপাদানগুলির প্রতিটির উচ্চতা ঋণাত্মক। সুতরাং চিত্রে প্রদর্শিত দ্বিতীয় পাদস্থিত OMN ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ধনাত্মক এবং তৃতীয় পাদস্থিত NKL ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ঋণাত্মক।

এখন, প্রথম চিত্রের CPAQB বক্ররেখাটি যদি $y=f(x)$-এর লেখ হয়, তবে

(i) $R_1=\int_o^a f(x)\,dx$ ধনাত্মক এবং $R_2=\int_a^b f(x)\,dx$ ঋণাত্মক,

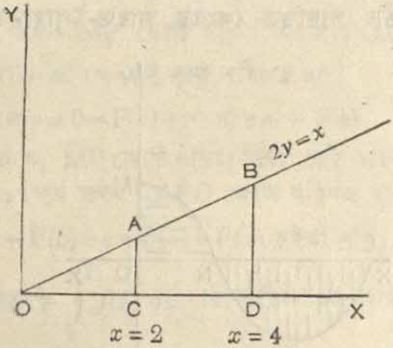
$$\therefore \int_o^b f(x)\,dx = R_1 \sim R_2$$

$= R_1$ ক্ষেত্রফল ও $R_2$ ক্ষেত্রফলের অন্তর।

(ii) যদি $R_1=A_1$ এবং $R_2=-A_2$ ধরা যায় (যেখানে $A_1$ ও $A_2$ ধনাত্মক) তবে $-A_2$-এর ঋণচিহ্ন বর্জন করিয়া $A_1+A_2=R_1$ ও $R_2$ সূচিত ক্ষেত্র-দুইটির ক্ষেত্রফলের সমষ্টি পাওয়া যায়। এইজন্য $R_1$ ও $R_2$ ক্ষেত্রফল স্বতন্ত্রভাবে নির্ণয় করিয়া ঋণচিহ্ন বর্জন করিয়া তাহাদের সমষ্টি লইতে হয়।

## উদাহরণমালা

**উদা. 1.** $x$-অক্ষ, $2y=x$, $x=2$ ও $x=4$ দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।




51নং চিত্র

প্রশ্ন অনুসারে $2y=x$ বা $y=\frac{x}{2}=f(x)$। ধরা যাক, C বিন্দুতে $x=2$ এবং D বিন্দুতে $x=4$। $f$-এর লেখটির $\overline{AB}$ অংশ, $x$-অক্ষের $\overline{CB}$ অংশ, C-এর কোটি $\overline{CA}$ এবং B-এর কোটি DB দ্বারা সীমাবদ্ধ ACDB-এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করিতে হইবে।

এখানে $x$-এর অবকাশ [ 2, 4 ].

$$\therefore \text{ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল ACDB} = \int_2^4 y\,dx = \int_2^4 \tfrac{x}{2}\,dx, \left[\because \quad y=\tfrac{x}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\int_2^4 x\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^4$$

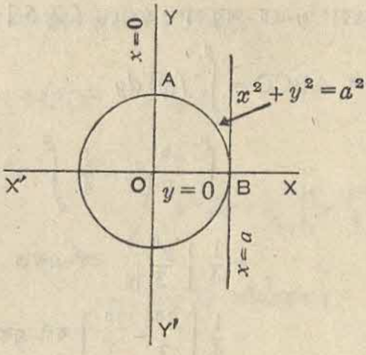
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{4^2}{2}-\frac{2^2}{2}\right] \text{ বর্গ-একক} = \frac{1}{2}\,[\,8-2\,] \text{ বর্গ-একক}$$

$$=\frac{1}{2}\,.\,6 \text{ বর্গ-একক} = 3 \text{ বর্গ-একক}$$

**বিশেষ দ্রষ্টব্য :** উপরোক্ত উদাহরণে $y=\frac{x}{2}$-এর স্থলে $=ymx.$ এবং $x=2$ ও $x=4$-এর স্থলে যথাক্রমে $x=a$ ও $x=b$ ধরিলে $x$-এর অবকাশ হইত $[\,a, b\,]$ এবং সেক্ষেত্রে ক্ষেত্রফল হইত

$$\int_a^b mxdx = m\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{m}{2}[\,b^2-a^2\,].$$

উদা. 2. $x^2+y^2=a^2$, $y=0$, $x=0$ ও $x=a$ দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।




52নং চিত্র

প্রশ্নানুসারে, $x^2+y^2=a^2$ সূচিত বৃত্তটির কেন্দ্র O-ই মূলবিন্দু। কার্তেজীয় অক্ষতন্ত্রে প্রথম পাদস্থ OAB অঞ্চলের ক্ষেত্রফলই এখানে নির্ণেয়।

O বিন্দুতে $x=0$ এবং B বিন্দুতে $x=a$ বলিয়া এখানে $x$-এর অবকাশ [ 0, $a$ ].

$$\therefore \text{ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল OAB} = \int_o^a y\,dx = \int_o^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$= \left[\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}x\right]_o^a$$

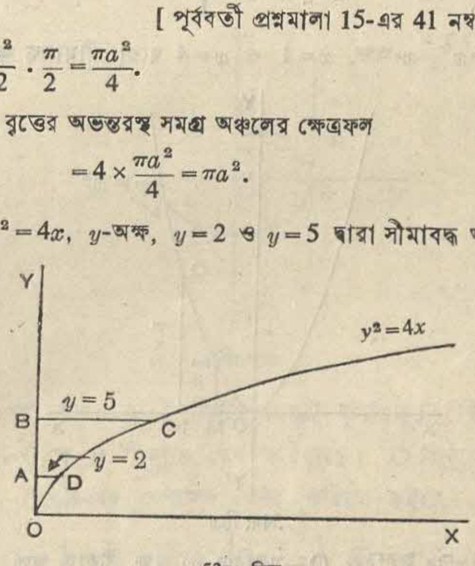
[ পূর্ববর্তী প্রশ্নমালা 15-এর 41 নম্বর অঙ্কটি দ্রষ্টব্য। ]

$$=\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi a^2}{4}.$$

লক্ষণীয় যে, বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ সমগ্র অঞ্চলের ক্ষেত্রফল

$$=4\times\frac{\pi a^2}{4}=\pi a^2.$$

উদা. 3. $y^2=4x$, $y$-অক্ষ, $y=2$ ও $y=5$ দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।




53নং চিত্র

$y^2=4x$ এমন একটি অধিবৃত্ত, যাহার শীর্ষ মূলবিন্দুতে, অক্ষ $x$-অক্ষ এবং অবতলতা ধনাত্মক।

$y^2=4x$ বা $x=\frac{1}{4}y^2=f(y)$ ধরিলে, এখানে A বিন্দুতে $y=2$ এবং B বিন্দুতে $y=5$. সুতরাং $y$-এর অবকাশ এখানে [ 2, 5 ]

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $\text{ABCD}=\int_2^5 f(y)\,dy$

$$=\int_2^5 \frac{y^2}{4}\,dy=\frac{1}{4}\int_2^5 y^2\,dy$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{y^3}{3}\right]_2^5 \text{ বর্গ-একক}$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{5^3}{3}-\frac{2^3}{3}\right] \text{ বর্গ-একক}$$

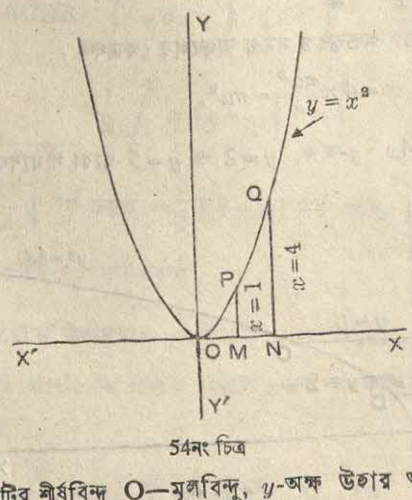
$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot 117\cdot 3 \text{ বর্গ-একক}$$

$$=\frac{117}{4}=29\frac{1}{4} \text{ বর্গ-একক।}$$

[ **লক্ষণীয়** যে, অধিবৃত্তের সমীকরণ $y^2=4ax$ এবং $y=2$ ও $y=5$-এর স্থলে যথাক্রমে $y=b$ ও $y=c$ লইলে উপরের প্রশ্নে ক্ষেত্রফল হইত

$$\int_b^c \frac{1}{4a}y^2=\frac{1}{4a}\left[\frac{y^3}{3}\right]_b^c.\ ]$$

**উদা. 4.** $y=x^2$, $x$-অক্ষ, $x=1$ ও $x=4$ দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।




54নং চিত্র

$y=x^2$ অধিবৃত্তটির শীর্ষবিন্দু O—মূলবিন্দু, $y$-অক্ষ উহার অক্ষ এবং অবতলতা ধনাত্মক। ধরা যাক, M বিন্দুতে $x=1$, N বিন্দুতে $x=4$ এবং M ও N বিন্দুতে

কোটি যথাক্রমে $\overline{MP}$ ও $\overline{NQ}$। সুতরাং MPQN অঞ্চলের ক্ষেত্রফলই এখানে নির্ণেয়। স্পষ্টত, $x$-এর অবকাশ এখানে [ 1, 4 ].

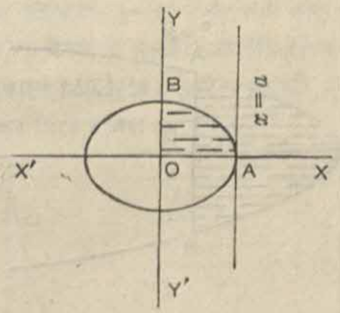
$$\therefore \text{ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল MPQN} = \int_1^4 y.dx$$

$$= \int_1^4 x^2\, dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{1^3}{3}$$

$$= \frac{6.3}{3} = 21 \text{ বর্গ-একক।}$$

[ লক্ষণীয় যে $x^2 = 4by$, $x = b$, $x = c$ ও $x$-অক্ষের দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল $= \int_b^c y.dx = \int_b^c \frac{x^2}{4b}\, dx = \frac{1}{4b} \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_b^c$ ].

উদা. 5. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ দ্বারা সূচিত উপবৃত্তটির অভ্যন্তরে যে-অঞ্চলটি ঐ উপবৃত্ত এবং $x = 0$ ও $y = 0$ দ্বারা সীমাবদ্ধ, তাহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।




55নং চিত্র

প্রশ্ন হইতে দেখা যায় যে, উপবৃত্তটির কেন্দ্রই মূলবিন্দু O ; উহা $y = 0$-কে A বিন্দুতে এবং $x = 0$-কে B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। O বিন্দুতে $x = 0$ এবং A বিন্দুতে $x = a$. OAB-এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করিতে হইবে। স্পষ্টত, এখানে $x$-এর অবকাশ $[ o, a ]$ এবং $y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$ বা $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $OAB = \int_0^a y.dx = \int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

$$= \frac{b}{a}\left[\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a$$

[ উদা. 2 দ্রষ্টব্য ]

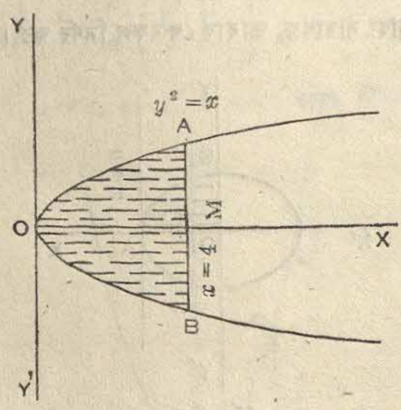
$$= \frac{b}{a}\left[0 + \frac{a^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - 0 - 0\right] \text{ বর্গ-একক}$$

$$= \frac{b}{a}\cdot\frac{\pi a^2}{4} = \frac{\pi ab}{4} \text{ বর্গ-একক।}$$

[ লক্ষণীয় যে, OAB উপবৃত্তটির অভ্যন্তর ভাগের প্রথম পাদস্থিত অংশ। উহা উপবৃত্তটির সমগ্র অভ্যন্তর ভাগের এক-চতুর্থাংশ বলিয়া ঐ উপবৃত্তের সমগ্র অভ্যন্তর ভাগের ক্ষেত্রফল $= 4 \times \frac{\pi ab}{4} = \pi ab$ বর্গ-একক। ]

**উদা. 6.** $y^2 = x$ এবং $x = 4$ দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

$y^2 = x$ অধিবৃত্তটি $x = 4$ ও $x$-অক্ষকে যেন যথাক্রমে A, B ও M বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। OABO ক্ষেত্রের ফলই এখানে নির্ণেয়। কিন্তু OABO = 2 OAMO. এবং M বিন্দুতে $x = 4$ ও O বিন্দুতে $x = 0$.




56নং চিত্র

$$\text{OAMO-এর ক্ষেত্রফল} = \int_0^4 y.dx$$

$$= \int_0^4 \sqrt{x}\,dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3/2}\right]_0^4$$

$$= \frac{2}{3}\times 4^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\cdot 2^{2\times\frac{3}{2}} = \frac{2.8}{3} = \frac{16}{3} \text{ বর্গ-একক।}$$

∴ নির্ণেয় OABO-এর ক্ষেত্রফল $= 2 \times$ OAMO-এর ক্ষেত্রফল

$= 2 \times \frac{16}{3}$ বা $\frac{32}{3}$ বর্গ-একক $= 10\frac{2}{3}$ বর্গ-একক।

[ লক্ষণীয় : $y^2 = 4ax$ ও $x = k$ দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের

ক্ষেত্রফল $= 2\int_0^k \sqrt{4ax}\, dx = 2\int_0^k 2\sqrt{a}\sqrt{x}dx = 4\sqrt{a}\int_0^k \sqrt{x}.dx$

$$= 4\sqrt{a}\left[\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_0^k = 4\sqrt{a}\cdot\frac{2}{3}k^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{8}{3}\sqrt{a}.k\sqrt{k} = \frac{8k}{3}\sqrt{ak}$$ বর্গ-একক। ]

উদা. 7. $x$-এর (0, 3) অবকাশে, $y = x^2 - 4x + 3$ এবং $Y$-অক্ষ ও $X$-অক্ষ দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের (i) মোট ও (ii) নীট ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

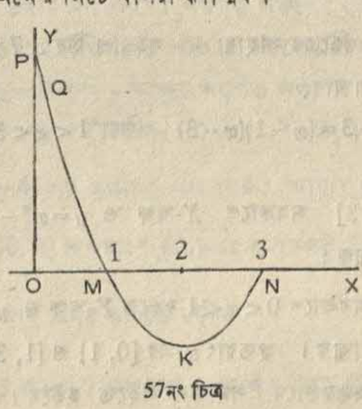
$y = x^2 - 4x + 3$-এর লেখটি যেন PQMKN বক্ররেখা দ্বারা সূচিত। উহা $Y$-অক্ষকে P বিন্দুতে এবং $X$-অক্ষকে যেন M ও N বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

$y = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$ বলিয়া যখন, $x = 1$, তখন $y = 0$ এবং যখন, $x = 3$, তখনও $y = 0$.

সুতরাং বক্ররেখাটি $X$-অক্ষকে (1, 0) বা M (3, 0) বা N বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

আবার যখন, $x = 0$, তখন $y = -1 \times -3 = 3$ ; সুতরাং $P$-এর স্থানাঙ্ক (0, 3).

স্পষ্টত, $x$-এর (0, 3) অবকাশে, $y = x^2 - 4x + 3$ এবং অক্ষদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চল দুইটি ভাগে বিভক্ত। উহাদের একটি $x$-এর [0, 1] অবকাশে OPMO ক্ষেত্র ; অপরটি $x$-এর [1, 2] অবকাশে MKNM ক্ষেত্র। প্রথমটি $X$-অক্ষের উপরে বলিয়া ধনাত্মক, দ্বিতীয়টি X-অক্ষের নিচে বলিয়া ঋণাত্মক।




57নং চিত্র

এখন, প্রথমোক্ত OPQMO ক্ষেত্র $= \int_0^1 y.dx = \int_0^1 (x^2 - 4x + 3)dx$

$$=\int_0^1 x^2.dx-4\int_0^1 xdx+3\int_0^1 dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1-4\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1+3\Big[x\Big]_0^1$$

$$=\frac{1}{3}-4\,.\,\frac{1}{2}+3\,.\,1=\frac{1}{3}+1=1\frac{1}{3} \text{ বর্গ-একক} \quad \dots \quad (1)$$

এবং শেষোক্ত MKNM ক্ষেত্র $=\int_1^3 y.dx=\int_1^3 (x^2-4x+3)dx$

$$=\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3-4\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3+3\Big[x\Big]_1^3$$

$$=\tfrac{1}{3}(3^3-1^3)-\tfrac{4}{2}(3^2-1^2)+3(3-1)$$

$$=\tfrac{26}{3}-2.8+6$$

$$=\frac{26+18}{3}-16=\frac{44-48}{3}=-\frac{4}{3} \text{ একক।} \quad \dots \quad (2)$$

(i) সুতরাং (2)-এর ঋণ-চিহ্ন বর্জন করিয়া (1) ও (2) এর সমষ্টিই হইবে নির্ণেয় মোট ক্ষেত্রফল।

অর্থাৎ মোট ক্ষেত্রফল $=1\frac{1}{3}+\frac{4}{3}$ বা $\frac{8}{3}$ বর্গ-একক।

(ii) কিন্তু নীট ক্ষেত্রফল = ক্ষেত্র-দুইটি প্রকৃত ফলের বৈজিক সমষ্টি

$$=1\tfrac{1}{3}-(-\tfrac{4}{3})=\frac{4-4}{3}=0 \text{ বর্গ-একক।}$$

[ **বিশেষ দ্রষ্টব্য :** চিত্রের সাহায্য না লইয়াও উদা. 7-এর প্রশ্নটির সমাধান করা যায়। এখানে দেখা যায়,

$y=x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$ বলিয়া $1<x<3$ হইলে $y$-এর মান ঋণাত্মক হয়।

সুতরাং $x$-এর $[1, 3]$ অবকাশে $X$-অক্ষ ও $y=x^2-4x+3$-এর অন্তর্গত অঞ্চলটির ক্ষেত্রফল ঋণাত্মক।

কিন্তু $x$-এর $[0, 1]$ অবকাশে $0<x<1$ হইলে $Y$-অক্ষ ও $y=(x-1)(x-3)$-এর অন্তর্গত ক্ষেত্র অবশ্যই ধনাত্মক। সুতরাং $x$-এর $[0, 1]$ ও $[1, 3]$ এই দুইটি অবকাশে $y=x^2-4x+3$-এর স্বতন্ত্রভাবে সমাকল লইতে হইবে। ইহার পর প্রদর্শিত প্রণালীতে সমাকল লইয়া অনায়াসে (i) ও (ii)-এর প্রশ্নের সমাধান করা যায়। ]

## প্রশ্নমালা 16

1. $y=-x$, $y=0$ এবং $x=-4$-এর দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

2. $y=x, y=-x$ এবং $y=6$-এর দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

[ সংকেত : $y=x$, $y-$অক্ষ ও $y=6$ দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চল এবং $y=-x$, $y$-অক্ষ ও $y=6$ দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি লও। ]

3. $x$-অক্ষ, $y=2x$ এবং $x+y=6$ দ্বারা সীমাবদ্ধ ত্রিভুজাকৃতি অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

[ সংকেত : $y=2x$ ও $x+y=6$-এর ছেদবিন্দু নির্ণয় করিয়া ঐ বিন্দুর কোটির দ্বারা বিভক্ত অঞ্চল-দুইটির ক্ষেত্রফলের সমষ্টি লও। ]

4. $x^2+y^2=16$-এর (i) দ্বিতীয় পাদস্থিত অঞ্চলের এবং চতুর্থ পাদস্থিত অঞ্চলের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি নির্ণয় কর।

5. $x=0$ ও $x=\pi$-এর মধ্যে $y=\sin x$ এবং $x$- অক্ষের অন্তর্গত অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

6. $x$-এর $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ অবকাশে $y=\cos x$ ও $y=0$-এর অন্তর্গত অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

7. $y^2=4x$, $x$-অক্ষ ও $x=3$-এর অন্তর্গত অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

8. (i) $y^2=16x$ ; $y=4$ ও $y$-অক্ষের অন্তর্গত অঞ্চলের ক্ষেত্রফল এবং (ii) $y^2=4x$, $x=1$ ও $x$-অক্ষের অন্তর্গত ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

9. $y^2=12x$ ও উহার নাভিলম্বের অন্তর্গত অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

10. $x^2=6y$ ও উহার নাভিলম্বের অন্তর্গত অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

11. $y^2-4y+2x=0$ এবং $y$-অক্ষের অন্তর্গত অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

[ সংকেত : $y$-অক্ষের সমীকরণ $x=0$ এবং $y^2-4y+2x=0$ সমাধান করিলে $y^2-4y=0$ বা $y\ (y-4)=0$ অর্থাৎ $y=0$ বা 4 ; আবার $x=\frac{4y-y^2}{2}=2y-\frac{y^2}{2}$ $=f(y)$ ধরিলে $y$-এর [0, 4] অবকাশে $f(y)$-এর সমাকলই নির্ণেয় সমাধান। অর্থাৎ $\int_0^4\left(2y-\frac{y^2}{2}\right)dy$-এর মান নির্ণয় করিতে হইবে। ]

12. $y=x$, $x=5$ ও $x=7$-এর দ্বারা $x$ অক্ষের উপর সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

13. $y^2=x$, $y$-অক্ষ, $y=1$ ও $y=4$-এর অন্তর্গত অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

14. $y^2=x$, $x$-অক্ষ, $x=1$ ও $x=4$-এর অন্তর্গত অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

15. $x$-অক্ষের উপর দিকে $y=3x^2$, $x=3$ ও $x=4$-এর দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

16. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$, $x$-অক্ষ, $x+2=0$ এবং $x=2$-এর অন্তর্গত অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

17. $y^2=6x$ এবং $y=3x$-এর অন্তর্গত স্থানটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

18. $y^2=4ax$ এবং $x^2=4ay$-এর অন্তর্গত অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

19. $x^2+y^2=a^2$ বৃত্ত এবং $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের মধ্যবর্তী অঞ্চল-দুইটির মোট ক্ষেত্রফল কত ?

20. $y^2=6x$ এবং $x^2=6y$, এই দুইটি অধিবৃত্তের দ্বারা ছিন্ন ও সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল কত ? [ক. বি. 1972]

21. $x^2=4y$ অধিবৃত্ত ও $y=x$ সরল রেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [ক. বি. 1970]

22. দেখাও যে, $y^2=4x$ ও $x^2=4y$-এর অন্তর্গত ক্ষেত্রফল, অক্ষদ্বয় ও $x=4$ এবং $y=4$ দ্বারা গঠিত আয়তক্ষেত্রের এক-তৃতীয়াংশের সমান।

23. $x^2+y^2=12x$ বৃত্ত এবং $y^2=6x$ অধিবৃত্তের অন্তর্গত অঞ্চল-দুইটির যে-অংশ $x$-অক্ষের উপর দিকে অবস্থিত, তাহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

24. $y=x^2-4x+3$ এবং $x$-অক্ষদ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং ঐ ক্ষেত্রফলের মান হইতে বিচার কর ঐ অঞ্চলটি $x$-অক্ষের কোন্ দিকে অবস্থিত ?

25. $f(x)=\frac{1}{4}(x^3+x-2)$ ও $x$-অক্ষের অন্তর্গত অঞ্চলটি $x$-এর $[0, 1]$ অবকাশে $x$-অক্ষের নীচের দিকে এবং $[1, 2]$ অবকাশে $x$-অক্ষের উপর দিকে অবস্থিত হইলে, $x$-এর $[0, 2]$ অবকাশে অন্তর্গত অঞ্চলটির ক্ষেত্রফল কত ?

26. $x^2+y^2=25$ এবং $x=-4$ ও $x=3$ দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

[**সংকেত :** দেখাও যে, নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $=\int_{-4}^{3}\sqrt{5^2-x^2}\,dx$

সপ্তম অধ্যায়

# অবকল-সমীকরণ (Differential Equation)

**7·1. অবকল-সমীকরণ ও উহার আদিমের সংজ্ঞা (Definition of a differential equation and its primitive) :** যে-সকল সমীকরণে অবকল-সহগ বা অবকল ( derivative or differential ) থাকে, অর্থাৎ **যে-সকল সমীকরণ অবকল-সহগ বা অবকল-সম্বলিত, তাহাদিগকে অবকল-সমীকরণ বলে।**

সাধারণ বৈজিক বা ত্রৈকোণমিতিক সমীকরণ হইতে অবকলন দ্বারাই এইরূপ অবকল-সমীকরণ গঠিত হয়। উদাহরণস্বরূপ $x^2+y^2=a^2$ একটি বৈজিক সমীকরণ। উহা এককেন্দ্রিক একপ্রস্থ বৃত্তের সমীকরণ।

$x$-সাপেক্ষে $x^2+y^2=a^2$-কে অবকলন করিলে পাওয়া যায়, $2x+2y.\dfrac{dy}{dx}=0$

বা, $x+y\dfrac{dy}{dx}=0$ বা, $xdx+ydy=0.$

সংজ্ঞানুসারে, $x+y\dfrac{dy}{dx}=0$ এবং $xdx+ydy=0$ উভয়ই অবকল-সমীকরণ; কেননা, উহাদের প্রথমটি অবকল-সহগ সম্বলিত একটি সমীকরণ এবং দ্বিতীয়টি অবকল-সম্বলিত একটি সমীকরণ। বলা বাহুল্য যে, উহারা একই অবকল-সমীকরণের দুইটি রূপ মাত্র।

এইভাবে কোন প্রদত্ত সমীকরণ হইতে এক বা একাধিকবার অবকলন করিয়া এক-একটি অবকল-সমীকরণ পাওয়া যায়। কাজেই, বিপরীতক্রমে বিশেষ একটি অবকল-সমীকরণকে এক বা একাধিকবার সমাকলন করিলে, যে সাধারণ সমীকরণ হইতে উহা গঠিত, সেই সাধারণ সমীকরণটি ফিরিয়া পাওয়া যায়। উদাহরণস্বরূপ,

$xdx+ydy=0$-কে সমাকলন করিলে পাওয়া যায়, $\int xdx+\int ydy=c$, যেখানে $c$ একটি যদৃচ্ছ ধ্রুবক।

বা $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}=c$

বা $x^2+y^2=2c$

বা $x^2+y^2=a^2$, [ $2c=a^2$ বসাইয়া ]

**এইভাবে, একপ্রস্থ সরল বা বক্র রেখার একটি অবকল-সমীকরণ হইতে সমাকলন দ্বারা অবকল তথা অবকল-সহগমুক্ত যে-মূল সমীকরণটি পাওয়া যায়, তাহাকে বলে ঐ অবকল সমীকরণের আদিম ( Primitive )।**

7·2. **অবকল-সমীকরণের ক্রম ও ঘাত বা মাত্রা ( Order and degree of a differential equation ):** সংজ্ঞা অনুসারে নিচের প্রত্যেকটি অবকল-সমীকরণ ; কেননা উহাদের প্রত্যেকটি অবকল-সহগ সম্বলিত।

(i) $x+y\dfrac{dy}{dx}=0$ ; (ii) $\dfrac{d^2x}{dt^2}=f$ ; (iii) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2+\dfrac{dy}{dx}=0$ ;

(iv) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+3\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2+y=0$ ; (v) $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2-1=0.$

স্পষ্টতঃ, (i)-এর অবকল-সমীকরণটিতে একটিমাত্র অবকল-সহগ $\dfrac{dy}{dx}$ রহিয়াছে এবং তাহার ক্রম **এক**। (ii) এর অবকল-সমীকরণটিতেও একটিমাত্র অবকল-সহগ $\dfrac{d^2x}{dt^2}$ রহিয়াছে, কিন্তু তাহার ক্রম **দুই**। (iii)-এর অবকল-সমীকরণটিতে আছে $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ এবং $\dfrac{dy}{dx}$ —এই দুইটি অবকল-সহগ। তাহাদের মধ্যে $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ সর্বোচ্চ ক্রমের অবকল-সহগ এবং তাহার ক্রম **দুই**। (iv)-এর অবকল-সমীকরণটিতেও অবকল-সহগ-দুইটির সর্বোচ্চ ক্রমের অবকল-সহগটির ক্রম **দুই**। সর্বশেষে (v)-এর সমীকরণটিতে যে-একটি অবকল-সহগ আছে, তাহারও ক্রম **দুই**।

**একটি অবকল-সমীকরণের অন্তর্গত সর্বোচ্চ ক্রমের অবকল-সহগটির ক্রম যত, ঐ সমীকরণটির ক্রমও ঠিক তত বলিয়াই ধরা হয়।** সেই কারণে, প্রদত্ত অবকল-সমীকরণগুলির মধ্যে একমাত্র (1)-এর সমীকরণটির ক্রমই এক। বাকী চারিটি সমীকরণেরই ক্রম দুই।

কিন্তু দেখা যায়,

(i)-এর অবকল-সমীকরণটিতে একটিমাত্র যে অবকল-সহগ আছে তাহার ঘাত এক ; (ii)-এর অবকল-সমীকরণভুক্ত একটিমাত্র অবকল-সহগ $\dfrac{d^2x}{dt^2}$-এর ঘাতও এক ; (iii) ও (iv)-এর অবকল-সমীকরণভুক্ত সর্বোচ্চ ক্রমের অবকল-সহগ $\dfrac{d^2y}{dx^2}$-এর ঘাতও এক। একমাত্র (v)-এর অবকল-সমীকরণভুক্ত অবকল-সহগ $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2$এর ঘাতই দুই।

সেই কারণে (i) হইতে (iv) পর্যন্ত প্রত্যেকটি অবকল-সমীকরণের ঘাত এক এবং (v)-এর অবকল-সমীকরণটির ঘাত হইল দুই।

এইভাবে **একটি অবকল-সমীকরণের অন্তর্গত সর্বোচ্চ ক্রমের অবকল-সহগটির ঘাত যত, ঐ অবকল-সমীকরণের ঘাতও তত বলিয়া ধরা হয়।**

তাহা হইলে দেখা গেল,

(i)-এর অবকল-সমীকরণটির ক্রম ও ঘাত উভয়ই **এক** ;

(v)-এর অবকল-সমীকরণটির ক্রম ও ঘাত উভয়ই **দুই** ;

(ii)-হইতে (iv) পর্যন্ত প্রত্যেকটি সমীকরণের **ক্রম দুই**, কিন্তু **ঘাত এক**।

**7·3. অবকল-সমীকরণের সমাধান (Solution of a differential equation) : অবকল-সমীকরণের এক বা একাধিক বার সমাকলন দ্বারা অবকল তথা অবকল-সহগ-মুক্ত যে আদিম বা মূল সমীকরণটি পাওয়া যায়, তাহাকেই উক্ত অবকল-সমীকরণের সমাধান বলে।**

সাধারণতঃ সমীকরণের সমাধান বলিতে ঐ সমীকরণভুক্ত অজ্ঞাত রাশির নির্দিষ্ট মানই বুঝায়। কিন্তু সংজ্ঞা অনুসারে, একটি অবকল-সমীকরণের সমাধান বলিতে বুঝায় অবকল-সহগ-মুক্ত ( বা অবকল-মুক্ত ) একটি সমীকরণ।

পূর্বেই দেখা গিয়াছে যে,

$xdx+ydy=0$ বা $x+y\dfrac{dy}{dx}=0$-এর সমাধান $x^2+y^2=a^2$ ......(1)

স্পষ্টত এখানে,

$x+y.\dfrac{dy}{dx}=0$-এর ক্রম এক এবং $x^2+y^2=a^2$-এর ধ্রুবক সংখ্যা এক।

এইভাবে, কোন অবকল-সমীকরণের ক্রমসংখ্যা যত উহার সমাধান-সূচক সমীকরণে পরস্পর ভিন্ন যদৃচ্ছ ধ্রুবক-সংখ্যাও যদি ঠিক ততই হয়, তবে শেষোক্ত সমাধানসূচক সমীকরণকে প্রথমোক্ত অবকল-সমীকরণের **সাধারণ বা পূর্ণ সমাধান (General or complete solution) বলে**।

## উদাহরণমালা

**উদা. 1.** প্রথমে যুক্তিসহ বল, $y^2=4ax$ যাহার সাধারণ সমাধান, সেই অবকল-সমীকরণের ক্রম কত? তাহার পর প্রদত্ত সমীকরণের অবকল-সমীকরণটি নির্ণয় কর।

$y^2=4ax$-এর মধ্যে একটিমাত্র অস্থায়ী ধ্রুবক রহিয়াছে। সুতরাং উহা যাহার সাধারণ সমাধান, সেই অবকল-সমীকরণের ক্রম হইবে এক। এখন, $y^2=4ax$-এর উভয় পক্ষকে $x$-সাপেক্ষে অবকলন করিলে পাওয়া যায়,

$$2y.\frac{dy}{dx}=4a$$

$$\therefore \quad y^2=\left(2y.\frac{dy}{dx}\right)x, \qquad [\, 4a\text{-এর স্থলে } 2y.\frac{dy}{dx} \text{ বসাইয়া।} \,]$$

বা $y=2x.\dfrac{dy}{dx}$ বা $y-2x.\dfrac{dy}{dx}=0.$

$\therefore$ নির্ণেয় অবকল-সমীকরণ হইবে $y-2x.\dfrac{dy}{dx}=0.$

উদা. 2. $y=A\sin x$ দ্বারা সূচিত লেখ-এর অবকল-সমীকরণ নির্ণয় কর।

$y=A\sin x$-কে $x$-সাপেক্ষে অবকলন করিলে পাওয়া যায়,

$$\frac{dy}{dx}=A\cos x \qquad \text{বা} \quad dy=A\cos x dx.$$

$$\therefore \quad \frac{y}{dy}=\frac{A\sin x}{A\cos x\, dx} \qquad \text{বা} \quad \frac{y}{dy}=\frac{\tan x}{dx}.$$

$\therefore$ নির্ণেয় অবকল-সমীকরণ হইবে $ydx=\tan x dy.$

উদা. 3. $(x^2+2)(y^2+2)=k$ হইতে অবকল-সমীকরণ গঠন কর।

$$(x^2+2)(y^2+2)=k$$

বা $x^2y^2+2x^2+2y^2+4=k$

$x$-সাপেক্ষে উভয়পক্ষকে অবকলন করিলে পাওয়া যায়,

$$x^2.2y.\frac{dy}{dx}+y^2.2x+2.2x+2.2y.\frac{dy}{dx}+0=0$$

বা $x^2y\,\dfrac{dy}{dx}+2y\,\dfrac{dy}{dx}+y^2x+2x=0$

বা $y(x^2+2)\dfrac{dy}{dx}+x(y^2+2)=0$

$\therefore$ নির্ণেয় অবকল-সমীকরণ $y(x^2+2)\,dy+x(y^2+2)\,dx=0.$

## প্রশ্নমালা 17

1. $y=ax$ যে-সকল সরল রেখা সূচিত করে, তাহাদের অবকল-সমীকরণ নির্ণয় কর।

2. $y^2=3x$ যে-সকল অধিবৃত্ত সূচিত করে, তাহাদের অবকল-সমীকরণ নির্ণয় কর।

3. $x^2+y^2=k^2$-দ্বারা সূচিত এককেন্দ্রীয় বৃত্তসমূহের অবকল-সমীকরণ নির্ণয় কর।

4. $y=k\cos x$-সূচিত লেখসমূহের অবকল-সমীকরণ নির্ণয় কর।

5. $y=a\sin x+\cos x$ হইতে অবকল-সমীকরণ গঠন কর।

6. $(x+1)(y+1)=a$ হইতে অবকল-সমীকরণ গঠন কর।

**7·4. প্রথম ক্রমের একঘাত অবকল-সমীকরণ ( First order differential equations of the first degree ) :**

প্রথম ক্রমের অবকল-সমীকরণকে

$$\frac{dy}{dx}+\frac{M}{N}=0 \quad \text{বা} \quad Mdx+Ndy=0,$$

আকারে প্রকাশ করা যায়, যেখানে $M$ ও $N$ হয় $x$ ও $y$-এর অপেক্ষক, নয়তো ধ্রুবক।

এই ধরনের প্রত্যেকটি অবকল-সমীকরণের ক্রম এক বলিয়া উহাতে ধ্রুবকের সংখ্যাও এক।

পরবর্তী অনুচ্ছেদ-তিনটিতে এইরূপ অবকল-সমীকরণের তিনটি সমাধান-প্রণালী আলোচিত হইতেছে।

**7·5. চল-বিচ্ছেদ প্রণালীতে সমাধান ( Solution by the method of separation of variables ) :** $Mdx+Ndy=0$ আকারের কোন কোন প্রথম ক্রমের একঘাত অবকল-সমীকরণকে $f(x)dx+g(y)dy=c$ আকারে প্রকাশ করা যায়। এই আকারে লিখিলে $f(x)$ শুধু $x$-সম্বলিত এবং $g(y)$ শুধু $y$-সম্বলিত হইবে। অর্থাৎ $f(x)dx$ যেমন $y$-বর্জিত, $g(y)dy$-ও তেমনি $x$-বর্জিত হইবে। সুতরাং এইভাবে $x$ ও $y$ চল-সম্বলিত অংশ-দুইটি পরস্পর হইতে বিচ্ছিন্ন হইয়া দুইটি পদে সংঘবদ্ধ হইবে। $x$ ও $y$ সম্বলিত পদের এইভাবে পৃথকীকরণকেই **চল-বিচ্ছেদ** (Separation of variables) বলে এবং এইরূপ চল-বিচ্ছেদ দ্বারা প্রথম ক্রমের একঘাত সমীকরণের সমাধান-পদ্ধতিকেই বলে চল-বিচ্ছেদ-প্রণালী।

এই প্রণালীতে প্রত্যেকটি পদকে পৃথক্ পৃথক্ ভাবে সমাকলন করিলেই নির্ণেয় সমাধান পাওয়া যায়। উদাহরণের সাহায্যে প্রণালীটি ব্যাখ্যা করা যাইতেছে।

**উদা. 1.** সমাধান কর : $x.dy + y.dx = 0.$

$x.dy + y.dx = 0$-কে $xy$ দ্বারা ভাগ করিলে পাওয়া যায়,

$$\frac{x.dy}{xy} + \frac{y.dx}{xy} = 0$$

$$\text{বা} \quad \frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0.$$

এই আকারে চল-দুইটি পরস্পর হইতে বিচ্ছিন্ন হইয়াছে। এইবার সমীকরণটিকে সমাকলন করিলে পাওয়া যায়,

$$\int \frac{dy}{y} + \int \frac{dx}{x} = k, \text{ যেখানে } k \text{ একটি যদৃচ্ছ ধ্রুবক।}$$

$$\text{বা} \quad \log_e y + \log_e x = \log_e c, \qquad [\, k = \log_e c \text{ ধরিয়া} \,]$$

$$\text{বা} \quad \log_e (xy) = \log_e c$$

∴ নির্ণেয় সমাধান $xy = c.$

**উদা. 2.** সমাধান কর : $\frac{dy}{dx} = e^{2x+3y}$

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x+3y} = e^{2x}.e^{3y}$$

$x$ ও $y$ চল-সম্বলিত অংশকে পৃথক্ করিয়া পাওয়া যায়,

$$\frac{dy}{e^{3y}} = e^{2x}dx$$

$$\text{বা,} \quad e^{-3y}dy = e^{2x}dx$$

উভয় পক্ষকে সমাকলন করিলে পাওয়া যায়,

$$\int e^{-3y}dy = \int e^{2x}dx$$

$$\text{বা,} \quad -\tfrac{1}{3}e^{-3y} = \tfrac{1}{2}e^{2x} + c, \qquad [\, c \text{ একটি যদৃচ্ছ ধ্রুবক।} \,]$$

$$\text{বা,} \quad e^{-3y} = -\tfrac{3}{2}e^{2x} - 3c = -\tfrac{3}{2}e^{2x} + \text{A} \qquad [\, \text{A} = -3c \text{ লিখিয়া} \,]$$

$$\text{বা,} \quad -3y = \log_e (\text{A} - \tfrac{3}{2}e^{2x})$$

∴ নির্ণেয় সমাধান, $y = -\tfrac{1}{3} \log_e (\text{A} - \tfrac{3}{2}e^{2x}).$

**উদা. 3.** সমাধান কর : $\frac{dy}{dx} = \frac{xy^2 - x}{x^2y + y}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy^2 - x}{x^2y + y} = \frac{x(y^2 - 1)}{y(x^2 + 1)}$$

বা, $(x^2+1)y\,dy=(y^2-1)x\,dx$

বা, $\frac{y}{y^2-1}\,dy=\frac{x}{x^2+1}\,dx$, [ উভয়পক্ষকে $(x^2+1)(y^2-1)$ দ্বারা ভাগ করিয়া। ]

$\therefore$ সমাকলন করিলে হয়,

$$\int\frac{y}{y^2-1}\,dy=\int\frac{x}{x^2+1}\,dx+k,$$ [ $k$ একটি যদৃচ্ছ ধ্রুবক ]

বা, $\frac{1}{2}\int\frac{2y}{y^2-1}\,dy-\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}.dx=\frac{1}{2}k$

বা, $\frac{1}{2}\log_e(y^2-1)-\frac{1}{2}\log_e(x^2+1)=\frac{1}{2}\log_e c,$

[ $k=\log_e c$ লিখিয়া ]

বা, $\log_e\frac{y^2-1}{x^2+1}=\log_e c$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $\frac{y^2-1}{x^2+1}=c.$

উদা. 4. সমাধান কর : $xy\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+1}{y+1}$

$$xy\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+1}{y+1}$$

বা, $(y+1)\,xy\,dy=(x^2+1)\,dx$

বা, $y(y+1)dy=\frac{x^2+1}{x}\,dx$

বা, $(y^2+y)dy=\left(x+\frac{1}{x}\right)dx$

উভয়পক্ষের সমাকলন করিলে পাওয়া যায়,

$$\int(y^2+y)dy=\int\left(x+\frac{1}{x}\right)dx+k,$$ [ $k$ যদৃচ্ছ ধ্রুবক ]

বা, $\int y^2dy+\int y\,dy=\int x\,dx+\int\frac{dx}{x}+k$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $\frac{y^3}{3}+\frac{y^2}{2}=\frac{x^2}{2}+\log_e x+k.$

উদা. 5. সমাধান কর : $1+\frac{1+x^2}{1+y^2}\cdot\frac{dy}{dx}=0.$

$$1+\frac{1+x^2}{1+y^2}.\frac{dy}{dx}=0.$$

বা, $\frac{dx}{1+x^2}+\frac{dy}{1+y^2}=0$ $\left(\frac{dx}{1+x^2}\right.$ দ্বারা গুণ করিয়া$\left.\right)$

বা, $\int\frac{dx}{1+x^2}+\int\frac{dy}{1+y^2}=k$ [ $k$ যদৃচ্ছ ধ্রুবক ]

বা, $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=k=\tan^{-1}c$, [ $k=\tan^{-1}c$ ধরিয়া ]

বা, $\tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}=\tan^{-1}c$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $\frac{x+y}{1-xy}=c$

**উদা. 6.** সমাধান কর : $\sin x\cos y.dx-\sin y\cos x.dy=0$.

$\sin x\cos y.dx-\sin y\cos x.dy=0$

বা, $\frac{\sin x\cos y}{\cos x\cos y}dx-\frac{\sin y\cos x}{\cos x\cos y}dy=0$,

[ উভয়পক্ষকে $\cos x\cos y$ দ্বারা ভাগ করিয়া ]

বা, $\tan x dx-\tan y dy=0$

বা, $\int\tan x dx-\int\tan y dy=k$, [ $k$ সমাকল-ধ্রুবক ]

বা, $\int\frac{\sec x\tan x}{\sec x}dx-\int\frac{\sec y\tan y}{\sec y}=k$

বা, $\log_e\sec x-\log_e\sec y=\log_e c$, [ $k=\log_e c$ ধরিয়া ]

বা, $\log_e\frac{\sec x}{\sec y}=\log_e c$

$\therefore$ $\frac{\sec x}{\sec y}=c$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $\sec x=c\sec y$.

**উদা. 7.** যে-বক্রগুলির অবকল-সমীকরণ $x\,dx+y\,dy=0$, তাহাদের যে-টি (0, 2) বিন্দুগামী তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

$x\,dx+y\,dy=0$-কে সমাকলন করিলে হয়,

$\int x dx+\int y\,dy=0$

বা, $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=c$, [ $c$ যদৃচ্ছ ধ্রুবক ]

বা, $x^2+y^2=2c$

$x^2+y^2=2c$ সূচিত বক্র যদি (0, 2)-গামী হয়, তবে,

$0+2^2=2c$ বা, $c=2$

$\therefore$ $x^2+y^2=2.2$ বা, $x^2+y^2=4$-ই নির্ণেয় সমীকরণ।

উদা. ৪. $\frac{dy}{dx}=\frac{\cos x}{2y-1}$ দ্বারা সূচিত বক্রসমূহের একটিতে কোটির মান 1 হইলে ভুজের মান 0 হয়। শেষোক্ত বক্রের কোটির মান উহার ভুজের নিরিখে নির্ণয় কর।

প্রশ্নানুসারে, $\frac{dy}{dx}=\frac{\cos x}{2y-1}$

বা, $(2y-1)\,dy=\cos x\,dx$

বা, $\int(2y-1)\,dy=\int\cos x\,dx$

বা, $\int 2y\,dy-\int dy=\sin x+c$

বা, $2\frac{y^2}{2}-y=\sin x+c$ বা, $y^2-y=\sin x+c$

সর্তানুসারে, $y=1$ হইলে $x=0$ হয়

$\therefore\ 1^2-1=\sin 0+c$ বা, $c=0$

$\therefore$ প্রশ্নোল্লিখিত (0, 1) বিন্দুগামী বক্রটির সমীকরণ,

$y^2-y=\sin x$ বা, $y^2-y-\sin x=0$

স্পষ্টত, ইহা $y$-এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ

$$\therefore\ y=\frac{1\pm\sqrt{1+4\sin x}}{2}$$

অর্থাৎ বক্রটির কোটি $y$-এর মান উহার ভুজ $x$-এর নিরিখে হইবে,

$$y=\tfrac{1}{2}\left(1\pm\sqrt{1+4\sin x}\right).$$

## প্রশ্নমালা 18

1নং হইতে 25নং প্রশ্নের অবকল-সমীকরণগুলির সাধারণ সমাধান নির্ণয় কর :

1. $\frac{dy}{dx}=\frac{2x+1}{2y+1}$ 2. $x\frac{dy}{dx}+y=1$

3. $(2x+1)\,dx+(2y+1)\,dy=0$

4. $(3x^2+2x+1)\,dx+(3y^2+2y+1)\,dy=0$

5. $x(3x-2)\,dx+y(3y+2)\,dy=0$

6. $\frac{x-1}{y+1}dx+\frac{y-1}{x+1}dy=0$ 7. $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=0$

8. $xdx-ydy=0$ 9. $ydx-xdy=0$

10. $x^2dx - y^2dy = 0$

11. $y^2dx - x^2dy = 0$

12. $(3-y)\,dx + (2+x)\,dy = 0$

13. $(3-y)\,dx - (1-2x)\,dy = 0$

14. $(1+x)\,dy - y\,dx = 0$

15. $x(y^2+1)dx + y(x^2+1)dy = 0$

16. $x\sqrt{1-y^2}\,dx + y\sqrt{1-x^2}\,dy = 0$

17. $\cos x\,dx + \sin y\,dy = 0$

18. $\sec^2 x \tan y\,dx + \sec^2 y \tan x\,dy = 0$

19. $y\,dx + x\,dy = xy\,dx$

20. $(1+\sin t)\,dr = r\cos t\,dt.$

21. $\dfrac{dx}{dy} + \dfrac{1+x^2}{1+y^2} = 0$

[ সংকেত : চল-বিচ্ছেদ করিয়া সমাকলনের সময় অস্থায়ী ধ্রুবকটি $= \tan^{-1} c$ ধর ।]

22. $e^x + e^y \dfrac{dy}{dx} = 0$

23. $e^x dy + e^y dx = 0$

24. $x(y-1)\,dx + y(x-1)\,dy = 0$

[ সংকেত : চল-বিচ্ছেদ করিয়া, $\dfrac{x}{x-1}dx + \dfrac{y}{y-1}dy = 0$; লবকে হর দ্বারা ভাগ করিলে $\dfrac{x}{x-1} = 1 - \dfrac{1}{x-1}$ এবং অনুরূপে $\dfrac{y}{y-1} = 1 - \dfrac{1}{y-1}$; $\therefore$ সমাকলন দ্বারা

$$\int\left(1-\frac{1}{x-1}\right)dx + \int\left(1-\frac{1}{y-1}\right)dx = k,$$

বা $x - \log_e(x-1) + y - \log_e(y-1) = k$

বা $-\log_e(x-1)(y-1) = k-(x+y) = -\log_e c - (x+y),$

[ $k = -\log_e c$ ধরিয়া ]

$= -\log_e c - \log_e e^{(x+y)}$, [ $\because \log_e e = 1$ ]

$= -\log_e\{c\,e^{(x+y)}\}$ ইত্যাদি ।]

25. $\sqrt{1-y^2}dx + \sqrt{1-x^2}dy = 0$

26. যে-বক্ররেখাগুচ্ছের নতি $= \dfrac{-y}{x}$, সেই গুচ্ছের অবকল-সমীকরণ হইতে সাধারণ সমাধান নির্ণয় কর ।

27. যে-বক্রগুচ্ছের $(x, y)$ বিন্দুতে নতি $= -\dfrac{x}{y}$, তাহাদের মধ্যে যে-টি $(0, r)$ বিন্দুগামী, তাহার সাধারণ সমীকরণ নির্ণয় কর ।

28. $(1+y^2)\,dx - xy\,dy = 0$ দ্বারা সূচিত বক্রগুচ্ছের যে-বক্ররেখাটি $(1, 0)$ বিন্দুগামী, তাহার সাধারণ সমীকরণ নির্ণয় কর ।

29. দেখাও যে, $\dfrac{x+1}{y+1}$ নতিসম্পন্ন বক্রগুচ্ছের যে-টি (0, 0) বিন্দুগামী, তাহার সমীকরণ $x^2-y^2+2x-2y=0$.

30. প্রমাণ কর যে, $e^x$ নতিযুক্ত বক্রগুচ্ছের যে-বক্রটি (0, 0)-বিন্দুগামী, তাহার সমীকরণ $y=e^x-1$.

**7·6. চল-বিচ্ছেদ প্রণালীতে পরিবর্ত-পদ্ধতির প্রয়োগ (Application of the method of substitution in the method of separation of variables) :** সুবিধামতো একটি দ্বিপদ বা বহুপদ অপেক্ষকের পরিবর্তে একটি চলরাশি বসাইলে অনেক সময় সহজেই চল-বিচ্ছেদের কাজ হইয়া যায়। তাহার পর সমাকলন দ্বারা সাধারণ সমাধান বাহির করা চলে। উদাহরণের সাহায্যে প্রণালীটি ব্যাখ্যা করা যাইতেছে।

**উদা. 9.** সমাধান কর : $\dfrac{dy}{dx}=\sqrt{y-x}$.

$y-x=t^2$ ধরিলে, $x$-সাপেক্ষে অবকলন করিয়া পাওয়া যায়,

$$\frac{dy}{dx}-1=2t\frac{dt}{dx} \text{ বা } \frac{dy}{dx}=1+2t\frac{dt}{dx}$$

$\therefore$ প্রদত্ত অবকল-সমীকরণে $\dfrac{dy}{dx}$-এর স্থলে $\left(1+2t\dfrac{dt}{dx}\right)$ এবং $\sqrt{y-x}$-এর স্থলে $t$ বসাইলে হয়,

$$1+2t\frac{dt}{dx}=t \text{ বা } \frac{dt}{dx}=\frac{t-1}{2t}$$

$$\text{বা } \frac{2t}{t-1}\,dt=dx \quad \text{বা } \left(2+\frac{2}{t-1}\right)dt=dx.$$

এইবার উভয়পক্ষকে সমাকলন করিলে পাওয়া যায়,

$$\int\left(2+\frac{2}{t-1}\right)dt=\int dx$$

$$\text{বা } 2\int dt+2\int\frac{dt}{t-1}=\int dx$$

বা $2t+2\log_e(t-1)=x+c$, [ $c$ যদৃচ্ছ ধ্রুবক ]

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $2\sqrt{y-x}+2\log_e(\sqrt{y-x}-1)=x+c$,

[ $t$-এর মান বসাইয়া ]

উদা. 10. সমাধান কর : $\frac{dy}{dx}=(\sin x+y)$,

$x+y=t$ ধরিলে, অবকলন দ্বারা

$$1+\frac{dy}{dx}=\frac{dt}{dx} \quad \text{বা} \quad \frac{dy}{dx}=\frac{dt}{dx}-1$$

প্রদত্ত অবকল-সমীকরণে

$\therefore$ $\frac{dy}{dx}$-এর স্থলে $\frac{dt}{dx}-1$ বসাইয়া

$$\frac{dt}{dx}-1=\sin t \text{ বা } \frac{dt}{dx}=\sin t+1$$

$$\therefore \quad dx=\frac{dt}{1+\sin t}=\frac{\sec t}{\sec t+\tan t}dt,$$ [লব ও হরকে $\sec t$ দ্বারা গুণ করিয়া]

$$=\frac{\sec t(\sec t-\tan t)}{\sec^2 t-\tan^2 t}dt,$$

[লব ও হরকে আবার ( $\sec t-\tan t$ ) দ্বারা গুণ করিয়া ]

$$=\frac{\sec^2 t-\sec t\tan t}{1+\tan^2 t-\tan^2 t}dt$$

$$=(\sec^2 t-\sec t\tan t)\,dt$$

সমাকলন দ্বারা, $\int dx=\int \sec^2 t\,dt-\int \sec t\tan t\,dt$

বা $x+c=\tan t-\sec t$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\tan(x+y)-\sec(x+y)=x+c$, যেখানে $c$ একটি যদৃচ্ছ ধ্রুবক।

উদা. 11. সমাধান কর : $(x+y+1)\,dx=(2x+2y-1)\,dy$

$x+y=t$ ধরিলে, $x$-সাপেক্ষে উভয় পক্ষের অবকলন দ্বারা পাওয়া যায়,

$$1+\frac{dy}{dx}=\frac{dt}{dx} \quad \text{বা} \quad \frac{dy}{dx}=\frac{dt}{dx}-1.$$

$\therefore$ $(x+y+1)\,dx=(2x+2y-1)\,dy$ হইতে $x+y=t$ বসাইয়া পাওয়া যায়, $(t+1)\,dx=(2t-1)\,dy$

$$\text{বা} \quad \frac{t+1}{2t-1}=\frac{dy}{dx}=\frac{dt}{dx}-1$$

$$\text{বা} \quad \frac{dt}{dx}=\frac{t+1}{2t-1}+1=\frac{3t}{2t-1}$$

বা $\frac{2t-1}{3t}\,dt=dx$

বা $\frac{1}{3}\left(2-\frac{1}{t}\right)dt=dx$

∴ $x$-সাপেক্ষে উভয় পক্ষের সমাকলন করিয়া,

$$\int \frac{2}{3}\,dt-\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t}=\int dx$$

বা $\frac{2}{3}t-\frac{1}{3}\log_e t=x+k$, ( $k$ যদৃচ্ছ ধ্রুবক )

বা $2t-\log_e t=3x+3k$

বা $2\,(x+y)=3x+\log_e\,(x+y)+c$,
[ $3k=c$ বসাইয়া, যেখানে $c$ যদৃচ্ছ ধ্রুবক। ]

∴ নির্ণেয় সমাধান,

$$2y=x+\log_e\,(x+y)+c.$$

**7·7. সমমাত্রিক অবকল-সমীকরণ (Homogeneous differential equations):** $Mdx+Ndy=0$ আকারের যে-সকল অবকল-সমীকরণে $M$ ও $N$ উভয়ে $x$ ও $y$ সম্বলিত সমমাত্রিক অপেক্ষক, সেই সমীকরণে $\frac{y}{x}=v$ বা $y=vx$ ধরিলে চলরাশিদ্বয় বিচ্ছিন্ন হইয়া যায়। বলা বাহুল্য, যে-অপেক্ষকের প্রত্যেকটি পদের চলরাশির মাত্রা বা চলরাশিদ্বয়ের মাত্রার সমষ্টি সমান, সেই অপেক্ষককেই **সমমাত্রিক** বলে। উল্লিখিত নিয়মে সমমাত্রিক অবকল-সমীকরণের সমাধান প্রণালীটি উদাহরণের সাহায্যে ব্যাখ্যা করা যাইতেছে।

**উদা. 12.** সমাধান কর : $(x-2y)+x\,\frac{dy}{dx}=0$

প্রদত্ত সমীকরণটিকে $(x-2y)\,dx+x\,dy=0$ আকারে লিখিলে দেখা যায়, $(x-2y)=M$ এবং $x=N$ উভয়ে একমাত্রিক। সুতরাং প্রদত্ত অবকল-সমীকরণটি সমমাত্রিক।

অতএব এক্ষেত্রে, $y=vx$ ধরিয়া $x$-সাপেক্ষে অবকলন করিলে পাওয়া যায়,

$$\frac{dy}{dx}=v+x\,\frac{dv}{dx}$$

∴ প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাওয়া যায়,

$$(x-2vx)+x\left(v+x\,\frac{dv}{dx}\right)=0$$

বা, $(1-2v)+v+x\dfrac{dv}{dx}=0.$

বা, $(1-v)+x\dfrac{dv}{dx}=0$

বা, $(1-v)\,dx+x\,dv=0$

বা, $\dfrac{dx}{x}+\dfrac{dv}{1-v}=0$

এইবার সমাকলন করিয়া পাওয়া যায়,

$$\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dv}{1-v}=\text{K}, \qquad (\text{ K যদৃচ্ছ ধ্রুবক })$$

বা, $\displaystyle\int\frac{dx}{x}-\int\frac{-1}{1-v}\,dv=\log c$ [ $\text{K}=\log c$ ধরিয়া ]

বা, $\log_e x-\log_e(1-v)=\log_e c$ বা, $\log_e\dfrac{x}{1-v}=\log_e c$

বা, $\dfrac{x}{1-v}=c$ বা, $\dfrac{x}{1-\dfrac{y}{x}}=c$ বা, $\dfrac{x^2}{x-y}=c.$ ইহাই নির্ণেয় সমাধান।

উদা. 13. সমাধান কর : $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}+\tan\dfrac{y}{x}.$

$\dfrac{y}{x}=v$ বা, $y=vx$ ধরিলে,

$\dfrac{dy}{dx}=v+x\dfrac{dv}{dx}$ হইবে।

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণটি হইবে,

$v+x\dfrac{dv}{dx}=v+\tan v$ বা, $x\dfrac{dv}{dx}=\tan v$

চলরাশিদ্বয়কে পৃথক্ করিয়া সমাকলন করিলে পাওয়া যায়,

$$\int\frac{dx}{x}=\int\frac{dv}{\tan v}=\int\frac{\cos v}{\sin v}\,dv$$

$\therefore\ \log_e x=\log_e\sin v+\log_e c=\log_e c\sin v$

$\therefore\ x=c\sin v$

বা, $\sin v=\dfrac{x}{c}$ বা, $v=\sin^{-1}\dfrac{x}{c}$

বা, $\dfrac{y}{x}=\sin^{-1}\dfrac{x}{c}$ বা, $y=x\sin^{-1}\dfrac{x}{c}.$

উদা. 14. সমাধান কর : $x+y\frac{dy}{dx}=2y$

$y=vx$ বসাইলে $\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণটি হইবে,

$x+vx\left(v+x\frac{dv}{dx}\right)=2\,vx$ বা, $1+v\left(v+x\frac{dv}{dx}\right)=2v$

বা, $v^2+vx\frac{dv}{dx}=2v-1$

বা, $vx\frac{dv}{dx}=-v^2+2v-1=-(v-1)^2$

চলরাশিদ্বয়কে পৃথক্ ও সমাকলন করিয়া পাওয়া যায়,

$$\int\frac{dx}{x}=-\int\frac{v}{(v-1)^2}dv=-\int\frac{(v-1)+1}{(v-1)^2}dv$$

বা, $\int\frac{dx}{x}=-\left[\int\frac{1}{v-1}dv+\int\frac{1}{(v-1)^2}dv\right]$

$\therefore$ $\log_e x=-\left[\log_e(v-1)-\frac{1}{v-1}+\log_e c\right]$

বা, $\log_e x+\log_e(v-1)+\log_e c=\frac{1}{v-1}$

বা, $\log_e cx(v-1)=\frac{1}{v-1}$ $\quad\therefore\quad cx(v-1)=e^{\frac{1}{v-1}}$

বা, $cx\left(\frac{y}{x}-1\right)=e^{\frac{1}{\frac{y}{x}-1}}=e^{\frac{x}{y-x}}$

বা, $c(y-x)=e^{\frac{x}{y-x}}$.

## প্রশ্নমালা 19

1. $\frac{dy}{dx}=\sqrt{x-y}$.

2. $\frac{dy}{dx}=\sin(x-y)$.

3. $\frac{dy}{dx}=\cos(x-y)$.

4. $\cos^{-1}\left(\frac{dy}{dx}\right)=x+y$.

5. $(x+y)^2 \dfrac{dy}{dx}=a^2.$ 6. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{a^2}{(x-y)^2}.$

7. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+2y+1}{2x+4y+3}.$ 8. $(x+y-1)\,dx=(2x+2y+1)\,dy.$

9. $(2x+3y+1)\,dx=(4x+6y-3)\,dy.$

10. $x(1+y^2)\,dx+y(1+x^2)\,dy=0.$

11. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2+y^2}{2x^2}.$ 12. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y-x}{y+x}.$

13. $(x^2-y^2)\dfrac{dy}{dx}=xy.$ 14. $x\dfrac{dy}{dx}=y+\sqrt{x^2+y^2}$

15. $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{y^2}{x^2}.$ 16. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y\,(y+x)}{x\,(y-x)}.$

17. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3x+5y}{5x-3y}.$ 18. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{xy}{x^2+y^2}.$

19. $(x^2+y^2)\,dy-2xy\,dx=0.$

20. $x^3dy+(xy+2y^2)\,dx=0.$

# উত্তরমালা

## প্রশ্নমালা 1

1. (i) মূলদ (ii) অমূলদ (iii) অমূলদ (iv) অমূলদ (v) মূলদ (vi) অমূলদ (vii) মূলদ (viii) মূলদ (ix) মূলদ (x) অমূলদ।

3. $\frac{289}{336}$, $\frac{145}{168}$, $\frac{97}{112}$, $\frac{73}{84}$.

4. ·52 এবং ·6 ; $\sqrt{\cdot 3}$ এবং $\sqrt{\cdot 35}$, ( অন্য সংখ্যাও হইতে পারে )।

5. (i) ·28578, ·28581, ·28671, $\frac{2}{7}$, $\cdot\dot{4}2857\dot{1}$ .

(ii) ·35554···, ·35612···, ·35621···

7. 1·414 এবং 1·415. 10. $x=4$ বা $-4$. 11. $x \geqslant 0$.

14. (i) সত্য নয় (ii) সত্য (iii) সত্য (iv) সত্য (v) সত্য।

## প্রশ্নমালা 2

1. (i) $f(x)=2x,\ x \in N$ (ii) $f(2x)=2x+1,\ x \in I$

(iii) $f(x)=2x-1,\ x \in N$ (iv) $f(x)=\frac{1}{x},\ x \in N$

(v) $f(10x+y)=x+y$.

2. (i) $N$ ; $[2, 2n]$, যেখানে $n$ অখণ্ড ধনসংখ্যা।

(ii) $[2, 2n]$ ; $[3, 2n+1]$ $n$ অখণ্ড ধনসংখ্যা।

(iii) $N$ ; $[1, 2n-1]$, $n$ স্বাভাবিক সংখ্যা।

(iv) $N$ ; $]1, 2[$. (v) $[10, 99]$ ; $[1, 18]$

3. (i) অপেক্ষক ; $f(x)=\frac{x}{2}$. (ii) গণিতের ভাষায় প্রকাশযোগ্য অপেক্ষক নহে। (iii) অপেক্ষক ; $f(x)=x^3$. (iv) অপেক্ষক ; $f(x)=4x$. (v) অপেক্ষক নহে, কারণ প্রত্যেকটি ধনাত্মক বাস্তব-সংখ্যার একাধিক চতুর্থ মূল আছে। (vi) অপেক্ষক নহে, কারণ $x$-এর মান ঋণাত্মক হইলে $\sqrt{x}$ কাল্পনিক সংখ্যা। (vii) অপেক্ষক নহে ; ধনাত্মক ও ঋণাত্মক দুই-ই হইতে পারে। (viii) অপেক্ষক ; $f(x)=\sqrt[3]{x}$. (ix) $x=0$ হইলে অপেক্ষক নহে ; $x$-এর অন্য সকল বাস্তব মানের

জন্য অপেক্ষক। (x) অপেক্ষক নহে; দুইটি অঙ্কের সমষ্টির মান নির্দিষ্ট, কিন্তু ঐ দুই অঙ্কে একাধিক সংখ্যা লেখা যায়।

4. (i) $-3$ (ii) 3 (iii) 26 (iv) 67 (v) 6 (vi) $-9$ (vii) 3 (viii) 9 (ix) 3 (x) $-4\frac{1}{2}$ (xi) $\frac{1}{3}$.

5. (i) 2 (ii) 3 (iii) $-1$ (iv) 2 (v) 2 (vi) 2 (vii) 2 (viii) 3 (ix) $\frac{1}{3}$ (x) 4.

6. (i) [1, 10]; (ii) [0, 9]; (iii) 1.

7. (i) [1, 14]; (ii) [0, 3]; (iii) 1.

8. (i) $[-\infty, \infty]$, $[1, \infty]$; (ii) $[-\infty, \infty]$, $[-\infty, \infty]$;
(iii) $R\sim 0$, $]0, 1]$; (iv) $]0, 1]$, $]0, 1]$;
(v) $R\sim\{1, 2\}$, $R$; (vi) $R\sim\{3\}$, $R$;
(vii) $R$, $R$; (viii) $R\sim\{0\}$, $R\sim\{0\}$;
(ix) $[-\infty, 1]$ $[0, \infty]$; (x) $[-1, 1]$, $[0, 1]$;

## প্রশ্নমালা 3

(3) $R$ (6) 7 (7) (i) $f(x)=0$ হইলে; (ii) $f(x)=c$ হইলে, যেখানে $c\neq 0$.

9. (i) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 (ii) 2, 5 10. 1·125, ·9. 11. (i) $\pm\cos x$ (ii) $\pm\sin x$; (iii) 0 (iv) 1 (v) $\pm\tan x$, 14. (i) $R$, $[0, 2]$ (ii) $R$, $[-2, 0]$.

## প্রশ্নমালা 4

1. (i) $f$ সর্বৈব হ্রসমান বলিয়া $f^{-1}$ আছে, (ii) $f$ সর্বৈব হ্রসমান; $f^{-1}$ আছে, (iii) $f^{-1}$ নাই, কারণ $f$ অংশত হ্রসমান, অংশত বর্ধমান (iv) $f^{-1}$ আছে, কারণ প্রদত্ত ব্যাপ্তিতে $f$ সর্বৈব বর্ধমান (v) প্রদত্ত ব্যাপ্তিতে $f$ সর্বৈব হ্রসমান, $f^{-1}$ আছে।

2. (i) $f^{-1}(x)=\frac{1}{3}(x+1)$ (ii) $f^{-1}(x)=\dfrac{3-2x}{x+1}$ (iii) $f^{-1}(x)=\dfrac{3-3x}{5x+4}$

(iv) $[0, 1[$ ব্যাপ্তিতে $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{x-1}$. (v) $f^{-1}(x)=\sqrt{x}$.

3. $[0, \frac{2}{3}]$. 4. ব্যাপ্তি $[4, 100]$ 5. ব্যাপ্তি $R$.

6. ব্যাপ্তি $R\sim]-1,1[$. 8. 6 এবং 3. 9. 1 11. $g(x)=\dfrac{2(x+1)}{x-3}$.

13. $S^{-1}(x)=\dfrac{4(x+1)}{x-3}$. 16. $S(x)=\sin x$.

## প্রশ্নমালা 5

1. (i) $-\frac{1}{2}$ (ii) 2 (iii) $\frac{1}{2}$. (2) $\frac{1}{2}$. (3) $\frac{1}{2}$ (4) 6 (5) $-1$ (6) $\frac{1}{2a}$ (7) 1 (8) $\frac{1}{4}$ (9) 0 (10) 2 sin 5 13. (i) $x=\frac{3}{2}$ বিন্দুতে (ii) $x=2$ বিন্দুতে (iii) $x=\pm a$ বিন্দু-দুইটিতে। 17. (i) 0 (ii) sec $a$ (iii) $\alpha$ স্থানে $a$ হইবে। উঃ cos $a$ (iv) $\frac{1}{2}$ (v) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (vi) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (vii) 1 (viii) 0 (ix) 1 (x) 1 20. 1.

## প্রশ্নমালা 6

1. (i) 2 (ii) 2 (iii) 4 (iv) 0 (v) $\frac{5}{6}$. 2. (i) 0 (ii) $\frac{5}{7}$ (iii) 1 (iv) $2a$ (v) 20. 3. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) 2 (iii) 3. 8. (i) 1 (ii) ·84.

9. $\underset{x\to\frac{\pi}{3}}{\text{Lt}} \tan [x]=\cdot 56$ এবং $\underset{x\to\frac{\pi}{3}}{\text{Lt}} [\tan x]=0$. 11. 1 ; 1. 12. 0 ; 2.

## প্রশ্নমালা 7

1. (i) 3 (ii) $-3$ (iii) $\frac{1}{3}$ (iv) 1 (v) $m$ (vi) $-\frac{1}{m}$ (vii) $2x$ (viii) $-4x$ (ix) $2ax$ (x) $2ax+b$ (xi) $3x^2$ (xii) $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ (xiii) $4x^3$.

2. (i) $\cos x$ (ii) $-\sin x$ (iii) $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. 3. (i) $\frac{1}{x}$ (ii) $\frac{1}{x}$ (iii) $1+\log x$ (iv) $-\tan x$ (v) $\frac{1}{a}\cot\left(\frac{x}{a}\right)$. 4. (i) 8 (ii) $-1$ (iii) 4 (iv) 16. 5. (i) $2e^{2x}$ (ii) $\left(\frac{1}{x}+\log x\right)e^{x}.x^{e^x}$ (iii) $ae^{ax}$.

6. (i) $2x$ (ii) $\frac{1}{c}-\frac{c}{x^2}$ (iii) $2x+2$ (iv) $3x^2-6x$ (v) $2x-1-\frac{1}{2\sqrt{x}}$ (vi) $\cos x-\sin x$ (vii) $\sec^2 x-1$ (viii) $-\text{cosec}^2 x+1$ (ix) $e^x+\frac{1}{x}-a$ (x) $-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$. 7. (i) $x^3\sin x+\frac{x^4\cos x}{4}$ (ii) $1+\log x$ (iii) $(2x+3)\log x+x+3$ (iv) $1+\cos 2x$ (v) $\cos x-\sec^2 x$ (vi) $2x-6$ (vii) $-(\cos x+\text{cosec}\, x\cot x)$ (viii) $4x(x^2-5)$ (ix) $\sqrt{x}+1+\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1)$ (x) $\frac{3}{2}\sqrt{x+1}$

(xi) $\cos 2x+\cos x-\sin x$ 8. (i) $\dfrac{2}{(x+1)^2}$ (ii) $\dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$

(iii) $-\dfrac{(x+1)}{\sqrt{2x}(x-1)^2}$ (iv) $\dfrac{x^2+3}{x^2}$ (v) $\dfrac{x(2-x)}{e^x}$ (vi) $\dfrac{(x-1)e^x}{x^2}$

(vii) $\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$ (viii) $\operatorname{cosec} x-x\cot x$ (ix) $\dfrac{1}{1+\cos x}$

(x) $\dfrac{1}{1-\sin x}$ (xi) $-\dfrac{2\cos x}{(1+\sin x)^2}$ (xii) $\dfrac{2\sin x}{(1+\cos x)^2}$

(xiii) $\dfrac{2}{(\sin x+\cos x)^2}$ (xiv) $\dfrac{(x-2)e^x}{x^3}$ (xv) $-\dfrac{2}{x(\log x-1)^2}$.

10. (i) $\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$ (ii) $-\frac{2}{3}t^{-\frac{2}{3}}$ (iii) $\dfrac{1}{2x\sqrt{\log x}}$ (iv) $2\cos 2x$

(v) $\cot x$ (vi) $\dfrac{1}{x}\cos\log x$ (vii) $\dfrac{1}{\sin x\cos x}$ (viii) $-\dfrac{1}{\sin x\cos x}$

(ix) $\tan x$ (x) $-\cot x$ (xi) $2xe^{x^2}$ (xii) $e^{\sin x}.\cos x$

(xiii) $-e^{\cos x}\sin x$ (xiv) $e^{\tan x}.\sec^2 x$ (xv) $(2ax+b)e^{ax^2+bx+c}$

(xvi) $\dfrac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}$ (xvii) $-\dfrac{1}{x}\sin\log x$ (xviii) $-e^x\cos e^x$

(xix) $\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$ (xx) $\dfrac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$ (xxi) $\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$ (xxii) $\dfrac{e^{\tan^{-1}x}}{1+x^2}$

(xxiii) $\dfrac{\sec^2 x}{2\sqrt{\tan x\,(1-\tan x)}}$ (xxiv) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}.\sin^{-1}x}$

(xxv) $\dfrac{1}{x\sqrt{1-(\log x)^2}}$. 11. (i) $-\dfrac{b}{a}\cot\theta$ (ii) $\dfrac{1}{t}$ (iii) $\sec^3\theta$

(iv) $\frac{3}{2}\tan\theta$ (v) $\dfrac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$. 12. (i) $\dfrac{3}{\sqrt{1-x^2}}$ (ii) $\dfrac{2}{1+x^2}$

(iii) $\dfrac{2}{1+x^2}$ (iv) $\dfrac{2}{1+x^2}$ (v) $-\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$. 13. (i) $a^x\log_e a$

(ii) $(1+x)^x\log(1+x)+x(1+x)^{x-1}$

(iii) $(1-x)^x\log(1-x)+x(1-x)^{x-1}$ (iv) $a^{e^x}.e^x\log a$

(v) $e^{a^x}.a^x\log a$. 15. (i) $-\dfrac{x}{y}$ (ii) $-\dfrac{1}{2\sqrt[3]{x}}$

(iii) $\dfrac{y(1-2x^2)}{x(2y^2-1)}$ (iv) $\dfrac{x-y}{x+y}$ (v) $\dfrac{1+m(y-e^{xy})}{x(e^{xy}-m)}$ (vi) $\dfrac{y^2}{x(1-y\log x)}$

(vii) $\dfrac{y(1-x\log y)}{x^2}$ (viii) $-\dfrac{\sin x}{\cos y}$ (ix) $\dfrac{x(a-x)}{y^2-ax}$

(x) $\dfrac{y(x\log y-y)}{x(y\log x-x)}$. 16. (i) $2x^2$ (ii) $-\cot x$ (iii) $-\tan x$

(iv) $\dfrac{2}{\sqrt{1-x}}$ (v) $-1$. 17. ·66 c.c./sec. 18. 240 m/sec ; 120 m/sec. 19. 0·5 সে. মি./সে. 20. ·1 মি./সে.

## প্রশ্নমালা 8

1. 1 ঘন সে. মি. 2. 2 ঘন সে. মি. 3. 32·75 ঘন সে. মি. ; 4·5 বর্গ মে. 4. 6 ঘন সে. মি. 5. (i) ·1 (ii) 4·1 (iii) 3·9 6. 1·035 7. (i) ·88348 (ii) ·84858 8. (i) 2·1169 (ii) 2·0419 9. 12·1253 10. 9·999.

## প্রশ্নমালা 9

1. $12x+6$ 2. $12x^2-18x$ 3. $\dfrac{4}{(1-x)^3}$ 4. $\dfrac{2}{x^3}$

5. $-\sin x$ 6. $-\cos x$ 7. $-2\sin x$ 8. $-4\sin 2x$

9. $-4\cos 2x$ 10. $-2\cos x$ 11. $2\sec^2 x\tan x$

12. $2\,\text{cosec}^2 x\cot x$ 13. $\dfrac{2}{x^3}\sec^2\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^4}\sec\dfrac{1}{x}$

14. $\dfrac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ 15. $-\dfrac{2}{(2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ 16. $\dfrac{-(x+2)}{(2x+1)^{\frac{5}{2}}}$ 17. $\dfrac{2k^2}{(k+x)^3}$

18. $\dfrac{2x^3-6x^2+6x-4}{(1-x)^3}$ 19. $a^2e^{ax}$ 20. $a(2+ax)e^{ax}$

21. $\left(\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{2a}{x^2}+\dfrac{a^2}{x}\right)e^{ax}$ 22. $-\dfrac{1}{x^2}$ 23. $-\dfrac{3}{2x^3}$

24. $-\dfrac{2}{x^3}\sin\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^4}\cos\dfrac{1}{x}$ 25. $\dfrac{\sqrt{x}-1}{4x^{\frac{3}{2}}}e^{\sqrt{x}}$ 26. $\dfrac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$

27. $-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$ 28. $\dfrac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ 29. $2-\dfrac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$

30. $\dfrac{2-x^2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ 31. $\dfrac{2(\cos t+t\sin t)}{\cos^3 t}$ 32. $\dfrac{a}{b^2}\cos^3 t$

33. $-\dfrac{1}{2at^3}$ 39. (i) $32t$ (ii) 32 40. (i) $-6$ (ii) 12 (iii) 6.

## প্রশ্নমালা 10

1. $\frac{x^6}{6}+c$ 2. $\frac{3x^{\frac{5}{3}}}{5}+c$ 3. $\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}+c$ 4. $\frac{5x^{\frac{9}{5}}}{9}+c$

5. $-\frac{1}{x}+c$ 6. $-\frac{1}{x^3}+c$ 7. $\frac{\sqrt{a}}{3}.x^{\frac{3}{2}}+c$ 8. $2\sqrt{x}+c$

9. $\sqrt{\frac{x}{2}}+c$ 10. $\frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2}+c$ 11. $x^6-x^3-\frac{1}{x}+c$

12. $x^2+\frac{1}{\sqrt{x}}+c$ 13. $\frac{1}{12x}(16x^4+3)+c$ 14. $\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x+c$

15. $\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(\frac{x^3}{3}-\frac{1}{x}\right)+c$ 16. $x-\frac{\cos 3x}{3}+c$

17. $\frac{x^2}{2}-\frac{\sin 2x}{2}+c$ 18. $-\cos ax+\sin bx+c$

19. $\frac{e^{2x}}{2}-2e^{\frac{x}{2}}+c$ 20. $\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+3x-7\log x+c$

21. $-\sqrt{2}\cos x+c$ 22. $\sqrt{2}\sin x+c$

23. $\sin x+\cos x+c$ 24. $\frac{3}{4}e^{2x}+\frac{\cos 3x}{2}+c$

25. $\frac{2e^{\frac{kn}{2}}}{k}+\frac{k.e^{\frac{2n}{k}}}{2}+c$ 26. $\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+c$

27. $\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+c$ 28. $-\frac{1}{4}(\cos 2x+\sin 2x)+c$

29. $x+\log x+c$ 30. $\frac{x^2}{2}-\log x+c$

31. $\sec x-\operatorname{cosec} x+c$ 32. $\sin^{-1}x+c$ 33. $\sin^{-1}x-\log x+c.$

## প্রশ্নমালা 11

1. $e^{ax}$. 2. $-\cos e^x$. 3. $\frac{(e^x+k)^2}{2}$. 4. $\log(e^x-a)$.

5. $\log(e^x+e^{-x})$ 6. $\log\left(e^x-\frac{1}{e^x}\right)$. 7. $\log\sin x$.

8. $\log\tan x$. 9. $\log(4x^2+3x+1)$. 10. $\frac{1}{2}\log(3x^2+2x+1)$.

11. $\frac{b}{a}\log(e^{ax}+b)$. 12. $-\frac{1}{x^2+x+1}$. 13. $e^{\tan x}$. 14. $x$.

15. $2\log\sin\frac{x}{2}$. 16. $2\log(e^{\theta}-a)-\theta$. 17. $\log(\operatorname{cosec} x-\cot x)$.

18. $\frac{\sin^3 x}{3}$. 19. $\sin(\log x)$. 20. $e^{\sin^{-1}x}$. 21. $e^{\sin^{-1}x}$.

22. $e^{\tan^{-1}x}$ 23. $\frac{(\log x+a)^2}{2}$. 24. $\frac{1}{8}(\log x)^2$. 25. $\frac{1}{2\sqrt{\tan x}}$.

26. $-\frac{1}{1+\tan x}$. 27. $-\cot(xe^x)$. 28. $\frac{1}{5}\tan^{-1}\frac{x}{5}$.

29. $\log(1+e^x)$. 30. $\frac{1}{3}\tan^{-1}x^3$. 31. $\frac{1}{5}\tan^{-1}x^5$.

32. $\frac{1}{2}\tan^{-1}e^{2x}$. 33. $\tan^{-1}\sin x$. 34. $\tan^{-1}\sin^2 x$.

35. $\frac{1}{2}\tan^{-1}\tan^2 x$. 36. $\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{x-2}{3}$. 37. $\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}}$.

38. $\tan^{-1}\log x$. 39. $\frac{a^2}{b^2}\tan^{-1}\frac{x^2}{b^2}$. 40. $\frac{1}{4}\log\frac{x-2}{x+2}$.

41. $\frac{1}{2ab}\log\frac{ax-b}{ax+b}$. 42. $\frac{1}{2}\log\frac{2x-1}{2x+1}$. 43. $\frac{a}{2c}\log\frac{bx-c}{bx+c}$.

44. $\frac{1}{4}\log\frac{x+2}{x-2}$. 45. $\frac{1}{6}\log\frac{3+\sin x}{3-\sin x}$. 46. $\log(x+\sqrt{x^2-4})$

47. $\log(t+\sqrt{t^2-16})$. 48. $\sin^{-1}\frac{x}{2}$. 49. $\sin^{-1}\frac{t}{4}$.

50. $\sin^{-1}\frac{x-1}{\sqrt{11}}$ 51. $\sin^{-1}\frac{x-2}{2}$. 52. $\sin^{-1}\frac{2x-1}{3}$.

53. $-\sin^{-1}\frac{1}{x}$. 54. $\frac{1}{3}\log\frac{\sqrt{x^3+1}-1}{\sqrt{x^3+1}+1}$.

## প্রশ্নমালা 12

1. $(x^2-2x+2)e^x$. 2. $\frac{(4x-1)}{8}e^{2x}$. 3. $x\log x^2-2x$.

4. $\frac{x^3(3\log x-1)}{9}$. 5. $\frac{-(1+\log x)}{x}$. 6. $\left(\frac{x^2}{2}+1\right)\sin x$.

7. $x\tan x+\log\cos x$. 8. $-x\cot x+\log\sin x$.

9. $\frac{-x}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x$. 10. $\frac{x}{2}\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x$.

11. $(2-x^2)\cos x+2x\sin x$. 12. $(x^2+2)\sin x+2x\cos x$.

13. $x\sin^{-1}x+\sqrt{1-x^2}$. 14. $x\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\log(1+x^2)$.

15. $x \cot^{-1} x + \frac{1}{2} \log (1 + x^2)$. 16. $x \sec^{-1} x - \log (x + \sqrt{x^2 - 1})$

17. $x \operatorname{cosec}^{-1} x + \log (x + \sqrt{x^2 - 1})$ 18. $\frac{x^2}{2} \tan^{-1} x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \tan^{-1} x$

19. $\frac{x^2}{2} \cot^{-1} x + \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \tan^{-1} x$. 20. $\frac{(x-2)^5}{5} - \frac{(x-2)^6}{30}$.

21. $x (\log x)^2 + 2x (1 - \log x)$.

22. $\frac{x^5}{5} (\log x)^2 - \frac{2}{25} x^5 \log x + \frac{2}{125} x^5$. 23. $x \sec x -$

24. $- x \operatorname{cosec} x +$ 25. $x e^x [ \log (x e^x) - 1 ]$.

26. $\frac{(x-1)^2 (x-2)^{11}}{11} - \frac{2}{11} \left[ \frac{(x-1)(x-2)^{12}}{12} - \frac{(x+2)^{13}}{156} \right]$.

27. $\frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} \sin 2x - \frac{1}{8} \cos 2x$. 28. $\frac{x^2}{4} + \frac{x}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} \cos 2x$.

## প্রশ্নমালা 13

1. 3 2. 6 3. 2 4. $2a$ 5. $\frac{39}{2}$ 6. $\frac{5}{2}$

7. $\frac{1}{2}(k^2 - l^2)$ 8. $\frac{1}{2}$ 9. $-\frac{1}{2}$ 10. 21 11. $\frac{65}{8}$

12. $\frac{1}{3}(l^3 - k^3)$ 13. $e^3 - e^2$ 14. $e^a - e$ 15. $e - e^b$.

## প্রশ্নমালা 14

1. 16 2. 6 3. 2 4. $-\left(d + \frac{c}{2}\right)$ 5. 7 6. 9

7. 12 8. 18 9. $\frac{2}{8}$ 10. $2\frac{2}{3}$ 11. $2\frac{1}{2}$ 12. $3\frac{1}{3}$

13. $1\frac{1}{2}$ 14. 32 15. $12\frac{2}{3}$ 16. $(b^2 - a^2)$ 17. $2a(b^2 - c^2)$

18. $8a^4$ 19. $4\frac{1}{2}$ 20. $6\frac{3}{4}$.

## প্রশ্নমালা 15

1. 48 2. $\frac{1}{4}$ 3. 2 4. $\frac{3}{4}$ 5. $\frac{4}{7}$ 6. 15

7. 54 8. 39 9. $\frac{1}{2}(e^2 - 1)$ 10. $2 - 3 \log 5$

11. $\log 2 + \frac{1}{2}$ 12. $\log 2 - 1\frac{1}{2}$ 13. $4 + \log 5$

14. $\frac{8}{3} - \log 3$ 15. $\log 5$ 16. 1 17. 1

18. $\frac{1}{3}$ 19. $-\frac{1}{4}$ 20. $2 - \cos 1$ 21. 0 22. $\frac{2}{3}$

23. $-1$ 31. (i) $\frac{\pi}{6}$ (ii) $\frac{\pi}{18}$ (iii) $\frac{\pi}{4}$ (iv) $\frac{\pi}{3}$ (v) $\frac{\pi}{3}$ (vi) $\frac{\pi}{8}$

(vii) $\frac{\pi}{9}$    32. $\frac{\pi^2}{8}$    33. $\frac{1}{2}\log(ab).\log\left(\frac{b}{a}\right)$    34. $2(\sqrt{5}-\sqrt{2})$

35. $\pi$    36. $\frac{1}{2a}$    37. $\log\frac{4}{3}$    38. $\frac{\pi a^2}{4}$    39. $\frac{\pi a^2}{4}$

40. $\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$    41. $2\log 2-1$    42. 1    43. 2

44. $-\frac{1}{3}$    45. $\log 2$    46. 8    47. $\frac{\pi}{4}$    48. $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\log 2.$

## প্রশ্নমালা 16

1. 8 বর্গ একক ;    2. 36 বর্গ একক ;    3. 12 বর্গ একক ;
4. $8\pi$ বর্গ একক    5. 2 বর্গ একক ;    6. 2 বর্গ একক ;
7. $4\sqrt{3}$ বর্গ একক ;    8. (i) $\frac{4}{3}$ বর্গ একক    (ii) $\frac{4}{3}$ বর্গ একক ;
9. 24 বর্গ একক ;    10. 6 বর্গ একক ;    11. $\frac{16}{3}$ বর্গ একক ;
12. 12 বর্গ একক ;    13. 21 বর্গ একক ;    14. $\frac{14}{3}$ বর্গ একক ;
15. 37 বর্গ একক ;    16. $3\pi$ বর্গ একক ;    17. $\frac{2}{9}$ বর্গ একক ;
18. $\frac{16a^2}{3}$ বর্গ একক ;    19. $\pi a(a-b)$ বর্গ একক ;
20. 12 বর্গ একক ;    21. $\frac{8}{3}$ বর্গ একক ;    23. $(9\pi-24)$ বর্গ একক ;
24. $\frac{4}{3}$ বর্গ একক ; $x$-অক্ষের নিচুদিকে অবস্থিত ;
25. $\frac{1}{2}$ বর্গ একক ;    26. $24+25\pi$ বর্গ একক।

## প্রশ্নমালা 17

1. $y-x\frac{dy}{dx}=0.$    2. $y-2x\frac{dy}{dx}=0.$    3. $x+y\frac{dy}{dx}=0.$

4. $ydx+\cos x\,dy=0.$    5. $y\cos x-\frac{dy}{dx}\sin x=1.$

6. $(x+1)dy+(y+1)dx=0.$

## প্রশ্নমালা 18

1. $(y-x)(y+x+1)=c.$    2. $x(1-y)=c.$    3. $x^2+y^2+x+y=c.$

4. $x^3+y^3+x^2+y^2+x+y=c.$    5. $x^3+y^3-x^2+y^2=c.$

6. $\frac{x^3}{3}+\frac{y^3}{3}-x-y=c.$    7. $cy=e-\frac{x^2}{2}$    8. $x^2-y^2=c.$

9. $\dfrac{x}{y}=c.$ 10. $x^3-y^3=c.$ 11. $x-y=cxy.$

12. $\dfrac{x+2}{3-y}=c.$ 13. $\sqrt{1-2x}.\ (3-y)=c$ 14. $y=c(1+x).$

15. $\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}=c.$ 16. $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=c.$

17. $\sin x-\cos y=c.$ 18. $\tan x\tan y=c.$

19. $xy=ce^x.$ 20. $r=c\,(1+\sin t).$ 21. $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=c.$

22. $e^x+e^y=c.$ 23. $e^x+e^y+ce^{xy}=0.$ 24. $(x-1)(y-1)=ce^{x+y}$

25. $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y=c.$ 26. $xy=c.$ 27. $y=cx.$

28. $x^2-y^2=1.$

## প্রশ্নমালা 19

1. $x+2\sqrt{x-y}+\log(\sqrt{x-y}-1)+c=0.$

2. $\tan(x-y)+\sec(x-y)=x+c.$

3. $\cot\dfrac{x-y}{2}+x+c=0.$ 4. $\tan\dfrac{x+y}{2}-x+c=0.$

5. $y=a\tan^{-1}\dfrac{x+y}{a}+c.$ 6. $y=\dfrac{a}{2}\log\dfrac{x-y-a}{x-y+a}+c.$

7. $x+c=2y+\frac{1}{4}\log(4x+8y+5).$ 8. $x=2y+\log(x+y)+c.$

9. $42y=21x+15\log(14x+21y-3)+c.$ 10. $x^2+y^2+x^2y^2=c.$

11. $x=\frac{1}{2}(x-y)(\log x+c).$ 12. $\log(x^2+y^2)+2\tan^{-1}\dfrac{y}{x}=c.$

13. $x^2+2y^2(c+\log y)=0.$ 14. $cx^2-y+\sqrt{x^2+y^2}.$

15. $2x-y=cx^2y.$ 16. $xy=ce^{y/x}.$

17. $3\log(y^2+x^2)=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}+c.$ 18. $x=ce^{\frac{y^2}{2x^2}}.$

19. $x^2-y^2=cx.$ 20. $x^2y=c\,(x+y).$

# বলবিদ্যা ( Mechanics )

## প্রথমাংশ : গতিবিদ্যা ( **Dynamics** )

# প্রথম অধ্যায়

## বেগ ও ত্বরণ

## ( Velocity and Acceleration )

**1·1. বলবিদ্যা (Mechanics) ঃ** যে-বিজ্ঞানের আলোচ্য বিষয় হইল বলের অধীন বস্তুর গতিশীল বা স্থিতিশীল অবস্থা, তাহাকে **বলবিদ্যা** বলে।

বলবিদ্যার (i) যে-শাখায় বলাক্রান্ত বস্তুর শুধু গতিশীল অবস্থার আলোচনা হয়, তাহাকে **গতিবিদ্যা (Dynamics)** এবং (ii) উহার যে-শাখায় বলাক্রান্ত বস্তুর শুধু স্থিতিশীল অবস্থার আলোচনা থাকে, তাহাকে বলে **স্থিতিবিদ্যা (Statics)।**

গতিবিদ্যার আবার দুইটি বিভাগ। উহার (iii) যে-বিভাগে গতিকে বস্তুর ভরনিরপেক্ষভাবে নিছক গতি হিসাবেই বিচার করা হয়, তাহাকে **স্থিতিবিদ্যা (Kinematics)** এবং (iv) অপর যে-বিভাগে গতির কারণ ও বলাক্রান্ত বস্তুর ভরেরও বিচার হয়, তাহাকে বলে **চলবিদ্যা (Kinetics)।**

**1·2. গতি-সম্বন্ধে মৌলিক ধারণা ঃ** বস্তুকণার গতি সম্বন্ধে আলোচনার সূচনাতেই অবস্থান ও অবস্থান-পরিবর্তন সম্বন্ধে কয়েকটি মৌলিক ধারণার আলোচনা প্রয়োজন।

(*a*) **অবস্থান (Position) ঃ** সর্বপ্রথম মনে রাখিতে হইবে যে, কণা বা বিন্দু-বিশেষের অবস্থান বুঝাইবার জন্য কোন একটা স্থির অক্ষতন্ত্রের প্রয়োজন হয়। কার্তেজীয় অক্ষতন্ত্রে পরস্পর লম্বচ্ছেদী দুইটি সরলরেখাকে অক্ষ ধরিয়া বিন্দু-বিশেষের অবস্থান নির্ণয় করা যায়। সেইভাবে কার্তেজীয় একটি অক্ষযুগলের তুলনায় যে-বিন্দুতে একটি বস্তুকণা অবস্থিত থাকে, তাহাকেই বলা হয় ঐ কণার **অবস্থান** (*Position*)।

(*b*) **অবস্থান-পরিবর্তন (Change of position) ঃ** গতির ফলে বস্তুমাত্রই চলমান হয় এবং তাহার ফলে উহার অবস্থান-পরিবর্তন ঘটে।

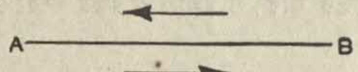
এই অবস্থান-পরিবর্তন, বক্র বা সরল দুই প্রকার রেখাতেই ঘটিতে পারে এবং সময়ের নিরিখে এই দুইপ্রকার অবস্থান-পরিবর্তনেরই হার নির্ণয় করা যায়। প্রতি একক সময়ে মূল অবস্থান হইতে পরিবর্তিত অবস্থানের দূরত্ব দ্বারা এইরূপ অবস্থান-পরিবর্তন বা চলনের হার নির্ধারিত হয়।

(1) **দ্রুতি (Speed) ঃ** পথচলার এই হার যখন কোন দিক্ বা অভিমুখ সূচিত করে না অর্থাৎ যখন উহা বক্র বা সরল, যে-কোন পথে দিক্-নিরপেক্ষভাবে প্রতি একক সময়ে অতিক্রান্ত পথের দৈর্ঘ্য-সূচিত একটি হার বুঝায় তখন উহাকে **দ্রুতি** (*Speed*)

বলে। উদাহরণস্বরূপ, কোন বস্তু যদি সেকেণ্ডে 5 সেন্টিমিটার পথ অতিক্রম করে তবে তাহার দ্রুতি হইবে সেকেণ্ডে 5 সেন্টিমিটার বা সংক্ষেপে 5 সে.মি./সে.।

(2) **সরণ ও বেগ (Displacement and velocity)ঃ** আবার কোন বস্তু বা ব্যক্তি যখন একটি সরল রেখায় নির্দিষ্ট অভিমুখে অবস্থান-পরিবর্তন করে তখন ঐ সরল রেখায় নির্দিষ্ট অভিমুখে মূল অবস্থান হইতে পরিবর্তিত অবস্থান পর্যন্ত দূরত্বকে বলা হয় **সরণ** (*Displacement*))।

**সময়ের নিরিখে সরণের হারকেই বলে বেগ (Velocity)।** উদাহরণস্বরূপ, $\overrightarrow{AB}$ মুখে ঐ সরল রেখায় 5 সেকেণ্ডে কোন বস্তুর সরণ যদি 20 সেন্টিমিটার হয়, তবে সময়সাপেক্ষে তাহার সরণের হার হইবে সেকেণ্ডে $\frac{20}{5}$ বা 4 সেন্টিমিটার। দ্রুতির মত এই সরণের হার বা বেগকে লেখা হইবে, $\overrightarrow{AB}$ মুখে সেকেণ্ডে 4 সেন্টিমিটার বা সংক্ষেপে, $\overrightarrow{AB}$ মুখে 4 সে.মি./সে.; বলাবাহুল্য, $\overrightarrow{BA}$ মুখে 4 সে.মি./সে. বেগটি হইবে প্রথমোক্ত বেগটির বিপরীতমুখী। কাজেই $\overrightarrow{AB}$ মুখে 4 সে.মি./সে. বেগটি যদি ধনাত্মক হয়, তবে উহার বিপরীত মুখে অর্থাৎ $\overrightarrow{BA}$ মুখে বেগটি হইবে ঋণাত্মক এবং সেই কারণে তাহাকে $-4$ সে.মি./সে. আকারে প্রকাশ করিতে হইবে। স্পষ্টত, প্রথমটিকে **ধনবেগ** ধরিলে দ্বিতীয়টিকে **ঋণবেগ** বলিয়া গণ্য করিতে হইবে।



1নং চিত্র

বেগ আবার দুইপ্রকার—সমবেগ ও অসমবেগ।

(i) **সমবেগ (Uniform velocity)ঃ** অতিক্ষুদ্র বা অমিতক্ষুদ্র সমান সমান সময়ে একটা নির্দিষ্ট মুখে সমান সমান সরণ হইলে সেই সরণের হারকে **সমবেগ** (*Uniform velocity*) বলে। সুতরাং প্রতি $t$ সময়ে যদি $s$ পরিমাণ সরণ হয় তবে,

$$\text{সমবেগ } v \text{ হইবে } \frac{s}{t} \text{ অর্থাৎ } \mathbf{v=\frac{s}{t}} \text{ বা } \mathbf{s=vt}.$$

(ii) **অসমবেগ (Variable velocity)ঃ** কিন্তু সমান সমান সময়ে, দিকে বা মানে অসমান সরণ হইলে সরণের সেই অসম হারকে বলা হয় **অসমবেগ** (*Variable velocity*)। $t_1, t_2, t_3$ প্রভৃতি সময়ে কোন বস্তুর সরণ যদি যথাক্রমে $s_1$, $s_2$, $s_3$ প্রভৃতি হয়, তবে উহার বেগ $t_1$ কালপর্বে $\frac{s_1}{t_1}=v_1$, $t_2$ কালপর্বে $\frac{s_2}{t_2}=v_2$, $t_3$ কালপর্বে $\frac{s_3}{t_3}=v_3$ ইত্যাদি। সেক্ষেত্রে $t_1+t_2+t_3+\cdots=t$ কালপর্বে বস্তুটির বেগ হইবে অসম।

(iii) **গড়বেগ (Average velocity)** : মোট $t$ সময়ে অসমবেগে চলমান কোন বস্তুর যদি মোট সরণ হয় $s$ তবে তাহার **গড়বেগ** হইবে $\frac{s}{t}$. এখন,

$s = s_1 + s_2 + s_3 + \cdots$, $t = t_1 + t_2 + t_3 + \cdots$ এবং $t_1, t_2, t_3$ প্রভৃতি কালপর্বে বেগ যথাক্রমে $v_1, v_2, v_3$ প্রভৃতি হইলে,

$$\textbf{গড়বেগ } \mathbf{v} = \frac{s}{t} = \frac{s_1 + s_2 + s_3 + \cdots}{t_1 + t_2 + t_3 + \cdots} = \frac{v_1 t_1 + v_2 t_2 + v_3 t_3 + \cdots}{t}.$$

(iv) **বিশেষ মুহূর্তে বেগ (Velocity at an instant)** : বেগবান বস্তুর সরণ ও সময় একটি অপেক্ষক-সম্পর্কে সম্পর্কিত ; কেননা সময় $t$-এর পরিবর্তনের সহিত সরণ $s$-এর সম্পর্ক একটি নিয়মে বাধা থাকে। সুতরাং $t_1, t_2, t_3$ প্রভৃতি $t$-এর প্রতিটি মানের জন্য সরণ $s$-এর যথাক্রমে $s_1, s_2, s_3$ প্রভৃতি একটি এবং মাত্র একটি করিয়াই মান পাওয়া যায়।

এখন ধরা যাইতে পারে $t$ সময়ের পর অমিতক্ষুদ্র $\delta t$ সময়ে সরণ যেন হয় অমিতক্ষুদ্র $\delta s$ পরিমাণ। সুতরাং ঐ $\delta t$ সময়ে বেগ হইবে $= \frac{\delta s}{\delta t}$. স্পষ্টত, এই $\frac{\delta s}{\delta t}$-এর সীমান্তমানই হইবে $t$ সময়ের মাথায় বিশেষ মুহূর্তের বেগ।

$$\therefore \ \textbf{t সময়ের মাথায় বিশেষ মুহূর্তের বেগ} = \underset{\delta t \to 0}{Lt} \ \frac{\delta s}{\delta t} = \frac{\mathbf{ds}}{\mathbf{dt}}.$$

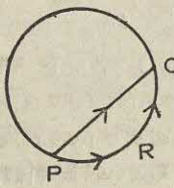
এইভাবে, **t-সাপেক্ষে s-এর অবকল সহগ-ই t-এর মাথায় বিশেষ মুহূর্তের বেগ সূচিত করে।**

(v) **বেগের একক** : এফ্-পি-এস্ পদ্ধতিতে ( F. P. S. system-এ ) প্রতি সেকেণ্ডে 1 ফুট পরিমাণ বেগকে একক হিসাবে ধরা হয়। সি-জি-এস্ পদ্ধতিতে ( C. G. S. system-এ ) প্রতি সেকেণ্ডে 1 সেন্টিমিটার পরিমাণ বেগকে বলা হয় এক একক বেগ।

**1·3. বেগের সূচন (Representation of velocity)** : বেগ যেহেতু নির্দিষ্ট দিকে সরণের হার, সেইহেতু উহার মধ্যে সরণের মান এবং দিক্, এই দুইটি ধারণা নিহিত আছে। কাজেই বেগকে সূচিত করিতে হইলে এমন একটা কিছু চাই যাহার মানও আছে, দিক্‌ও আছে। একটু ভাবিলেই দেখা যায় যে, খণ্ডরেখার মধ্যে এই দুইটি গুণই রহিয়াছে। উদাহরণস্বরূপ, $\overline{AB}$ খণ্ডরেখাটির দৈর্ঘ্য $AB$—উহার মান সূচিত করে এবং উহার প্রান্তবিন্দু-দুইটির ক্রমবিন্যাস দ্বারা উহার দিক্ সূচিত করা যায়। $\overline{AB}$ বলিতে $A$ হইতে $B$ অভিমুখে $AB$ পরিমাণ দৈর্ঘ্য এবং $\overline{BA}$ বলিতে $B$ হইতে $A$ অভিমুখে $BA$ পরিমাণ দৈর্ঘ্য—এইরূপ ধরিয়া লইলে, $\overline{AB}$ দ্বারা দিকে ও মানে একটি বেগ সূচিত করা চলে। অনুরূপে $\overline{BA}$ দ্বারা $\overline{AB}$-এর মানে সমান কিন্তু দিকে বিপরীত একটি বেগ সূচিত করা যায়।

সুতরাং খণ্ডরেখা দ্বারা বেগকে সম্পূর্ণ ভাবে সূচিত করা চলে।

**1·4. বেগ ও দ্রুতির তুলনা (Comparison between velocity and speed) :** বেগ বলিতে নির্দিষ্ট দিকে সরণের হার এবং দ্রুতি বলিতে শুধু পথ অতিক্রমণের হার বুঝায়। (1) বেগের সংজ্ঞায় দূরত্ব, সময় ও দিক্—এই তিনটি ধারণা নিহিত, কিন্তু দ্রুতির মধ্যে পথের দৈর্ঘ্য আর সময় ছাড়া, দিকের কোন প্রশ্ন নাই। (2) দ্বিতীয়ত, বস্তুকণার দুইটি অবস্থানের দূরত্ব বলিতে দুইটি বিন্দুর দূরত্বই বুঝায়। জ্যামিতির প্রাথমিক জ্ঞান হইতে আমরা জানি যে, দুই বিন্দুর দূরত্ব উহাদের সংযোজক সরল রেখা দ্বারাই পরিমিত হয়। কিন্তু পথের দৈর্ঘ্য সরল বা বক্র যে-কোন রেখায় বিস্তারিত হইতে পারে। একটি বৃত্তের পরিধি ধরিয়া গমন বুঝাইলে, নির্দিষ্ট সময়ে সেই পরিধির যতটা অংশ অতিক্রান্ত হয়, তাহার দৈর্ঘ্যই পথের দৈর্ঘ্য। ধরা যাক, 2নং চিত্রে প্রদর্শিত বৃত্তটির পরিধির উপর দিয়া $P$ বিন্দু হইতে একটি বস্তুকণা যেন $R$ বিন্দু দিয়া $Q$ বিন্দুতে পৌঁছায়। এখানে পথের দৈর্ঘ্য নিশ্চয়ই $PQR$ চাপ। $P$ হইতে $Q$-এর দূরত্ব কিন্তু $\overline{PQ}$ জ্যা। তাহা হইলে বস্তুকণাটি $PRQ$ চাপের সমান পথ অতিক্রম করিয়াছে। কিন্তু উহার সরণ হইয়াছে $\overline{PQ}$ খণ্ডরেখা পরিমাণ, সুতরাং পথের দৈর্ঘ্য বলিতে সকল সময় দূরত্ব বুঝায় না।



2নং চিত্র

(3) তৃতীয়ত, দ্রুতির পথটা যখন সরল রেখায়, তখনও উহা বেগের সমার্থক হইতে পারে না। কারণ দ্রুতির মধ্যে দিকের উল্লেখ নাই। উদাহরণস্বরূপ, $\overrightarrow{AB}$ সরল রেখায় $O$ বিন্দু হইতে একটি বস্তুকণা যেন ঐ রেখাপথেই সেকেণ্ডে 4 সেন্টিমিটার হারে চলমান। তাহা হইলে সেকেণ্ডে 4 সে.মি. হইল বস্তুকণার দ্রুতি। এখন কণাটি $\overrightarrow{OA}$ বরাবর বা তাহার ঠিক বিপরীতমুখে $\overrightarrow{OB}$ বরাবর যে দিকেই চলুক না কেন, উহার দ্রুতি উভয় ক্ষেত্রেই সেকেণ্ডে 4 সে.মি.। কিন্তু $\overrightarrow{OA}$ বরাবর সেকেণ্ডে 4 সে.মি. বেগ, $\overrightarrow{OB}$ বরাবর সেকেণ্ডে 4 সে.মি. বেগের সম্পূর্ণ বিপরীত। অর্থাৎ $OA$ বরাবর বেগকে যদি 4 সে.মি./সেকেণ্ড হয়, তবে $\overrightarrow{OB}$ বরাবর বেগ হইবে 4 সে.মি./সেকেণ্ড। সুতরাং দিকের বিচারে সম-পরিমাণ দ্রুতি দুইটি পৃথক্ বেগ সূচনা করিতে পারে।



3নং চিত্র

(4) চতুর্থত, দিক্-সংজ্ঞাযুক্ত দ্রুতিকে বেগ বলা যায়, অর্থাৎ বেগমাত্রই নির্দিষ্ট দিকে দ্রুতি। কিন্তু দ্রুতিমাত্রই বেগ নহে।

**1·5. ত্বরণ (Acceleration) :**

(i) **ত্বরণ ও মন্দন :** চলমান বস্তুর বেগ-পরিবর্তন সম্বন্ধে সকলেরই কিছু-না-কিছু প্রত্যক্ষ অভিজ্ঞতা আছে। রেলগাড়ির কথাই ধরা যাক। যাত্রার সময় উহা

প্রথমে আস্তে গা নাড়া দেয়। তাহার পরই উহা ক্রমে বেগ বাড়াইতে থাকে। আবার থামিবার আগে আস্তে আস্তে গাড়িটা উহার বেগ কমাইয়া আনে এবং শেষ পর্যন্ত একেবারে থামিয়া যায়। এইভাবে হাঁটাচলা ও দৌড়াদৌড়ির সময় মানুষও নানাভাবে নানা সময় তাহার বেগ পরিবর্তন করে।

**এই বেগ-পরিবর্তনের হারকেই বলে ত্বরণ (Acceleration)।**

(ii) **মন্দন :** ত্বরণ কথাটির আক্ষরিক অর্থ ত্বরান্বিত বা তাড়াতাড়ি করা। বেগ-পরিবর্তন কিন্তু সবসময় একমাত্র ত্বরান্বিত করা বা বেগের বৃদ্ধিই বুঝায় না। কখনও কখনও উহা বেগ কমানোর অর্থও বহন করে। সেইজন্য হ্রাসের দিকে বেগ-পরিবর্তনকে কখনও কখনও **মন্দন (Retardation)** বলা হয়। কারণ মন্দন শব্দের অর্থ গতির ক্রমাগত মন্দীভূত বা হ্রাস হওয়ার হার বুঝায়। গণিতের ভাষায় মন্দন হইল ঋণাত্মক ত্বরণ। ত্বরণ এইভাবে ধনাত্মক ও ঋণাত্মক, দুই-ই হইতে পারে।

(iii) **সমত্বরণ ও অসমত্বরণ :** অমিতক্ষুদ্র সমান সমান সময়ে সমান সমান বেগ-পরিবর্তনকে বলে **সমত্বরণ (Uniform acceleration)**; সেইরূপ অমিতক্ষুদ্র সমান সমান সময়ে অসমান বেগ-পরিবর্তনকে বলে **অসমত্বরণ (Variable acceleration)**।

(iv) **ত্বরণের ভাষা (Expression for acceleration) :** বেগ যেমন উহার ইংরেজী প্রতিশব্দ velocity-র আদ্যক্ষর $v$-দ্বারা সূচিত হয়, ত্বরণ তেমনি উহার প্রতিশব্দ acceleration-এর '$a$' দ্বারা সূচিত হয়। ত্বরণ কথাটি আবার উহার আরেকটি কাছাকাছি শব্দ ত্বরিত শব্দের ইংরেজী প্রতিশব্দ fast-এর আদ্যক্ষর $f$ দ্বারাও সূচিত হয়। ত্বরণ বুঝাইতে এই গ্রন্থে $f$-ই ব্যবহৃত হইবে।

এখন বেগ বুঝাইতে $v$ সে.মি./সে. আকারে সরণের সঙ্গে একবার সময় উল্লেখ করিতে হয়। ত্বরণ যেহেতু বেগ-পরিবর্তনের হার, সেইহেতু বেগ বুঝাইবার জন্য একবার এবং প্রতি একক সময়ে সেই বেগের পরিবর্তন বুঝাইতে আরেকবার সময়ের উল্লেখ করিতে হয়। সুতরাং প্রতি সেকেণ্ডে যদি $f$ সে.মি./সে. পরিমাণ বেগ-পরিবর্তন হয় তবে উহাকে লিখিতে হইবে সেকেণ্ডে $f$ সে.মি./সে. পরিমাণ ত্বরণ। সংক্ষেপে এই কথাটিই লেখা হয় $f$ সে.মি./সে.$^2$ এইভাবে।

অতএব 5 সে.মি/সে.$^2$ দ্বারা বুঝিতে হইবে সেকেণ্ডে 5 সেন্টিমিটার/সেকেণ্ড পরিমাণ বেগ-পরিবর্তন হইতেছে।

(v) **ত্বরণের সূচন (Representation of acceleration) :** ত্বরণের সংজ্ঞা হইতে দেখা যায় যে, উহা আসলে প্রতি একক সময়ে মূল বা প্রারম্ভিক বেগের সহিত কত পরিমাণ বেগ যুক্ত বা বিযুক্ত হয় তাহাই সূচিত করে। সুতরাং বেগের মত ত্বরণকে খণ্ডরেখাদ্বারা দিকে ও মানে সূচিত করা হয়।

(vi) **ত্বরণ-প্রকাশে তত্তবকের ব্যবহার :** সংজ্ঞা অনুসারে ত্বরণ হইল বেগ-পরিবর্তনের হার। সুতরাং ত্বরণ $f$ দ্বারা বেগ ও সময়ের একটি অপেক্ষক সম্পর্ক সূচিত হয়। বেগ যদি $v$ হয় এবং সময় যদি হয় $t$, তবে $t$-এর অমিতক্ষুদ্র $\delta t$ পরিমাণ পরিবর্তনের জন্য $v$-এর অমিতক্ষুদ্র পরিবর্তন যেন হয় $\delta v$ ; তাহা হইলে $\delta t$ সময়ে বেগ-পরিবর্তনের হার হইবে $\frac{\delta v}{\delta t}$.

অতএব সময়-সাপেক্ষে $\frac{\delta v}{\delta t}$-এর সীমান্তমান লইলে একটা বিশেষ মুহূর্তে ত্বরণের মান পাওয়া যাইবে।

$$\therefore \quad \text{ত্বরণ } \mathbf{f} = \underset{\delta t \to 0}{Lt} \frac{\delta v}{\delta t} = \frac{\mathbf{dv}}{\mathbf{dt}} \qquad \cdots \quad (1)$$

দ্বিতীয়ত, পূর্বেই দেখা গিয়াছে যে $v = \frac{ds}{dt}$

$$\therefore \quad \mathbf{f} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{\mathbf{d^2s}}{\mathbf{dt^2}} \qquad \cdots \quad (2)$$

তৃতীয়ত, যেহেতু $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds}v$

$$\therefore \quad f = \frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{ds} \qquad \cdots \quad (3)$$

(vii) **ত্বরণের একক :** এফ্-পি-এস্ (F.P.S) পদ্ধতিতে 1ফু./সে.$^2$-কে এবং সি-জি-এস্ (C.G.S) পদ্ধতিতে 1 সে.মি./সে.$^2$-কে ত্বরণের একক বলিয়া ধরা হয়।

**1·6. ভেক্টর হিসাবে বেগ ও ত্বরণ (Velocity and acceleration as vectors) :** যে-রাশির দিক্ ও মান আছে তাহাকে ভেক্টর বলা হয়। সেই হিসাবে বেগ ও ত্বরণ উভয়েই ভেক্টর।

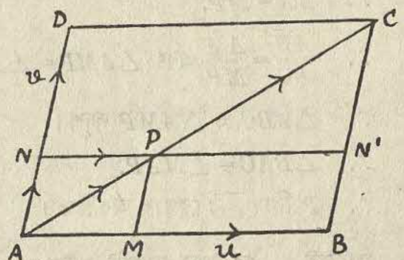
সুতরাং ভেক্টরের জন্য বিহিত সামান্তরিক সূত্রের সাহায্যে সমবিন্দু দুইটি বেগ, দুইটি ত্বরণ অথবা একটি বেগ ও একটি ত্বরণের সংশ্লেষ করা যায়।

এইভাবে দুইটি বেগের সংশ্লেষ দ্বারা যে একটি বেগ পাওয়া যায় তাহাকে প্রথমোক্ত বেগ-দুইটির **লব্ধি (Resultant)** বলে এবং ঐ বেগ-দুইটিকে বলে লব্ধি-বেগের **উপাংশ বা উপবেগ (Component velocities)।** অনুরূপ দুইটি ত্বরণের যুক্তফলকেও ঐ **ত্বরণ-দুইটির লব্ধি** বলা হয় এবং ঐ **লব্ধি-ত্বরণের** উপাংশরূপে গণ্য হয় প্রথমোক্ত দুইটি ত্বরণ।

বলা বাহুল্য, দুইয়ের অধিক উপবেগ মিলিত হইয়াও একটি লব্ধি-বেগ উৎপন্ন করিতে পারে। অনুরূপে দুইয়ের অধিক ত্বরণ মিলিত হইয়া একটি লব্ধি-ত্বরণ উৎপন্ন করিতে পারে।

**1·7. বেগ-সামান্তরিক সূত্র (Parallelogram law of velocities)ঃ একই বিন্দুতে যুগপৎ সক্রিয় দুইটি বেগ যদি ঐ বিন্দু হইতে অঙ্কিত কোন সামান্তরিকের দুই সন্নিহিত বাহু দ্বারা দিকে ও মানে সূচিত হয়, তবে ঐ বিন্দু হইতে অঙ্কিত উক্ত সামান্তরিকের কর্ণ দ্বারা উহাদের লব্ধি দিকে ও মানে সূচিত হইবে। (If two velocities acting at a point can be represented in magnitude and direction by the adjacent sides of a parallelogram, then their resultant will be represented in magnitude and direction by the diagonal drawn from that angular point.)**

$A$ বিন্দুতে $u$ ও $v$, এই দুইটি বেগ যেন যুগপৎ সক্রিয়। উহারা যেন $ABCD$ সামান্তরিকের যথাক্রমে $\overline{AB}$ এবং $\overline{AD}$ সন্নিহিত বাহুদ্বয় দ্বারা দিকে ও মানে সূচিত হইয়াছে।



4নং চিত্র

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $u$ ও $v$-র লব্ধি $\overline{AC}$ কর্ণ দ্বারা দিকে ও মানে সূচিত হইবে।

এখন, $A$ বিন্দুটিকে $u$ বেগে চলমান ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র বিন্দু-পরিমাণ একটি পোকা এবং $\overline{AB}$ রেখাকে চলমান অতিসূক্ষ্ম একটি তার কল্পনা করা হইল। স্পষ্টতই, $A$ পোকাটি যে সময়ে $A$ হইতে $B$-র দিকে $u$ বেগে অগ্রসর হইতেছে ঠিক সেই সময়ে সমগ্র $AB$ তারটি সর্বক্ষণ $\overline{AB}$ রেখার সমান্তরাল থাকিয়া $v$ বেগে $\overrightarrow{AD}$ অভিমুখে চলিতেছে। এইরূপভাবে চলিতে চলিতে 1 সেকেণ্ড পরে $A$ পোকাটি যেন $\overline{AB}$ দূরত্ব অতিক্রম করিল এবং ঐ 1 সেকেণ্ডে $AB$ তারটি আসিয়া যেন $\overline{DC}$ রেখার সহিত মিলিয়া গেল। ফলে পোকাটির অন্তিম অবস্থান হইল $C$ বিন্দু।

অনুরূপে যাত্রামুহূর্ত হইতে $\frac{1}{n}$-তম সেকেণ্ডে পোকাটি যেন $\overline{AM}$ দূরত্ব অতিক্রম করে এবং সেই সময়ে তারটি যে $\overline{AN}$ দূরত্ব অতিক্রম করিয়া $\overline{NN'}$ অবস্থান গ্রহণ করে। $\overline{NN'}$-এর $\overline{NP}$ অংশ যদি $\overline{AM}$-এর সর্বসম হয়, তবে পোকাটি $\frac{1}{n}$-তম সেকেণ্ডের মাথায় $P$ বিন্দুতে থাকিবে।

এখন $\overline{AB} = u$ একক দূরত্ব।

$\overline{BC} = \overline{AD} = v$ একক দূরত্ব।

আবার $s = vt$ সূত্রানুসারে

$$\overline{AM} = \frac{1}{n} \cdot u = \frac{u}{n}$$

এবং $\overline{AN} = \frac{1}{n} \cdot v = \frac{v}{n}$.

$$\therefore \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{u}{v} \text{ এবং } \frac{\overline{AM}}{\overline{AN}} = \frac{u}{n} \Big/ \frac{v}{n} = \frac{u}{v},$$

$$\therefore \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AN}}.$$

$\overline{AM}$ ও $\overline{NP}$ সমান ও সমান্তরাল বলিয়া $AMPN$ একটি সামান্তরিক।

$$\therefore \overline{AN} = \overline{MP}.$$

$$\therefore \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{MP}} \text{ এবং } \angle AMP = \angle ABC.$$

$\therefore$ $\triangle ABC$ ও $\triangle AMP$ সদৃশ।

$\therefore$ $\angle BAC = \angle MAP$.

$\therefore$ $P$ বিন্দু $\overline{AC}$ রেখায় অবস্থিত।

কাজেই, $n$-এর মান যাহাই হউক না কেন অর্থাৎ $\frac{1}{n}$ সেকেণ্ড যে পরিমাণই হউক, $P$ বিন্দু সর্বদা $\overline{AC}$-র উপর থাকিবে।

$\therefore$ পোকাটি অর্থাৎ $A$ বিন্দু সর্বদা $\overrightarrow{AC}$ অভিমুখে অগ্রসর হইবে এবং যেহেতু 1 সেকেণ্ড পরে উহার অবস্থান হইবে $C$ বিন্দুতে সেইহেতু $\overline{AC}$ কর্ণই দিকে ও মানে যথাক্রমে $\overline{AB}$ ও $\overline{AD}$ দ্বারা সূচিত $u$ ও $v$-এর লব্ধি সূচিত করিবে।

আবার, $\triangle ABC$ ও $\triangle AMP$ সদৃশ বলিয়া,

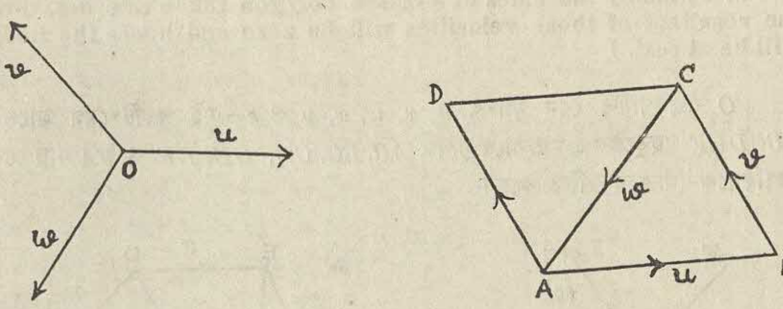
$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\frac{u}{n}}{u} = \frac{1}{n}.$$

$\therefore$ লব্ধিবেগ সমাহারও বটে।

**1·8. বেগ-ত্রিভুজ (Triangle of velocities) প্রতিজ্ঞা :**

**কোনো বস্তুর যদি যুগপৎ এমন তিনটি বেগ থাকে যে, তাহাদিগকে একটি ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত বাহু-তিনটি দ্বারা দিকে ও মানে সূচিত করা যায়, তবে ঐ বস্তুটি স্থির থাকিবে ; অর্থাৎ ঐ বেগ-তিনটির লব্ধি শূন্য হইবে। (If a body possesses simultaneously three such velo-**

**cities as can be represented in magnitude and direction by the sides of a triangle taken in order, then the body will remain at rest, or in other words, the resultant of the three velocities will be zero. )**




5নং চিত্র

একটি বস্তুকণা যেন একই সময়ে $u$, $v$ ও $w$ এই তিনটি বেগের অধীন। বেগ-তিনটি এইরূপ যে একটি ত্রিভুজ $ABC$-র $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ ও $\overline{CA}$ বাহুগুলি দিকে ও মানে যেন যথাক্রমে $u$, $v$ ও $w$ বেগ সূচিত করে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ঐ বেগ-তিনটির লব্ধি শূন্য হইবে, ফলে বস্তুটি স্থির থাকিবে।

**প্রমাণ:** $ABCD$ সামান্তরিকটি পূর্ণ করা হইল। $\overline{BC}=\overline{AD}$ এবং $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ বলিয়া, $\overline{AD}$ দ্বারা $\overline{BC}$ অর্থাৎ $v$ বেগ সূচিত হইবে। তাহা হইলে বেগ-সামান্তরিক প্রতিজ্ঞা অনুসারে $\overline{AB}$ ও $\overline{AD}$ অর্থাৎ $u$ ও $v$ বেগের লব্ধি স্পষ্টতই $\overline{AC}$ কর্ণ। $\overline{AC}$ দ্বারা সূচিত বেগ $\overline{CA}$ দ্বারা সূচিত বেগের সমান ও বিপরীতমুখী।

$\therefore$ $\overline{AC}=-w$। কাজেই ইহাকে $w$-র সহিত যুক্ত করিলে লব্ধি শূন্য হয়।

$\therefore$ $u$, $v$ ও $w$-র লব্ধি শূন্য।

$\therefore$ বস্তুকণাটি স্থির থাকিবে।

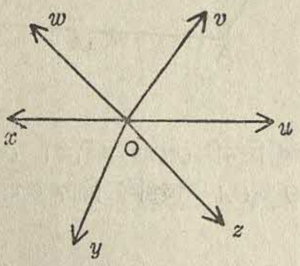
**অনুসিদ্ধান্ত:** কোন বস্তুকণার যদি এমন দুইটি বেগ থাকে যে, একটি ত্রিভুজ $ABC$-র ক্রমানুসারে গৃহীত $\overline{AB}$ ও $\overline{BC}$ বাহু দ্বারা দিকে ও মানে উহাদিগকে সূচিত করা যায়, তাহা হইলে উহাদের লব্ধি $\overline{AC}$ বাহু দ্বারা দিকে ও মানে সূচিত হইবে।

**1·9. বেগ-বহুভুজ (Polygon of velocities) প্রতিজ্ঞা:**

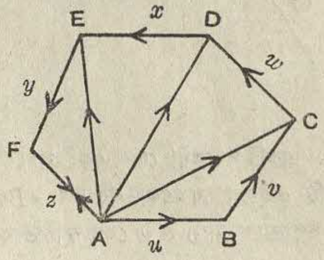
**কোন বস্তুর যদি একই সঙ্গে এমন কয়েকটি বেগ থাকে যে, তাহাদিগকে দিকে ও মানে একটি সীমাবদ্ধ বহুভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত**

**বাহুগুলির দ্বারা সূচিত করা যায়, তবে ঐ বেগগুলির লব্ধি শূন্য হইবে, কাজে কাজেই বস্তুটি স্থির থাকিবে। (If a body possesses simultaneously, some such velocities as can be represented in magnitude and direction by the sides of a closed polygon taken in order, then the resultant of those velocities will be zero and hence the body will be at rest.)**

$O$ বস্তুকণাটির যেন যুগপৎ $u$, $v$, $w$, $x$, $y$ ও $z$—এই কয়টি বেগ আছে। $ABCDEF$ বহুভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ ও $\overline{FA}$ বাহু যেন উহাদিগকে যথাক্রমে সূচিত করে।



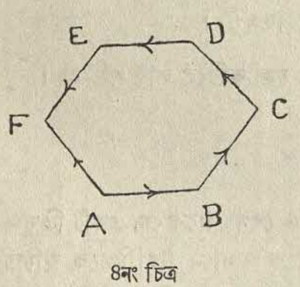

6নং চিত্র




7নং চিত্র

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ঐ বেগগুলির লব্ধি শূন্য এবং সেইজন্য বস্তুকণাটি স্থির থাকিবে।

**প্রমাণঃ** বেগ-ত্রিভুজ প্রতিজ্ঞা অনুসারে $\overline{AB}$ ও $\overline{BC}$-র লব্ধি $\overline{AC}$ ; $\overline{AC}$ ও $\overline{CD}$-র লব্ধি $\overline{AD}$ ; $\overline{AD}$ ও $\overline{DE}$-র লব্ধি $\overline{AE}$ ; $\overline{AE}$ ও $\overline{EF}$-এর লব্ধি $\overline{AF}$. $\therefore$ $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ ও $\overline{EF}$-এর লব্ধি $\overline{AF}$ হইল। সুতরাং, সমস্ত বেগগুলির লব্ধি শেষ পর্যন্ত $\overline{AF}$ ও $\overline{FA}$-এর লব্ধির সমান। কিন্তু $\overline{AF}$ ও $\overline{FA}$ সমান ও বিপরীত। কাজেই, তাহাদের লব্ধি শূন্য। অতএব বেগগুলির সমবেত প্রভাবে বস্তুটি স্থিরই থাকিবে।

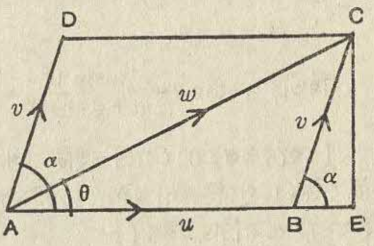



8নং চিত্র

**অনুসিদ্ধান্তঃ** কোনো বস্তু যদি যুগপৎ এমন কয়েকটি বলের অধীন হয় যে, একটি বহুভুজ $ABCDEF$-এর শেষ বাহুটি ছাড়া ক্রমানুসারে গৃহীত $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ ও $\overline{EF}$ বাহু দ্বারা উহাদিগকে সূচিত করা যায়, তবে ঐ বেগগুলির লব্ধি শেষ বাহুটি দ্বারা বিপরীতক্রমে অর্থাৎ $\overline{AF}$ দ্বারা দিকে ও মানে সূচিত হইবে।

**1·10. পরস্পরের সহিত নির্দিষ্ট কোণে সক্রিয় দুইটি বেগের লব্ধির দিক্ ও মান নির্ণয় ( To find the magnitude and direction of the resultant of two velocities acting at a given angle with each other. )**

$A$ বস্তুকণাটি যেন যুগপৎ $u$ ও $v$ বেগের অধীন। $u$ ও $v$ বেগের মধ্যবর্তী কোণ যেন $\alpha$. $\overline{AB}$ ও $\overline{AD}$ যদি যথাক্রমে $u$ ও $v$ বেগকে দিকে ও মানে সূচিত করে, তবে বেগ-সামান্তরিক প্রতিজ্ঞা অনুসারে $ABCD$ সামান্তরিকের কর্ণ $\overline{AC}$ ঐ বেগ-দুইটির লব্ধি ($w$)-কে দিকে ও মানে সূচিত করিবে। $\overline{AC}$ যেন $\overline{AB}$-র সহিত $\theta$ কোণে নত। অর্থাৎ $\angle CAB = \theta$.




9নং চিত্র

$\overline{AC}$-র মান ও দিক্ নির্ণয় করিতে হইবে।

$C$ বিন্দু হইতে $\overline{AB}$-র উপর $\overline{CE}$ যেন লম্ব। তাহা হইলে,

$$\overline{AC}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{CE}^2 = (\overline{AB} + \overline{BE})^2 + \overline{CE}^2$$
$$= \overline{AB}^2 + 2\overline{AB}.\overline{BE} + \overline{BE}^2 + \overline{CE}^2$$
$$= \overline{AB}^2 + 2\overline{AB}.\overline{BE} + \overline{BC}^2 \quad [\because \quad \overline{BE}^2 + \overline{CE}^2 = \overline{BC}^2 ].$$

এখন, $\angle CBE = \angle DAB = \alpha$, বলিয়া $\overline{BE} = \overline{BC} \cos \alpha$

এবং $\overline{BC} = \overline{AD} = v$.

$$\therefore \quad \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + 2\overline{AB}.\overline{BC} \cos \alpha + \overline{BC}^2$$
$$= u^2 + 2uv \cos \alpha + v^2.$$

$$\therefore \quad \mathbf{w^2 = u^2 + v^2 + 2uv \cos \alpha} \ldots \qquad \ldots \qquad (1)$$

দ্বিতীয়ত, $\tan \theta = \tan CAB = \tan CAE$

$$= \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BC} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{BC}}}{\overline{AB} + \overline{BE}}$$

$$= \frac{\overline{BC} \sin \alpha}{\overline{AB} + \overline{BC} \cos \alpha}$$

$$= \frac{v \sin \alpha}{u + v \cos \alpha}. \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2)$$

স্পষ্টত, (1) হইতে লব্ধি $w$-র মান এবং (2) হইতে $\theta$ কোণের মান দ্বারা উহার দিক্ নির্ণয় করা যায়।

**অনুসিদ্ধান্ত 1.** 1·10 অনুচ্ছেদে বর্ণিত $a$ কোণ $=0°$ হইলে,

$$w^2=u^2+v^2+2uv.\cos 0°$$
$$=u^2+v^2+2uv,\quad [\because \cos 0°=1]$$
$$=(u+v)^2.$$
$$\therefore\quad w=u+v.$$

দ্বিতীয়ত, $\tan\theta=\dfrac{v\sin 0°}{u+v\cos 0°}=0,\quad [\because \sin 0°=0]$

[ কোন বস্তুর 0° কোণে দুইটি বেগ থাকার অর্থ একই রেখায় একই মুখে বেগ-দুইটি সক্রিয়। পূর্বেই বলা হইয়াছে এইরূপ দুইটি বেগের লব্ধি তাহাদের সমষ্টি। এখানে সেই সত্যই প্রমাণিত হইল। ]

**অনুসিদ্ধান্ত 2.** $a=180°$ হইলে,

$$w^2=u^2+v^2+2uv\cos 180°$$
$$=u^2+v^2+2uv(-1),\quad [\because \cos 180°=-1]$$
$$=u^2+v^2-2uv$$
$$=(u-v)^2.$$

$\therefore\quad w=u-v$ এবং $\tan\theta=\dfrac{v\sin 180°}{u+v\cos 180°}=0,$

$[\because \sin 180°=0].$

[ দুইটি বেগের মধ্যে 180° কোণ থাকার অর্থ উহারা পরস্পর বিপরীতমুখী। এইভাবে এক রেখায় বিপরীতমুখী দুই বেগের লব্ধি তাহাদের অন্তরের সমান। ]

**অনুসিদ্ধান্ত 3.** $a=90°$ হইলে,

$$w^2=u^2+v^2+2uv\cos 90°$$
$$=u^2+v^2+2uv\times 0,\quad [\because \cos 90°=0]$$
$$=u^2+v^2.$$
$$\therefore\quad w=\sqrt{u^2+v^2}.$$

দ্বিতীয়ত, $\tan\theta=\dfrac{v\sin 90°}{u+v\cos 90°}=\dfrac{v}{u}.$

**অনুসিদ্ধান্ত 4.** (a) $w^2=u^2+v^2+2uv\cos a$ বলিয়া, $\cos a$ যখন বৃহত্তম তখন $w$ বা লব্ধির মান বৃহত্তম।

কিন্তু $\cos a$-র বৃহত্তম মান $=1$ ;

∴ $u$ ও $v$-র লব্ধির বৃহত্তম মান

$$w = \sqrt{u^2+v^2+2uv}$$
$$= u+v.$$

**অর্থাৎ বেগ-দুইটির সমষ্টিই উহাদের লব্ধির বৃহত্তম মান।**

(b) আবার $\cos \alpha$ যখন ক্ষুদ্রতম অর্থাৎ $-1$, তখন $w$-র মানও ক্ষুদ্রতম।

$\cos \alpha$-র ক্ষুদ্রতম মান $= -1$.

∴ সেক্ষেত্রে $w = \sqrt{u^2+v^2-2uv}$
$$= u-v.$$

**অর্থাৎ বেগ-দুইটির অন্তরই উহাদের ক্ষুদ্রতম লব্ধি।**

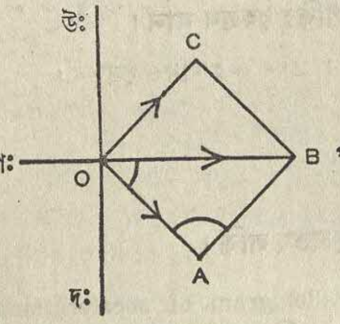
**1·11. ত্বরণ-সামান্তরিক (Parallelogram of accelerations) সূত্রঃ সমবিন্দু দুইটি ত্বরণকে যদি ঐ বিন্দু হইতে অঙ্কিত একটি সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু দ্বারা দিকে ও মানে সূচিত করা যায়, তবে ঐ সামান্তরিকের উক্ত সন্নিহিত বাহুদ্বয়ের ছেদবিন্দু হইতে অঙ্কিত কর্ণ দ্বারা দিকে ও মানে উহাদের লব্ধি সূচিত হইবে। (If two concurrent accelerations can be represented in magnitude and direction by two adjacent sides of a parallelogram, then their resultant will be represented in magnitude and direction by the diagonal drawn from the meeting point of those two adjacent sides.)**

ত্বরণ বলিতে আমরা একক সময়ে বেগের বৃদ্ধি বা মন্দনই বুঝি। প্রতি একক সময়ে ঐ পরিমাণ বেগ বাড়ে বা কমে, তাই উহা ত্বরণ। তাহা হইলে, দুইটি ত্বরণ হইল দুইটি বেগ। অতএব বেগের বেলায় যদি সামান্তরিক প্রতিজ্ঞা সত্য হয়, তবে ত্বরণের বেলাতেও ঐ প্রতিজ্ঞা সত্য।

**1·12. বেগ ও ত্বরণের সংশ্লেষ (Composition of velocity and acceleration)ঃ** বেগ ও ত্বরণ একই রেখায় সক্রিয় হইলে আমরা তাহাদের সংশ্লেষ বা একত্রীকরণের জন্য $v = u + ft$ সূত্রটি জানি। কিন্তু বেগ ও ত্বরণ যখন ভিন্ন রেখায় সক্রিয় হয় তখন কি হইবে, তাহা এখনও জানি না।

পূর্বে বলিয়াছি, ত্বরণ বলিতে একক সময়ে বেগের বৃদ্ধিই বুঝি। বিশেষ একটা সময়ে মোট ত্বরণ মানেও খানিকটা বেগ ব্যতীত আর কিছু নয়। পূর্ববেগের ঐ পরিমাণ বৃদ্ধি বা হ্রাস হয়। পূর্ববেগের সহিত মোট ত্বরণ দ্বারা সূচিত বেগটুকুর সংশ্লেষ করিয়াই আমরা পূর্ববেগের পরিবর্তন নির্ণয় করি। এইরূপ ক্ষেত্রে বেগ ও ত্বরণের বিচারে আমরা ভেক্টরের জন্য বিহিত সমস্ত সূত্রগুলিই প্রয়োগ করিতে পারিব। কয়েকটি উদাহরণের সাহায্যে বিষয়টি বুঝাইতে চেষ্টা করিতেছি ঃ

**উদাহরণ 1.** দক্ষিণ-পূর্বদিকে সেকেণ্ডে 10 ফুট বেগে চলমান একটি বস্তু সমত্বরণের প্রভাবে 5 সেকেণ্ড পর ঠিক পূর্বদিকে $10\sqrt{2}$ ফুট বেগে চলিতে লাগিল। ঐ সমত্বরণের দিক্ ও মান নির্ণয় কর।




10নং চিত্র

বস্তুটি প্রথমে দক্ষিণ-পূর্বদিকে $O$ হইতে যেন $\overline{OA}$ বরাবর এবং 5 সেকেণ্ড পর পূর্বদিকে যেন $\overline{OB}$ বরাবর চলিতেছিল। $\overline{OA}$ সেকেণ্ডে 10 ফুট এবং একই মাপে $\overline{OB}$ যেন সেকেণ্ডে $10\sqrt{2}$ ফুট সূচিত করে। স্পষ্টত, $\overline{OB}$ লব্ধি-বেগ। $OABC$ সামান্তরিক পূর্ণ করিলে ত্বরণের ফলে 5 সেকেণ্ডে মোট বর্ধিত বেগ $\overline{OC}$ দ্বারা সূচিত হইবে।

$$\angle AOB = 45°.$$

$\therefore$ $A$ বিন্দুতে সমকোণবিশিষ্ট $\overline{OA}$ বাহুর উপর যে ত্রিভুজ হয়, তাহারই অতিভুজের মান $10\sqrt{2}$ ফুট। $\overline{OB}$ যেহেতু $10\sqrt{2}$ ফুট, সেইহেতু $\angle OAB = 90°$ এবং সেইজন্যই $\angle AOB = 45° = \angle BOC$.

$\therefore$ $\overline{OA} = \overline{AB} = \overline{OC} = 10$ ফুট।

$\therefore$ 5 সেকেণ্ডে মোট বর্ধিত বেগ উত্তর-পূর্বে সেকেণ্ডে 10 ফুট।

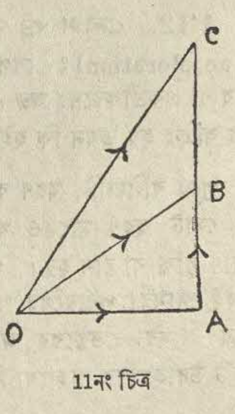
$\therefore$ $v = ft$ সূত্রানুসারে,

এখানে $10 = 5f$ বা $f = 2$ ফুট/সে.²।

$\therefore$ নির্ণেয় ত্বরণের মান 2 ফুট/সে.² এবং দিক্ উত্তর-পূর্ব।

[এখানে লক্ষ্য করিবার বিষয় এই যে, ত্বরণের ফলে লব্ধি-বেগ প্রতিমুহূর্তে $\overline{OA}$ মুখ হইতে উপরের দিকে একটু সরিয়াছে এবং সরিতে সরিতে 5 সেকেণ্ডে উহা $\overline{OB}$ বরাবর হইয়া গিয়াছে।]

**উদাহরণ 2.** একটি বস্তু প্রথমে সেকেণ্ডে $6\sqrt{3}$ ফুট বেগে চলিতেছিল, কিন্তু উহার লম্বদিকে সমত্বরণের ফলে 3 সেকেণ্ড পর উহা বাঁকিয়া সেকেণ্ডে 12 ফুট বেগে চলিতে থাকে। আরও 3 সেকেণ্ড পর উহার বেগ কত হইবে?




11নং চিত্র

বস্তুটি প্রথমে যেন $\overline{OA}$ বরাবর চলিতেছিল এবং 3 সেকেণ্ড পর $\overline{OA}$-র লম্বদিকে $\overline{AB}$ মুখে ত্বরণের ফলে উহা যেন $\overline{OB}$ বরাবর চলিতে থাকে। এখন $\overline{OA}$ ও $\overline{OB}$ যথাক্রমে যেন সেকেণ্ডে

$6\sqrt{3}$ ফুট ও 12 ফুট সূচিত করে। $\angle OAB = 90°$. স্পষ্টতই $OB$ লব্ধি-বেগ। বেগ-ত্রিভুজ প্রতিজ্ঞানুসারে $\overline{AB}$, 3 সেকেণ্ডে মোট বর্ধিত বেগ সূচিত করে।

$$AB = \sqrt{12^2 - (6\sqrt{3})^2} = 6,$$

$v = ft$ সূত্রানুসারে,

$6 = 3f$ অথবা $f = 2$ ফুট/সে.$^2$।

$\therefore$ আরও 3 সেকেণ্ড পরে অর্থাৎ প্রথম হইতে 6 সেকেণ্ড পরে বর্ধিত বেগ $= 6 \times 2$ বা 12 ফুট/সে.

$\overline{AC}$ যেন এই বেগকে সূচিত করে।

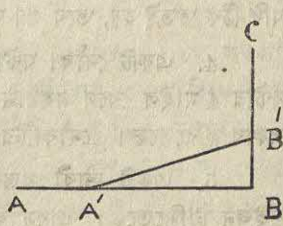
তাহা হইলে, প্রথম হইতে 6 সেকেণ্ড পর $\overline{OC}$ লব্ধি-বেগ সূচিত করিবে।

$$\begin{aligned}\overline{OC} &= \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{AC}^2}\\ &= \sqrt{(6\sqrt{3})^2 + 12^2}\\ &= \sqrt{108 + 144} = \sqrt{252}\\ &= 6\sqrt{7} \text{ ফুট/সে.}\end{aligned}$$

**উদাহরণ 3.** কোন এক বিশেষ মুহূর্তে একটি জাহাজ $A$ অপর একটি জাহাজ $B$ হইতে 10 মাইল পশ্চিমে রহিয়াছে। $A$ পূর্বদিকে ঘণ্টায় 12 মাইল বেগে চলিতেছে এবং $B$ ঘণ্টায় 16 মাইল বেগে উত্তরদিকে চলিতেছে। জাহাজ-দুইটি সবচেয়ে কাছাকাছি যখন আসিবে, তখন তাহাদের মধ্যে কত দূরত্ব থাকিবে?

[P. U. 1942]

মনে কর, $t$ ঘণ্টা পর $A$ জাহাজ $B$ জাহাজের সবচেয়ে কাছে আসে। $A$ এই $t$ ঘণ্টায় $\overline{AB}$ বরাবর $12t$ মাইল গিয়া $A'$ অবস্থানে এবং $B$ উত্তরমুখে $\overline{BC}$ বরাবর 16 মাইল গিয়া যেন $B'$ অবস্থানে আসে।



12নং চিত্র

$\therefore$ $\overline{AA'} = 12t$ মাইল এবং $\overline{BB'} = 16t$ মাইল।

$\overline{AB} = 10$ মাইল,

$\therefore$ $\overline{A'B} = 10 - 12t.$

এখন, $\overline{A'B'}^2 = \overline{A'B}^2 + \overline{BB'}^2.$

$\overline{A'B'}$ দূরত্ব যদি $x$ মাইল হয়, তবে

$$\begin{aligned}x^2 &= (10 - 12t)^2 + (16t)^2\\ &= 100 - 240t + 144t^2 + 256t^2\\ &= 400t^2 - 240t + 100\\ &= (20t - 6)^2 + 64.\end{aligned}$$

$x$ যখন ক্ষুদ্রতম, তখন $(20t-6)$ ক্ষুদ্রতম হইবে, কেননা ডানদিকে $t$ ছাড়া আর সকল মানই নির্দিষ্ট। কাজেই $20t-6$ যখন ক্ষুদ্রতম বা শূন্য, '$x$'-এর মান তখন ক্ষুদ্রতম হইবে।

এখন, $20t-6=0$ হইলে,

$$x^2=64;$$

$$\therefore \quad x=8 \text{ মাইল।}$$

## প্রশ্নমালা 1

1. $u$ ও $v$ উপবেগ-দুইটির মধ্যে কোণ $a$ এবং উহাদের লব্ধি-বেগ $w$ ধরিয়া নিম্নলিখিতগুলির মান নির্ণয় কর :—

(i) $u=18$, $v=6\sqrt{3}$, $a=30°$ ; $w$-র মান কত ?

(ii) $u=4$, $v=3$, $w=5$, $a=$ কত ?

(iii) $u=2$, $v=4$, $w=2\sqrt{7}$, $a=$ কত ?

(iv) $u=v=w$ ; $a=$ কত ?

(v) $u=v=3$ এবং $w=3\sqrt{3}$ ; $a=$ কত ?

2. একটি বস্তুকণার যুগপৎ সেকেণ্ডে $6\sqrt{2}$ ফুট ও সেকেণ্ডে 6 ফুট এই দুইটি বেগ আছে। বেগ-দুইটির মধ্যবর্তী কোণ 45° হইলে, উহাদের লব্ধি কত ?

3. দুই পার হইতে গুণ টানিয়া একটি খালের মধ্য দিয়া একটি নৌকাকে টানিয়া লওয়া হইতেছে। প্রত্যেক গুণ দ্বারা যত বেগে টানা হয় নৌকাটির লব্ধি-বেগও যদি ঠিক ততই হয়, তবে গুণ-দুইটির মধ্যবর্তী কোণের পরিমাণ কত ?

4. একটি নৌকা ঘণ্টায় 3 মাইল বেগে পূর্বদিকে যখন চলমান ঠিক সেই সময় ঘণ্টায় 4 মাইল বেগে বহমান বাতাস আসিয়া নৌকাটির পালে উত্তরাভিমুখে বেগ সঞ্চার করিতেছে। নৌকাটির লব্ধি-বেগের মান কত হইবে ?

5. একটি ভারী বস্তুর একটা বিন্দুতে দুইখণ্ড দড়ি বাঁধিয়া দুই দিক্ হইতে দুইজন টানিতেছে। প্রথম ব্যক্তি সেকেণ্ডে 6 ফুট বেগে এবং দ্বিতীয় ব্যক্তি সেকেণ্ডে 12 ফুট বেগে এমনভাবে টানে যে, প্রথম ব্যক্তির দড়িটির সহিত সমকোণে বস্তুটি সম্মুখে সরিতেছে। দুইটি দড়ির মধ্যবর্তী কোণের পরিমাণ কত এবং বস্তুটি কত বেগে সরিতেছে ?

6. মাঠের উত্তরদিক্ হইতে সেকেণ্ডে 40 ফুট বেগে নিজ গোলের দিকে একটা বল আসিতে দেখিয়া একজন খেলোয়াড় সোজা পূর্বদিকে সেকেণ্ডে $40\sqrt{3}$ ফুট বেগে বলটি শুট্ করে। বলটি কোন্ দিকে কত ফুট বেগে বাহির হইয়া যাইবে ?

7. ঘণ্টায় 10 মাইল বেগে উর্ধ্বগামী একটি বেলুন 20 সেকেণ্ডে বায়ুবেগে

অনুভূমিক রেখায় 100 গজ দূরে নীত হয়। একটি চিত্র অঙ্কন করিয়া বেলুনটির গতিপথ প্রত্যক্ষ কর। [ ক. বি. প্র. 1911 ]

8. কোন নদীর স্রোতের লম্বাভিমুখে এবং স্রোতের দ্বিগুণ বেগে একটি নৌকা চালিত হয়। নৌকাটি যদি যাত্রাস্থল হইতে $1\frac{1}{2}$ মাইল দূর বরাবর ঠিক বিপরীত পারে পৌছায়, তবে ঐ নদীর প্রস্থ কত? [ ক. বি. প্র. 1912 ]

9. $u$ ও $v$ এই দুইটি বেগের লব্ধি $U$ এবং ঐ লব্ধি $u$ বেগের সহিত $a$ কোণ উৎপন্ন করে। এখন $u$ বেগের $U$ পরিমাণ বৃদ্ধি হয় এবং $v$ যদি অপরিবর্তিতই থাকে, তবে প্রমাণ কর যে, নূতন লব্ধি-বেগটি $u$ বেগের সহিত $\frac{a}{2}$ কোণ উৎপন্ন করিবে।

[ ক. বি. প্র. 1913 ]

10. সমুদ্রপথে 15 মাইল বেগে উত্তরদিকে চলমান একটি জাহাজের ( সমতল ) ডেকের উপর উহার দৈর্ঘ্যের লম্বাভিমুখে সেকেণ্ডে 7 ফুট বেগে এক ব্যক্তি হাঁটিতেছে; একটি চিত্র অঙ্কন করিয়া উত্তরদিকের সহিত লোকটির গতিপথের কোণ প্রদর্শন কর এবং সমুদ্রের তুলনায় লোকটির বেগ নির্ণয় কর। [ ক. বি. প্র. 1913 ]

11. স্থির জলে ঘণ্টায় 6 মাইল বেগ-সম্পন্ন একটি নৌকার মুখ কোন্ দিকে রাখিলে নৌকাটি ঘণ্টায় 4 মাইল বেগে বহমান একটি নদীর এপার হইতে ওপারে লম্বভাবে পাড়ি দিতে পারিবে? [ ক. বি. প্র. 1914 ]

12. ঘণ্টায় 2 মাইল বেগে বহমান একটি নদীর এপার হইতে ওপারের দিকে লম্বভাবে ঘণ্টায় 6 মাইল বেগে একটি নৌকা চালিত হইতেছে। নদীর প্রস্থ যদি 300 ফুট হয়, তবে নৌকাটি যাত্রাস্থলের সোজা অপর পার হইতে কত ফুট দূরে গিয়া পড়িবে? [ ক. বি. প্র. 1915 ]

13. একটি নদী সেকেণ্ডে 2 ফুট বেগে বহিতেছে। স্রোতের সহিত লম্বভাবে নদীটি পার হইতে হইলে একজন সাঁতারুকে সেকেণ্ড 3 ফুট বেগে কোন্ দিকে সাঁতার কাটিতে হইবে। নদীটি যদি 100 ফুট চওড়া হয়, তবে উহা পার হইতে সাঁতারুর কত সময় লাগিবে? [ প. ম. স্কু. ফা. 1954 ]

14. উত্তরদিকে ঘণ্টায় 10 মাইল বেগে একখানি ট্রামগাড়ী হইতে এমনভাবে একটি বল ছুঁড়িয়া দেওয়া হইল যে, উহা পূর্বদিকে একই বেগে চলিতে লাগিল। বলটিকে কোন্ দিকে কত বেগে ছুঁড়িয়া দেওয়া হইয়াছিল?

15. ঘণ্টায় 300 মাইল অনুভূমিক বেগে ধাবমান একটি বিমানপোত হইতে 500 গজ নিম্নে একটি দুর্গের চূড়ার প্রতি মেশিনগানে গুলি ছোঁড়া হইতেছে। গুলি যদি উল্লম্বভাবে সেকেণ্ডে 1200 ফুট বেগে ধাবিত হয়, তবে দুর্গচূড়ার অনুভূমিক রেখায় কোন্ দিকে কতদূর লক্ষ্য স্থির করা হইয়াছিল?

16. একটি বস্তু প্রথম সেকেণ্ডে 4 ফুট বেগে চলিতেছিল। 2 সেকেণ্ড পর দেখা

গেল যে, উহা আগে যেদিকে চলিতেছিল তাহার লম্বদিকে সেকেণ্ডে 4 $\sqrt{3}$ ফুট বেগে চলিতেছে। বস্তুটি সমত্বরণে চলিলে কোন্ দিকে উহার কত ত্বরণ?

17. সেকেণ্ডে 6 $\sqrt{3}$ ফুট প্রারম্ভিক বেগে চলমান একটি বস্তু উহার প্রারম্ভিক বেগের লম্বাভিমুখে 2 ফুট/সে.$^2$ সমত্বরণের অধীন। 3 সেকেণ্ড পর উহার কোন্ দিকে কত বেগ হইবে?

18. 81 ফুট উঁচু স্তম্ভের উপর হইতে সেকেণ্ডে 40 ফুট বেগে অনুভূমিক রেখায় একটি ঢিল ছুঁড়িয়া দেওয়া হইল। স্তম্ভটির পাদদেশ হইতে কতদূরে ঢিলটি মাটিতে পড়িবে?

19. অনুভূমিক রেখায় সেকেণ্ডে 96 $\sqrt{3}$ ফুট বেগ-সম্পন্ন একটি বিমান হইতে পতিত একটি বস্তু 3 সেকেণ্ড পর কোন্ দিকে কত বেগ লাভ করিবে?

20. একটি বস্তু যুগপৎ 4 ফুট/সে.$^2$ ও 2 ফুট/সে.$^2$ এই দুইটি ত্বরণের অধীন। এই দুই ত্বরণের গতিমুখের অন্তর্বর্তী কোণ যদি 60° হয়, তবে 3 সেকেণ্ড পর বস্তুটির বেগ কত হইবে? ঐ সময়ে ত্বরণ থামিয়া গেলে বস্তুটি তাহার পর কত সময়ে 18 $\sqrt{7}$ ফুট অতিক্রম করিবে?

21. এক ব্যক্তি $t$ সময়ে $b$ প্রস্থ-সম্পন্ন স্রোতহীন একটি নদী পার হয়। ঐ নদীতে যখন স্রোত থাকে তখন উহা পার হইতে তাহার $t'$ সময় লাগে। যদি $t' > t$ হয়, তবে নদীর স্রোতের বেগ নির্ণয় কর। [ প. ম. স্কু. ফা. 1964 ]

[ সংকেত : লোকটির বেগ $\frac{b}{t}$ একক। $t'$ সময়ে এই বেগে $\frac{bt'}{t}$ দূরত্ব অতিক্রান্ত হয়। আবার নদীর বেগ যেন $u$, $t'$ সময়ে $u$ বেগে $ut'$ দূরত্ব অতিক্রান্ত হয়। $\therefore \left(\frac{bt'}{t}\right)^2 = (ut')^2 + b^2$ হইতে $u$-এর মান নির্ণয় কর। ]

22. 176 গজ প্রশস্ত একটি নদী ঘণ্টায় 5 মাইল বেগে বহমান। ঘণ্টায় 3 মাইল বেগে সাঁতার কাটিয়া এক ব্যক্তি যথাশীঘ্র অপর পারে পৌছিতে চাহিলে, স্রোতের মুখের তুলনায় কোন্ দিকে সাঁতার কাটিবে? ঐভাবে কতক্ষণে এবং অপর পারে কোথায় গিয়া নদী পার হইবে? [ B. H. U. 1954 ]

23. একটি নদী ঘণ্টায় 3 মাইল বেগে বহিতেছে এবং উহার প্রস্থ 440 ফুট। এক ব্যক্তি যদি ঘণ্টায় 5 মাইল বেগে তাহার নৌকাটি চালাইতে পারে, তবে সোজাসুজি নদী পার হইবার জন্য তাহাকে নৌকার মুখ কোন্ দিকে রাখিতে হইবে এবং এইভাবে কত সময়ে সে নদী পার হইবে? [ W. B. H. S. 1960, 1969 ]

24. সেকেণ্ডে 30 ফুট বেগে উল্লম্বদিকে চলমান একটি বেলুন বাতাসের বেগে অনুভূমিক দিকে 2 সেকেণ্ডে 80 ফুট দূরে নীত হয়। বেলুনের প্রকৃত বেগের মান ও দিক্ নির্ণয় কর।

25. দুইটি বেগ $u_1$ ও $u_2$ এরূপ একটি কোণে সক্রিয় যে, উহাদের লব্ধিও $u_1$. দেখাও যে, $u_1$-কে দ্বিগুণ করিলে নূতন লব্ধি $u_2$-এর সহিত সমকোণে নত হইবে।

26. নদীতে কোন স্রোত না থাকিলে এক ব্যক্তি 100 গজ প্রশস্ত একটি নদী 4 মিনিটে পার হয়, কিন্তু নদীতে স্রোত থাকিলে একই নদী 5 মিনিটে পার হয়। নদীর স্রোতের বেগ নির্ণয় কর।

27. একটি নদীর স্রোতের বেগ $u$ এবং এক ব্যক্তি $v$ বেগে নৌকা বাহিতে পারে ($v > u$). নদীর ঠিক অপর পারে সোজাসুজি পৌঁছিতে হইলে তাহাকে কোন্ অভিমুখে নৌকা বাহিতে হইবে? সবচেয়ে কম সময়ে পার হইতে হইলেই বা তাহাকে কোন্ অভিমুখে নৌকা বাহিতে হইবে? দুইক্ষেত্রে যে সময় লাগে তাহাদের অন্তর নির্ণয় কর।

## দ্বিতীয় অধ্যায়

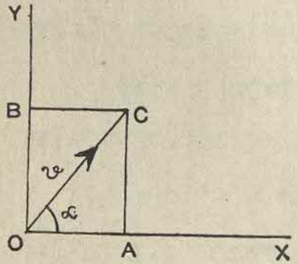
# বেগ-বিশ্লেষণ ও আপেক্ষিক বেগ

## ( Resolution of velocities and Relative velocity )

**2·1. বেগের বিশ্লেষণ (Resolution of velocities) :** প্রথম অধ্যায়ে সামান্তরিক-সূত্রের সাহায্যে সমবিন্দু দুইটি বেগের সংশ্লেষ-প্রণালী বিবৃত হইয়াছে। ঐ সামান্তরিক-সূত্রের সাহায্যেই আবার একটি বেগকে দুইটি উপবেগে পরিণত করা যায়। এইরূপ দুইটি উপবেগের মধ্যে যে-কোন কোণ লওয়া যাইতে পারে। তবে, উহাদের মধ্যে এক সমকোণ ধরিয়া বিশ্লেষণ করাই সুবিধাজনক।

একাধিক বেগকে এইভাবে পরস্পরের লম্ব দুইটি সরলরেখা বরাবর বিশ্লেষণ করিলে, অনায়াসে ঐ বেগগুলির লব্ধি নির্ণয় করা যায়। সেই কারণে দুইটি লম্বচ্ছেদী রেখায় একটি বেগকে বিশ্লেষণ করার পদ্ধতি আলোচনা করা যাইতেছে।

**2·2. একটি বেগকে পরস্পরের লম্বদিকে দুইটি উপবেগে বিশ্লেষণ (Resolution of a velocity in two mutually perpendicular directions) :** একটি বস্তুকণা যেন $\overrightarrow{OC}$ মুখে $v$ বেগে চলমান। এই $v$ বেগকে $\overline{OC}$ দ্বারা দিকে ও মানে সূচিত করা হইল। এখন ঐ $v$ বেগকে পরস্পরের উপর লম্ব যে-কোন দুইটি দিকে দুইটি উপবেগে বিশ্লেষণ করিতে হইবে।




13নং চিত্র

$O$ বিন্দু দিয়া $\overline{OC}$-এর সহিত $\alpha$ কোণে নত যে-কোন একটি $\overrightarrow{OX}$ রেখা লইয়া উহার লম্বদিকে $\overrightarrow{OY}$ রেখা অঙ্কন করা হইল। তাহার পর $C$ হইতে $\overrightarrow{OX}$ ও $\overrightarrow{OY}$-এর উপর যথাক্রমে $\overline{CA}$ ও $\overline{CB}$ লম্ব অঙ্কন করা হইল। তাহা হইলে, অঙ্কন অনুসারে, $OACB$ একটি সামান্তরিক হইল এবং সেই কারণে সামান্তরিক-সূত্র অনুসারে, $\overline{OC}$-সূচিত বেগ হইল $\overline{OA}$ ও $\overline{OB}$ সূচিত উপবেগ-দুইটির লব্ধি।

স্পষ্টত, $\overline{OA} = \overline{OC} \cos \alpha$ এবং $\overline{OB} = \overline{AC} = \overline{OC} \sin \alpha$.

$\therefore$ $\overline{OA}$ সূচিত উপবেগের মান $= v \cos \alpha$.

এবং $\overline{OB}$ সূচিত উপবেগের মান $= v \sin \alpha$. [ কারণ $\overline{OC} = v$ ]

ইহা হইতে দেখা যায় যে, $v$ বেগ ও $\alpha$-এর মান জানা থাকিলে, $v$ বেগকে সহজেই পরস্পর লম্ব $v \cos \alpha$ ও $v \sin \alpha$, এই দুইটি উপবেগে বিশ্লেষণ করা যায়।

উদাহরণস্বরূপ, $v = 10$ সে.মি./সে. হইলে,

$(i)$ যখন, $\alpha = 30°$, তখন উপবেগদ্বয় যথাক্রমে

$$v \cos 30° = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ বা } 5\sqrt{3} \text{ সে.মি./সে.}$$

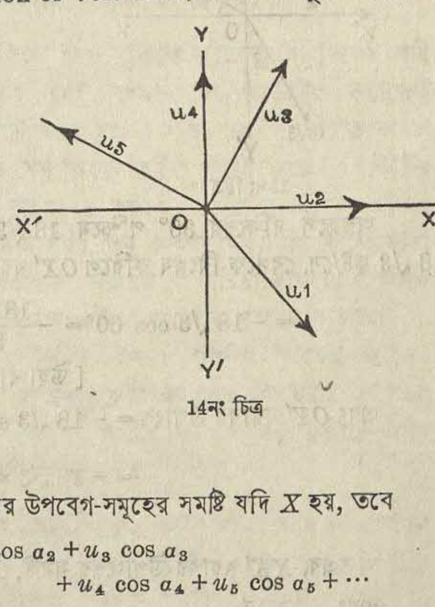
ও $v \sin 30° = 10 \cdot \frac{1}{2}$ বা 5 সে.মি./সে.

এবং $(ii)$ যখন $\alpha = 45°$, তখন উপবেগদ্বয় যথাক্রমে

$$v \cos \alpha = 10 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ বা } 5\sqrt{2} \text{ সে.মি./সে.}$$

ও $v \sin \alpha = 10 \cdot \frac{1}{2}$ বা $5\sqrt{2}$ সে.মি./সে.

**2·3. বেগের বিশ্লেষণ দ্বারা লব্ধি-বেগ নির্ণয় (Determination of the resultant by resolution of velocities) :** $O$ বিন্দুতে অবস্থিত বস্তুকণাটি যেন যুগপৎ $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 \ldots$ প্রভৃতি বেগের অধীন। $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 \ldots$ প্রভৃতি বেগগুলির লব্ধি নির্ণয় করিতে হইবে।




14নং চিত্র

$O$ বিন্দু দিয়া পরস্পর লম্বচ্ছেদী $\overleftrightarrow{XX'}$ ও $\overleftrightarrow{YY'}$, এই দুইটি রেখা টানা হইল। ধরা যাক, $O$ বিন্দুতে $\overleftrightarrow{XX}$-এর সহিত $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5$ প্রভৃতি বেগগুলির অভিমুখ যথাক্রমে $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \ldots$ প্রভৃতি কোণে নত।

তাহা হইলে,

$\overleftrightarrow{XOX'}$ রেখায় উল্লিখিত বেগগুলির উপবেগ-সমূহের সমষ্টি যদি $X$ হয়, তবে

$$X = u_1 \cos \alpha_1 + u_2 \cos \alpha_2 + u_3 \cos \alpha_3 + u_4 \cos \alpha_4 + u_5 \cos \alpha_5 + \cdots$$

এবং $\overleftrightarrow{YOY'}$ রেখায় ঐ বেগগুলির উপবেগ-সমূহের সমষ্টি যদি $Y$ হয়, তবে

$$Y = u_1 \sin \alpha_1 + u_2 \sin \alpha_2 + u_3 \sin \alpha_3 + u_4 \sin \alpha_4 + u_5 \sin \alpha_5 + \cdots\cdots$$

এখন $X$ ও $Y$ পরস্পর লম্ব।

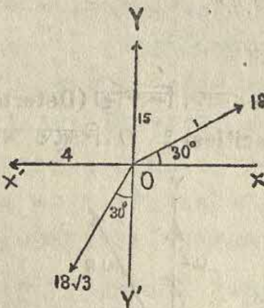
$\therefore$ নির্ণেয় লব্ধি-বেগ $= \sqrt{X^2 + Y^2}$.

এবং লব্ধি-বেগ $XX'$ রেখার সহিত $\theta$ কোণে নত হইলে $\tan \theta = \frac{y}{x}$.

এইভাবে পরস্পর লম্ব দুইটি রেখায় যে-কোন-সংখ্যক বেগের উপাংশ লইয়া অনায়াসে ঐ বেগগুলির লব্ধি নির্ণয় করা যায়।

**উদাহরণ:** একটি বস্তুর উপর উত্তরদিকে সেকেণ্ডে 15 ফুট, পূর্বদিকের উত্তরে 30° কোণে সেকেণ্ডে 18 ফুট, দক্ষিণদিকের পশ্চিমে 30° কোণে সেকেণ্ডে $18\sqrt{3}$ ফুট এবং পশ্চিমদিকে সেকেণ্ডে 4 ফুট বেগ যুগপৎ সক্রিয়। বেগগুলির লব্ধি নির্ণয় কর।

উত্তর-দক্ষিণ এবং পূর্ব-পশ্চিম বরাবর যথাক্রমে $YOY'$ এবং $XOX'$ এই দুইটি লম্বচ্ছেদী রেখা। এই দুই রেখা বরাবর পূর্বের 30° উত্তরে 18 ফুট/সে. বেগকে বিশ্লেষ করিলে,



15নং চিত্র

$OX$ বরাবর উপাংশ

$$=18\cos 30^\circ = \frac{\overset{9}{\cancel{18}} \times \sqrt{3}}{\cancel{2}} = 9\sqrt{3}.$$

$OY$ বরাবর উপাংশ $=18\sin 30^\circ = \frac{18}{2} = 9.$

অনুরূপে দক্ষিণের 30° পশ্চিমে $18\sqrt{3}$ ফুট/সে. অর্থাৎ পশ্চিমের 60° দক্ষিণে $18\sqrt{3}$ ফুট/সে. বেগকে বিশ্লেষ করিলে $OX'$ বরাবর উপাংশ

$$= -18\sqrt{3}\cos 60^\circ = -\frac{18\sqrt{3}}{2} = -9\sqrt{3}$$

[উহা বামমুখী বলিয়া $-9\sqrt{3}$ ধরিতে হইবে।]

এবং $OY'$ বরাবর উপাংশ $= -18\sqrt{3}\sin 60^\circ - 9$

$$= -\cancel{18}\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} = -27,$$

[নিম্নমুখী বলিয়া ইহাও ঋণাত্মক।]

অতএব, $XX'$ বরাবর উপাংশের সমষ্টি, $X = 9\sqrt{3} - 9\sqrt{3} - 4 = -4,$

এবং $YY'$ … … … $Y = 15 + 9 - 27 = -3.$

$\therefore$ লব্ধি $R = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = 5$ ফুট/সে.।

**2·4. আপেক্ষিক বেগ (Relative velocity):** পূর্বেই বলা হইয়াছে কোন একটা অবস্থান বুঝিতে গেলে কার্তেজীয় অক্ষযুগলের মত স্থির একটা কাঠামোর প্রয়োজন। সাধারণভাবে স্থির পরিবেশের সহিত তুলনা দ্বারাই বস্তুবিশেষের অবস্থান বা উহার একটি অবস্থান হইতে অন্য একটি অবস্থানে স্থানান্তরের ধারণা করা যায়। সুতরাং অবস্থান তথা অবস্থান-পরিবর্তন, স্থির একটি কাঠামোর নিরিখেই

নিরূপিত বা পরিমিত হয়। সেই হিসাবে অবস্থান-পরিবর্তন-মাত্রই আপেক্ষিক। উদাহরণস্বরূপ, একটি গাড়ী যদি হাওড়া স্টেশন হইতে বর্ধমান স্টেশনে অবস্থান-পরিবর্তন করে, তবে ধরিয়া লইতে হইবে হাওড়া স্টেশনটি উহার পরিবেশের তুলনায় স্থিরই আছে। গাড়ীটার মত উহা এদিকে ওদিকে কোন দিকেই স্থান-পরিবর্তন করিতেছে না। এইরূপ ক্ষেত্রে সেই হাওড়া স্টেশনের স্থির অবস্থানটির সাপেক্ষেই বর্ধমান পর্যন্ত গাড়ীটির সরণ ঘটিল এবং সেই সরণের হার দ্বারাই গাড়ীটির বেগ নির্ণয় করা সম্ভব হইতে পারে। এইভাবে কোন-না-কোন স্থির একটা অবস্থান বা কাঠামোর সহিত তুলনা ভিন্ন না যায় অবস্থান নির্ণয় করা, না যায় এক অবস্থান হইতে অন্যতর অবস্থান পর্যন্ত সরণ সম্বন্ধে ধারণা করা। কাজেই স্থির একটা কাঠামোর সাপেক্ষেই বেগের ধারণা জন্মে। নিরপেক্ষ বেগ মানুষের কল্পনার বাহিরে। সেই হিসাবে বেগমাত্রই আপেক্ষিক। তবে তাহা স্থির একটা কাঠামোর পরিপ্রেক্ষিতেই আপেক্ষিক।

কিন্তু যাহার তুলনায় বা পরিপ্রেক্ষিতে বেগ বুঝিতে হইবে তাহা নিজেই যদি বেগবান হয় তবে অবস্থাটা কি হইবে? সেই বর্ধমানগামী গাড়ীটির কথাতেই ফিরিয়া আসা যাক। তুরন্ত বেগে গাড়ীটি যখন ধাইয়া যায় তখন গাড়ীতে বসিয়া মনে হয় বাহিরের গাছপালা বাড়ীঘর সব যেন পিছনে ছুটিয়া পলাইতেছে। গাড়ীটির তুলনায় নিশ্চয় তাহারা পিছনে চলিয়া যাইতেছে অর্থাৎ গাড়ীর তুলনায় তাহাদের সরণ হইতেছে। তাহাদের নিজস্ব বেগ নাই সত্য, তবু এ-কথা মিথ্যা নয় যে, তাহারা গাড়ী হইতে ক্রমাগত দূরে সরিয়া যাইতেছে। সরণের বা সরিয়া যাওয়ার হারকেই যদি বেগ বলা হয়, তবে চলন্ত গাড়ীর তুলনায় এই গাছপালার সরণের হারকেই বা বেগ বলিব না কেন? সাধারণ বেগের সহিত ইহার পার্থক্য অবশ্যই আছে। স্থির বস্তুর তুলনায় অন্যতর বস্তুর সরণের হারকে সাধারণতঃ বেগ বলা হয়। এক্ষেত্রে বেগবান বস্তুর তুলনায় অন্যতর বস্তুর বেগ বুঝা যাইতেছে, এই তফাত। এখানে প্রথম বেগের তুলনায় দ্বিতীয়টির বেগকে তাই **আপেক্ষিক বেগ** বলা যায়।

বিশ্ববিশ্রুত আইনস্টাইন সাহেবের ছোটবেলার একটা গল্প আছে। একদিন পিতার সহিত তিনি একটি লিফ্‌টে চড়িলেন, এবং মুহূর্তে উপরের তলায় উঠিয়া পড়িলেন। পিতা তাঁহাকে জিজ্ঞাসা করিলেন, 'কেমন লাগিল?' বালক বলিলেন, —"একটা ঘরে ঢুকিলাম, আর অমনি ওপরের তলাটা নিচে নেমে এল, সেই ঘরের দরজায়।" ভুল হইল কি? সত্যই ভুল হয় নাই। বেগবান লিফ্‌টের তুলনায় উপরের তলার আপেক্ষিক বেগ বিচার করিলে বালক কিছুমাত্র ভুল করে নাই।

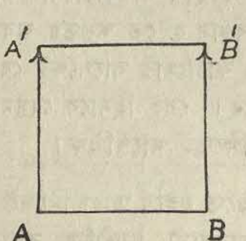
এতক্ষণে আপেক্ষিক বেগ বলিতে কি বুঝায় তাহা নিশ্চয় পরিষ্কার হইয়াছে। এইবার উহার এইরূপ একটা সংজ্ঞা নির্দেশ করা যাইতে পারে:

**দুইটি বস্তু চলমান থাকিলে প্রথমটি হইতে দ্বিতীয়টির প্রতীয়মান**

**বেগকে প্রথমটির তুলনায় দ্বিতীয়টির আপেক্ষিক বেগ** (*Relative velocity*) **বলা হয়।**

অথবা, **দুইটি বস্তু A ও B যদি চলমান হয়, তবে A-র তুলনায় B-র অবস্থান-পরিবর্তনের হারকে A সম্পর্কে B-র আপেক্ষিক বেগ বলা হয়।**

**2·5. সমান ও সমান্তরাল বেগে চলমান দুই বস্তুর আপেক্ষিক বেগঃ** দুইটি বিন্দু $A$ ও $B$ যেন সমান ও সমান্তরাল বেগে চলমান। $A$ যে-সময়ে $A'$ বিন্দুতে পৌছায়, $B$ যেন সেই সময়ে $B'$ বিন্দুতে পৌছায়। $A$ এবং $B$-র বেগ সমান বলিয়া একই সময়ে তাহারা সমান দূরত্ব অতিক্রম করিবে। $\therefore$ $\overline{AA'}$ ও $\overline{BB'}$ সমান ও সমান্তরাল। $\therefore$ $\overline{AB}=\overline{A'B'}$। অর্থাৎ $A$ বিন্দু হইতে $B$-এর দূরত্ব যাহা, $A'$ বিন্দু হইতে $B'$ বিন্দুর দূরত্বও তাহাই রহিল। এইভাবে $A'$ বিন্দুর তুলনায় $B'$ বিন্দুর কোন অবস্থান-পরিবর্তন হয় না বলিয়া, $A$ হইতে দেখিলে $B$ বিন্দুকে সর্বদা স্থির মনে হইবে। কাজেই তাহাদের আপেক্ষিক বেগ হইবে শূন্য।



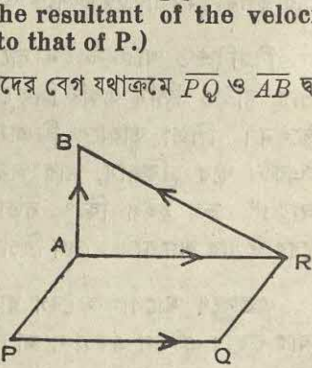
16নং চিত্র

অতএব, **সমান ও সমান্তরাল বেগে চলমান দুই বস্তুর আপেক্ষিক বেগ শূন্য।**

**2·6. আপেক্ষিক বেগ নির্ণয়ের সাধারণ সূত্রঃ একটি বেগবান বিন্দু P-র তুলনায় অপর একটি বেগবান বিন্দু A-র আপেক্ষিক বেগ নির্ণয় করিতে হইলে A বিন্দুর বেগ এবং P বিন্দুর সমান ও বিপরীত একটি বেগের লব্ধি নির্ণয় করিতে হয়। ঐ লব্ধিই P বিন্দুর তুলনায় A বিন্দুর আপেক্ষিক বেগ। (The relative velocity of a moving point A with respect to another moving point P is the resultant of the velocity of A and a velocity equal and opposite to that of P.)**

$P$ এবং $A$ বিন্দু দুইটি যেন বেগবান। উহাদের বেগ যথাক্রমে $\overline{PQ}$ ও $\overline{AB}$ দ্বারা যেন সূচিত হয়। স্পষ্টত, এক একক সময় পরে $P$ বিন্দু $Q$ বিন্দুতে এবং $A$ বিন্দু $B$ বিন্দুতে পৌছিবে। $APQR$ সামান্তরিক অঙ্কিত হইল।

বেগ-ত্রিভুজ প্রতিজ্ঞানুসারে $\overline{AR}$ ও $\overline{RB}$ বেগের লব্ধি $\overline{AB}$ বেগ। এখন $\overline{AR}$ ও $\overline{PQ}$ সমান ও সমান্তরাল বলিয়া তাহাদের আপেক্ষিক বেগ শূন্য। $\therefore$ $\overrightarrow{PQ}$ বরাবর চলমান $P$ বিন্দু



17নং চিত্র

হইতে দেখিলে মনে হইবে যে, $\overrightarrow{AR}$ মুখে $A$ বিন্দুর যেন কোন গতিই নাই। ফলে $P$ বিন্দুর তুলনায় $A$ বিন্দু যেন কেবল $\overline{RB}$ বেগে চলমান,—এইরূপ মনে হইবে। অতএব, $P$ বিন্দুর তুলনায় $\overline{RB}$ বেগই $A$ বিন্দুর আপেক্ষিক বেগ।

কিন্তু বেগ-ত্রিভুজ প্রতিজ্ঞানুসারে, $\overline{RB}$ বেগ $= \overline{RA}$ ও $\overline{AB}$ বেগের লব্ধি,

অর্থাৎ $P$-র তুলনায় $A$ বিন্দুর আপেক্ষিক বেগ $= P$-র সমান ও বিপরীত বেগ $\overline{RA}$ এবং $A$-র বেগ $\overline{AB}$-র লব্ধির সমান।

**2·7. পরস্পরের সহিত নির্দিষ্ট কোণে চলমান দুইটি বস্তুকণার একটির সাপেক্ষে অপরটির আপেক্ষিক বেগ (Relative velocity of one particle relative to another, the two particles moving at a given angle with each other)**ঃ $O$ হইতে $u$ বেগে $\overrightarrow{OP}$ অভিমুখে একটি বস্তুকণা এবং $A$ হইতে $v$ বেগে $\overrightarrow{AB}$ অভিমুখে অপর একটি বস্তুকণা যেন চলমান। $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{OP}$ রেখার মধ্যবর্তী কোণ যেন $\theta$। $\overrightarrow{OP}$-র সমান্তরাল $\overrightarrow{AX}$ রেখা এবং $\overrightarrow{AX}$-এর উপর লম্ব $\overrightarrow{AY}$ রেখা অঙ্কিত হইল।

$\overrightarrow{AX}$ বরাবর $v$-র উপাংশ $= v\cos\theta$, এবং

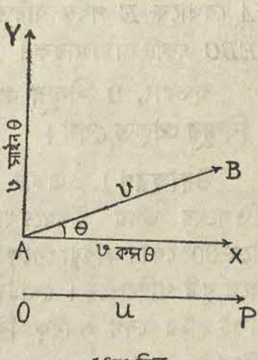
$\overrightarrow{AY}$ বরাবর $v$-র উপাংশ $= v\sin\theta$।

$\therefore$ $u$ বেগে চলমান বস্তুটির তুলনায় $v$ বেগে চলমান বস্তুটির **আপেক্ষিক বেগ** $=$ **$(v\cos\theta - u)$ বেগ ও $v\sin\theta$ বেগের লব্ধি।**

$= \sqrt{(v\cos\theta - u)^2 + (v\sin\theta)^2}$

$= \sqrt{v^2\cos^2\theta + u^2 - 2uv\cos\theta + v^2\sin^2\theta}$

$= \sqrt{u^2 + v^2 - 2uv\cos\theta}.$




18নং চিত্র

**অনুসিদ্ধান্ত 1.** 2·7 অনুচ্ছেদের সূত্রটিতে $\theta = 0$ হইলে বস্তু-দুইটি **একই দিকে চলমান** হইবে। তখন $\cos 0° = 1$ বলিয়া তাহাদের **আপেক্ষিক বেগ** $= \sqrt{(v-u)^2} = v - u$,

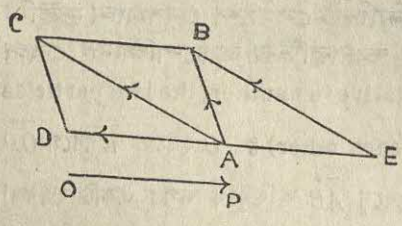
অর্থাৎ বেগ-দুইটির অন্তরই তাহাদের আপেক্ষিক বেগ।

**অনুসিদ্ধান্ত 2.** $\theta = 180°$ হইলে, বস্তু-দুইটি **বিপরীতমুখী**। $\cos 180° = -1$ বলিয়া **তাহাদের আপেক্ষিক বেগ**

$$= \sqrt{(u+v)^2} = u + v,$$

অর্থাৎ বিপরীতমুখী হইলে আপেক্ষিক বেগ তাহাদের বেগের সমষ্টির সমান।

**2·8. দুইটি চলমান বস্তুকণার একটির প্রকৃত বেগ এবং উহার তুলনায় অপরটির আপেক্ষিক বেগ দেওয়া থাকিলে দ্বিতীয়টির প্রকৃত বেগ নির্ণয় (To find the real velocity of a moving particle when its relative velocity with respect to another moving particle and the real velocity of the latter particle is given) :** $O$ বিন্দুর প্রকৃত বেগ যেন $\overline{OP}$ এবং $O$ বিন্দুর তুলনায় $A$ বিন্দুর আপেক্ষিক বেগ যেন $\overline{AC}$। $A$ বিন্দুর প্রকৃত বেগ নির্ণয় করিতে হইবে।

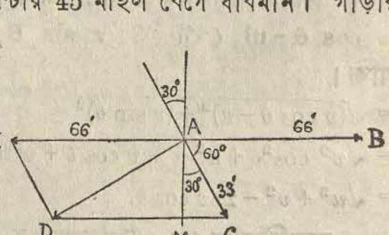


19নং চিত্র

$A$ হইতে $\overline{OP}$-র বিপরীত দিকে উহার সমান্তরাল ও সমান $\overline{AD}$ রেখা অঙ্কিত হইল এবং $\overline{AC}$-কে একটি কর্ণ লইয়া $\overline{AD}$ বাহুযুক্ত $ABCD$ সামান্তরিক পূর্ণ করা হইল। বেগ-সামান্তরিক প্রতিজ্ঞানুসারে $\overline{AC}$ বেগের উপাংশ $\overline{AB}$ ও $\overline{AD}$ বেগ। সুতরাং $\overline{AB}$-ই $A$ বিন্দুর বেগ। এইবার, $\overline{DA}=\overline{AE}$ লইয়া $\overrightarrow{DA}$ রেখাকে $E$ পর্যন্ত বর্ধিত করা হইলে $\overline{AE}$ রেখা $\overline{OP}$ বেগকে স্থচিত করিবে। $AEBC$ একটি সামান্তরিক। স্পষ্টই, $\overline{AE}$ ও $\overline{AC}$ বেগের লব্ধি $\overline{AB}$ বেগ।

**সুতরাং, O বিন্দুর প্রকৃত বেগ ও A বিন্দুর আপেক্ষিক বেগের লব্ধি-ই A বিন্দুর প্রকৃত বেগ।**

**উদাহরণ 1.** একটি মোটর-গাড়ী ঘণ্টায় 45 মাইল বেগে ধাবমান। গাড়ীর গতিপথের উপর উলম্বরেখার সহিত বামে 30° কোণ করিয়া সেকেণ্ডে 33 ফুট বেগে বৃষ্টি পড়িতেছে। মোটর-চালকের নিকট বৃষ্টির বেগ ও দিক্ কিরূপ মনে হইবে ?



20নং চিত্র

ঘণ্টায় 45 মাইল

$= \text{সেকেণ্ডে } \dfrac{45 \times 1760 \times 3}{3600}$ বা 66 ফুট।

$\overline{AB}$ গাড়ীর বেগ ও $\overline{AB}$-র উপর উলম্বরেখার সহিত 30° কোণে নত বৃষ্টির বেগ যেন $\overline{AC}$ দ্বারা স্থচিত। $\overline{AE}$ বেগ $\overline{AB}$-র সমান ও বিপরীত বেগ স্থচিত করে। $\therefore$ $ACDE$ সামান্তরিকের $\overline{AD}$ কর্ণই দিকে ও মানে বৃষ্টির আপাত বেগ ( আপেক্ষিক বেগ ) স্থচিত করিবে। $\overline{AM}$ উলম্বরেখা যেন $\overline{DC}$-কে $M$ বিন্দুতে ছেদ করে।

স্পষ্টতই, $\angle ACD =$ একান্তর $\angle CAB = 60°$.

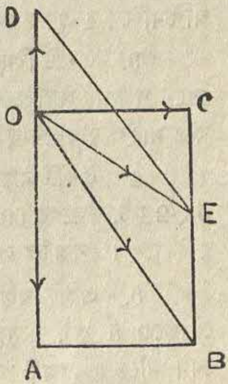
$$\therefore \quad \overline{AD}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{DC}.\overline{CM}$$
$$= 66^2 + 33^2 - 2 \times 66\ \overline{AC} \cos ACD,$$
$$\left[ \because \quad \overline{CM} = \overline{AC} \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{AC}} = \overline{AC} \cos ACD \right]$$
$$= 66^2 + 33^2 - 2 \times 66 \times 33 \cos 60^\circ$$
$$= 66^2 + 33^2 - 2 \times \overset{33}{\not{6}\not{6}} \times 33 \times \frac{1}{\not{2}}$$
$$= 33^2(2^2 + 1 - 2)$$
$$= 33^2.3.$$
$$\therefore \quad \overline{AD} = 33\sqrt{3} \text{ ফুট।}$$

আবার, $\overline{DC} = 66$ ফুট, $\overline{AC} = 33$ ফুট এবং $\overline{AD} = 33\sqrt{3}$ ফুট বলিয়া $\angle DAC = 90^\circ$.

$\therefore$ মোটর-চালকের নিকট মনে হইবে যে, বৃষ্টি যেন উহার প্রকৃত বেগের দিকের সহিত সমকোণে বাঁকিয়া সেকেণ্ডে $33\sqrt{3}$ ফুট বেগে পড়িতেছে।

**উদাহরণ 2.** দক্ষিণমুখে ঘণ্টায় 30 মাইল বেগে চলমান একজন মোটর-আরোহীর নিকট মনে হইতেছে যে, পশ্চিমদিক্ হইতে বায়ু বহিতেছে। কিন্তু মোটরের বেগ কমিয়া ঘণ্টায় 15 মাইল দাঁড়াইলে মনে হয় বায়ু যেন উত্তর-পশ্চিমদিক্ হইতে বহিতেছে। বায়ুর প্রকৃত বেগ ও দিক্ নির্ণয় কর। [B. H. U. 1951]

প্রথমে, $\overline{OA}$ রেখা, মোটরের ঘণ্টায় 30 মাইল বেগ এবং $\overline{OC}$ রেখা, বায়ুর আপাত বেগ সূচিত করিলে, $OABC$ সামান্তরিকের $\overline{OB}$ কর্ণ দিকে ও মানে বায়ুর প্রকৃত বেগ সূচিত করিবে। এখন, মোটরের বেগ যখন ঘণ্টায় 15 মাইল হয় অর্থাৎ পূর্ববেগের অর্ধেক হইয়া যায়, তখন উহার সমান ও বিপরীত বেগ যেন $\overline{OD}$. $\overline{OD}$ = ঘণ্টায় 15 মাইল।



21নং চিত্র

দ্বিতীয়বার, $OBED$ সামান্তরিকের $\overline{OE}$ কর্ণই দিকে ও মানে বায়ুর আপাত (আপেক্ষিক) বেগ সূচিত করিবে। প্রশ্নানুসারে এই বেগ উত্তর-পশ্চিম হইতে আসিতেছে বলিয়া মনে হয়।

$\therefore \angle COE = 45^\circ$ ; কিন্তু $\angle OCE = 90^\circ$,

$\therefore \angle CEO = \angle COE.$

$\therefore \overline{OC} = \overline{CE} = \overline{OD} = 15.$

[ $\because \overline{CE}=\overline{BC}-\overline{BE}=30-\overline{OD}=30-15=15$ ]

$\therefore \overline{AB}=15.$

কিন্তু $\overline{OB}^2=\overline{OA}^2+\overline{AB}^2=30^2+15^2=15^2.5.$

$\therefore \overline{OB}=15\sqrt{5}.$ অর্থাৎ বায়ুর প্রকৃত বেগ ঘণ্টায় $15\sqrt{5}$ মাইল।

উহা দক্ষিণদিকের সহিত $\angle AOB$ কোণ করিয়া বহিতেছে, যেখানে $\tan AOB = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$.

## প্রশ্নমালা 2

1. নিম্নে প্রত্যেক প্রশ্নে একটি বেগ ও উহার সহিত প্রদত্ত কোণে একটি রেখা আছে ; ঐ রেখা বরাবর এবং উহার লম্বাভিমুখে উপাংশ নির্ণয় কর :—

(i) ঘণ্টায় 30 মাইল ও 30°.

(ii) সেকেণ্ডে 6 ফুট ও 0°.

(iii) সেকেণ্ডে 20 ফুট ও 90°.

(iv) মিনিটে 15 মিটার ও 60°.

(v) মিনিটে 15 গজ ও 45°.

(vi) সেকেণ্ডে 10 ফুট ও 135°.

(vii) মিনিটে 3 গজ ও 150°.

(viii) ঘণ্টায় 20 কিলোমিটার ও 120°.

(ix) সেকেণ্ডে $24\sqrt{2}$ ফুট ও 45°.

2. একটি বস্তু উত্তরদিকে 2 একক, দক্ষিণদিকে 3 একক, পূর্বদিকে 3 একক এবং পশ্চিমদিকে 4 একক বেগের অধীন। বস্তুটির লব্ধি-বেগ কত ?

3. একটি বিন্দু হইতে দুই ব্যক্তি যথাক্রমে ঘণ্টায় 12 মাইল ও ঘণ্টায় 5 মাইল বেগে পরস্পর লম্বদিকে মোটর-সাইকেলে যাইতেছে। $2\frac{6}{13}$ ঘণ্টা পর তাহাদের মধ্যে কত মাইল ব্যবধান হইবে ?

4. একটি বস্তুর যুগপৎ উত্তরদিকে সেকেণ্ডে 4 ফুট, উত্তর-পূর্বদিকে সেকেণ্ডে $5\sqrt{2}$ ফুট, উত্তরের 60° পূর্বে সেকেণ্ডে 6 ফুট এবং পশ্চিমদিকে সেকেণ্ডে $3\sqrt{3}$ ফুট বেগ রহিয়াছে। বস্তুটির লব্ধি-বেগ নির্ণয় কর।

5. একটি বস্তুর যুগপৎ উত্তর-পশ্চিমে সেকেণ্ডে $5\sqrt{2}$ ফুট, উত্তরের 30° পূর্বে সেকেণ্ডে 5 ফুট, উত্তর-পূর্বদিকে $5\sqrt{2}$ ফুট/সে., পূর্বের 30° দক্ষিণে $5\sqrt{3}$ ফুট/সে. বেগ আছে। বস্তুটি কত বেগে কোন্ দিকে অগ্রসর হইবে ?

6. একটি বস্তুর যুগপৎ পাঁচটি বেগ, যাহার প্রত্যেকটি '$u$' পরিমাণ এবং

উহাদের প্রত্যেকটি পরবর্তীটির সহিত 30° কোণে সক্রিয়। সুতরাং প্রথম বেগটির সহিত শেষ বেগটির কোণ 120°. উহাদের লব্ধি নির্ণয় কর। [ W. B. H. S. 1965 ]

7. একটি বস্তুর 4 ফু./সে., 8 ফু./সে., 12 $\sqrt{3}$ ফু./সে. এবং 16 ফু./সে. যুগপৎ এই চারিটি বেগ রহিয়াছে। উহাদের প্রথমটির সহিত দ্বিতীয় বেগের কোণ 60°, দ্বিতীয়টির সহিত তৃতীয় বেগের কোণ 90° এবং তৃতীয়টির সহিত চতুর্থ বেগের কোণ 150°. লব্ধি-বেগের মান ও দিক্ নির্ণয় কর। [ W. B. H. S. 1963 ]

8. ঘণ্টায় 12 মাইল বেগে পূর্বদিকে একটি জাহাজ এবং ঘণ্টায় 16 মাইল বেগে উত্তরদিকে আর একটি জাহাজ চলিতেছে। প্রথমটির তুলনায় দ্বিতীয়টির আপেক্ষিক বেগ কত ?

9. বিপরীত দিক্ হইতে যথাক্রমে ঘণ্টায় 40 মাইল ও ঘণ্টায় 60 মাইল বেগে দুইটি গাড়ী পরস্পরের দিকে ধাবিত হইতেছে। প্রত্যেকটি গাড়ী 200 ফুট করিয়া লম্বা হইলে গাড়ী-দুইটি মিলিত হইবার পর কতক্ষণে পরস্পরকে পার হইয়া যাইবে ?

[ C. U. Matric. 1925 ]

10. ঘণ্টায় 2 মাইল বেগে চলমান এক ব্যক্তির নিকট মনে হইতেছে যে, বৃষ্টি উল্লম্বভাবে পড়িতেছে। ঐ ব্যক্তি যখন 4 মাইল বেগে চলিতে শুরু করে, তখন 45° কোণে বৃষ্টি পড়ে বলিয়া মনে হয়। বৃষ্টির প্রকৃত বেগ ও দিক্ নির্ণয় কর।

[ C. U. Matric. 1926 ]

11. ঘণ্টায় 9 মাইল বেগে পূর্বদিকে একটি জাহাজ এবং ঘণ্টায় 12 মাইল বেগে উত্তরদিকে আর একটি জাহাজ চলিতেছে; প্রথমটির তুলনায় দ্বিতীয়টির আপেক্ষিক বেগ কত ? [ C. U. Matric. 1930 ]

12. সেকেণ্ডে 9 ফুট বেগে ধাবমান এক ব্যক্তির নিকট মনে হইতেছে যে, সেকেণ্ডে 12 ফুট বেগে উল্লম্বভাবে বৃষ্টি পড়িতেছে। বৃষ্টির প্রকৃত বেগ নির্ণয় কর।

13. ঘণ্টায় 3 মাইল বেগে চলমান এক ব্যক্তির নিকট মনে হয় যেন উল্লম্বভাবে বৃষ্টি পড়িতেছে, বৃষ্টির আপাত বেগ যদি ঘণ্টায় 3 $\sqrt{3}$ মাইল হয়, তবে উহার বেগের প্রকৃত দিক্ নির্ণয় কর। [ U. P. B. 1953 ]

14. ঘণ্টায় 8 মাইল বেগে উত্তরে বাতাস বহিতেছে; একজন দ্বিচক্রযান-চালকের নিকট ইহা ঘণ্টায় 8 মাইল বেগে বহমান পূবের বাতাস বলিয়া মনে হইতেছে। লোকটির প্রকৃত বেগের দিক্ ও মান নির্ণয় কর। [ C. U. 1947 ]

15. ঘণ্টায় 24 $\sqrt{3}$ মাইল বেগে ধাবমান গাড়ীর দিকে লাইনের লম্বাভিমুখে একটি বস্তু ঘণ্টায় 24 মাইল বেগে আগাইয়া আসিতেছে। গাড়ীর একজন আরোহীর নিকট ঐ বস্তু কোন্ দিক্ হইতে এবং কত বেগে আসিতেছে বলিয়া মনে হইবে ?

16. ঘণ্টায় 3 মাইল বেগে উল্লম্বভাবে বৃষ্টি পড়িতেছে। এক ব্যক্তি যদি ঘণ্টায়

8 মাইল বেগে চলিতে থাকে, তবে তাহার নিকট কোন্ দিক্ হইতে বৃষ্টি পড়িবে বলিয়া মনে হইবে তাহা নির্ণয় কর। [ C. U. 1917 ]

17. ঘণ্টায় 15 $\sqrt{2}$ মাইল বেগে একটি জাহাজ দক্ষিণদিকে এবং ঘণ্টায় 15 মাইল বেগে আর একটি জাহাজ দক্ষিণ-পূর্বদিকে চলিতেছে। প্রথম জাহাজের একজন দর্শকের নিকট দ্বিতীয় জাহাজের আপাত বেগ ও দিক্ কি মনে হইবে তাহা নির্ণয় কর।

[ U. P. B. 1942 ]

18. ঘণ্টায় 3 মাইল বেগে চলমান এক ব্যক্তির নিকট বৃষ্টি উল্লম্বভাবে পড়িতেছে বলিয়া মনে হয়। কিন্তু ঐ ব্যক্তি যদি বেগ বৃদ্ধি করিয়া ঘণ্টায় 5 মাইল বেগে চলিতে থাকে, তবে উল্লম্বরেখার সহিত 30° কোণে বৃষ্টি পড়িতেছে বলিয়া মনে হয়। বৃষ্টির প্রকৃত বেগ নির্ণয় কর। [ U. P. B. 1937 ]

19. ঘণ্টায় 4 মাইল বেগে পূর্বদিকে চলমান এক ব্যক্তির নিকট সোজা উত্তরদিক্ হইতে বায়ু বহিতেছে বলিয়া মনে হয়। কিন্তু ঐ ব্যক্তি যখন তাহার বেগ দ্বিগুণ করে, তখন উত্তর-পূর্বদিক্ হইতে বায়ু বহিতেছে বলিয়া মনে হয়। বায়ুর প্রকৃত বেগ ও দিক্ নির্ণয় কর। [ C. U. I.Sc. 1943 ]

20. সেকেণ্ডে 66 ফুট বেগে উল্লম্বভাবে যখন বৃষ্টি পড়িতেছে, তখন একটি ধাবমান রেলগাড়ীর একজন আরোহীর নিকট মনে হইতেছে যে, বৃষ্টি যেন উল্লম্বরেখার সহিত 45° কোণে হেলিয়া পড়িতেছে। রেলগাড়ীর বেগ ঘণ্টায় কত মাইল?

[ Utkal University, 1948 ]

21. 10 মাইল/ঘণ্টা বেগে উত্তর-পূর্বদিকে একটি জাহাজ চলিতেছে এবং জাহাজের একজন আরোহীর নিকট উত্তরদিক্ হইতে 10 $\sqrt{2}$ মাইল/ঘণ্টা বেগে বাতাস বহিতেছে বলিয়া মনে হইতেছে। বাতাসের প্রকৃত বেগ নির্ণয় কর।

[ Utkal University, 1942 ]

22. একটি জাহাজ পূর্বদিকে চলিতেছে এবং জানা আছে যে, উত্তর-পশ্চিমদিক্ হইতে বাতাস বহিতেছে। কিন্তু মনে হইতেছে যে, বাতাস যেন উত্তর-পূর্বদিক্ হইতে বহিতেছে ; প্রমাণ কর যে, জাহাজের বেগ বাতাসের বেগের সমান।

[ B. H. U. 1940 ]

23. পশ্চিম হইতে পূর্বে ঘণ্টায় $1\frac{1}{2}$ মাইল বেগে ধাবমান একটি নদীর উপর স্রোতের তুলনায় দক্ষিণমুখে একটি নৌকা ঘণ্টায় $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ মাইল বেগে চলিতেছে। পাড়ের উপর স্রোতের সমান্তরাল রেখায় একটি ঘোড়ার গাড়ী ঘণ্টায় 6 মাইল বেগে পশ্চিমমুখে যাইতেছে। ঘোড়ার গাড়ীর আরোহীর নিকট নৌকার আপাত বেগ কত মনে হইবে?

[ W. B. S. F. 1952 ]

24. পশ্চিমদিকে চলমান এক ব্যক্তির নিকট বায়ুপ্রবাহ উত্তর-পশ্চিমদিক্ হইতে আসিতেছে বলিয়া মনে হয়। কিন্তু সে যখন একই বেগে পূর্বদিকে যায়, তখন বায়ুপ্রবাহ

উত্তর-পূর্বদিক্ হইতে আসিতেছে বলিয়া মনে হয়। বায়ু-প্রবাহ এবং ঐ ব্যক্তির বেগের তুলনা কর।

25. ঘণ্টায় 8 মাইল বেগে পূর্বদিকে চলিতেছে এরূপ একটি জাহাজ হইতে বায়ু দক্ষিণ-পূর্বদিক্ হইতে বহিতেছে বলিয়া মনে হয়। কিন্তু ঘণ্টায় 4 মাইল বেগে উত্তর-দিকে চলিতেছে এরূপ একটি জাহাজ হইতে বায়ু পশ্চিমদিক্ হইতে বহিতেছে বলিয়া মনে হয়। বায়ু-প্রবাহের বেগ ও অভিমুখ নির্ণয় কর।

26. একটি বৃত্তের পরিধি বরাবর তুইটি বস্তুকণা যথাক্রমে $v$ ও $2v$ বেগে বিপরীত দিকে গতিশীল। কোন্ অভিমুখে উহাদের আপেক্ষিক বেগ সর্বাধিক এবং সর্বনিম্ন? তখন উহাদের আপেক্ষিক বেগই বা কত?

27. ঘণ্টায় 3 মাইল বেগে চলমান এক ব্যক্তির নিকট বৃষ্টি উল্লম্বভাবে পড়িতেছে বলিয়া মনে হয়। যখন সে একই অভিমুখে ঘণ্টায় 6 মাইল বেগে চলে, তখন বৃষ্টি 30° কোণে পড়িতেছে বলিয়া মনে হয়। বৃষ্টির প্রকৃত বেগ ও অভিমুখ নির্ণয় কর।

28. 3 কি.মি./ঘ. বেগে চলমান এক ব্যক্তির নিকট উল্লম্বভাবে বৃষ্টি পড়িতেছে বলিয়া মনে হয়। ঐ ব্যক্তি যখন বেগ বৃদ্ধি করিয়া 6 কি.মি./ঘ. বেগে হাঁটিতে থাকে তখন মনে হয় বৃষ্টি যেন তাহার সহিত 45° কোণে হেলিয়া পড়িতেছে। বৃষ্টির প্রকৃত দিক্ ও বেগ নির্ণয় কর। [ W. B. H. S. 1970 ]

## তৃতীয় অধ্যায়

# কার্তেজীয় স্থানাঙ্কে বেগ ও ত্বরণের বিশ্লেষণমূলক রূপ

**( Analytical expressions of velocity and acceleration in Cartesian Co-ordinates )**

**3·1. বেগ ও ত্বরণ (Velocity and acceleration) :** ইতিপূর্বে 1·2 ও 1·5 অনুচ্ছেদের আলোচনা হইতে দেখা গিয়াছে যে,

(i) একটি চলমান বস্তুকণার $t$ সময়ে $s$ সরণ হইলে উহার বেগ

$$v = \frac{ds}{dt};$$

এবং (ii) ত্বরণ $f = \frac{dv}{dt};$

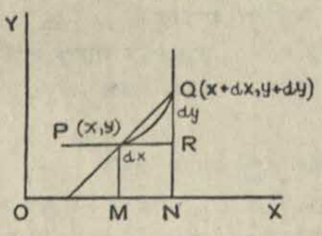
বা (iii) $f = \frac{d^2s}{dt^2};$

বা (iv) $f = \frac{v\,dv}{ds}.$

স্পষ্টত, $\frac{ds}{dt}$-এর মান একটি ধ্রুবক সংখ্যা হইলে $v$ একটি সমবেগ সূচিত করিবে।

অনুরূপে $\frac{dv}{dt}$ বা $\frac{d^2s}{dt^2}$ বা $\frac{v\,dv}{ds}$ একটি ধ্রুবকমান হইলে $f$ হইবে একটি সমত্বরণ।

**3·2. কার্তেজীয় স্থানাঙ্কে বেগ ও ত্বরণ (Velocity and acceleration in Cartesian Co-ordinates) :** ধরা যাক, সরল বা বক্র পথে চলমান একটি বস্তুকণা $t$ সময়ের মাথায় $(x, y)$ স্থানাঙ্কে সূচিত $P$ বিন্দুতে অবস্থিত হয়। $\delta t$ একটি অমিতক্ষুদ্র সময় এবং ঐ সময়ে কণাটির $X$-অক্ষ ও $Y$-অক্ষের সমান্তরাল সরণ যদি যথাক্রমে $\delta x$ ও $\delta y$ হয় তবে $(t+\delta t)$ সময়ের মাথায় ঐ কণাটি $(x+\delta x, y+\delta y)$ সূচিত $Q$ বিন্দুতে পৌঁছাইবে।




22নং চিত্র

স্পষ্টত, $\delta t$ সময়ে কণাটির সরণ $\delta x = \overline{PR}$ হইবে বলিয়া $t$ সময়ের মাথায় $\overrightarrow{OX}$ মুখে কণাটির বেগ $u = \underset{\delta t \to 0}{Lt} \frac{\delta x}{\delta t} = \frac{dx}{dt}.$

অনুরূপে, $t$ সময়ের মাথায় $\overrightarrow{OY}$ মুখে কণাটির বেগ $v = \underset{\delta t \to 0}{Lt} \frac{\delta y}{\delta t} = \frac{dy}{dt}$.

সুতরাং, কণাটির লব্ধি-বেগ $V$ হইবে $\sqrt{u^2+v^2}$ ;

অর্থাৎ $$\mathbf{V} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

এই লব্ধি-বেগ $V$-এর গতিমুখ বা অভিমুখ যদি $X$-অক্ষের সহিত $\theta$ কোণ উৎপন্ন করে তবে,

$$\tan\theta = \frac{u}{v} = \frac{dy}{dt}\bigg/\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx} \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

কিন্তু কণাটির গতিপথ যদি $y = f(x)$ হয়, তবে $\frac{dy}{dx}$ দ্বারা $(x, y)$ বিন্দুতে $f(x)$-এর অন্তরক (derivative) $f'(x)$ বুঝায় এবং তাহা $(x, y)$ বিন্দুতে $f$-এর লেখটির ( অর্থাৎ চলমান কণাটির গতিপথের ) স্পর্শকের নতি সূচিত করে।

সুতরাং, $(x, y)$ বিন্দুতে কণাটির $V$ বেগের অভিমুখ হইবে উল্লিখিত স্পর্শক রেখা বরাবর।

দ্বিতীয়ত, $\overrightarrow{OX}$ মুখে $(x, y)$ ও $(x+\delta x, y+\delta y)$ বিন্দুতে কণাটির বেগ যদি যথাক্রমে $u$ এবং $u+\delta u$ হয়, তবে একই মুখে $\delta t$ সময়ে কণাটির বেগ-পরিবর্তনের হার বা ত্বরণ

$$f_1 = \underset{\delta t \to 0}{Lt} \frac{\delta u}{\delta t} = \frac{du}{dt}$$

কিন্তু $$\frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

$$\therefore \quad \mathbf{f_1} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$$

অনুরূপে, $\overrightarrow{OY}$ মুখে কণাটির ত্বরণ

$$\mathbf{f_2} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d^2y}{dt^2} \quad \cdots \quad \cdots \quad (4)$$

অতএব কণাটির লব্ধি-ত্বরণ $= \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2} \quad \cdots \quad \cdots \quad (5)$

সর্বশেষে, এই লব্ধি-ত্বরণের অভিমুখ $X$-অক্ষের সহিত $\alpha$ কোণে নত ধরিলে,

$$\tan\alpha = \frac{d^2y}{dt^2}\bigg/\frac{d^2x}{dt^2} \quad \cdots \quad \cdots \quad (6)$$

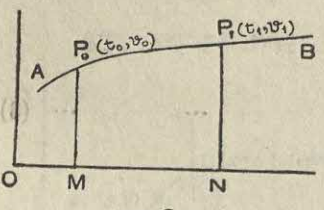
**3·3. সময়-সরণ ও সময়-বেগ লেখ (Time-displacement and Time-velocity graph) ঃ**

(i) **সময়-সরণ লেখ (Time-displacement graph) ঃ** সময় ও সরণ-সম্বলিত যে-কোন সমীকরণকে $s=f(t)$ আকারে লেখা যায়। উহা হইতে প্রত্যেকটি $t$ মানের জন্য একটি $f(t)$ বা $s$ মান পাওয়া যাইবে।

স্বতরাং $t$-এর মানকে ভুজ এবং $s$-এর মানকে কোটি ধরিয়া $s=f(t)$-এর একটি লেখ অঙ্কন করা যাইবে। এই লেখস্থিত যে-কোন $(t, s)$ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের নতি হইবে $\frac{ds}{dt}$. কিন্তু $\frac{ds}{dt}$ দ্বারা $(t, s)$ বিন্দুতে বেগ সূচিত হয়। স্বতরাং সময়-সরণ লেখস্থিত যে-কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(t, s)$ হইতে সহজেই ঐ বিন্দুতে বেগ $\frac{ds}{dt}$ পাওয়া যায়।

(ii) **সময়-বেগ লেখ (Time-velocity graph) ঃ** সময় ও বেগ সম্বলিত যে-কোন সমীকরণকে $v=g(t)$ আকারে লেখা যায়। ঐ সমীকরণ হইতে প্রত্যেকটি $t$ মানের জন্য একটি $g(t)$ বা $v$ মান পাওয়া যাইবে। স্বতরাং $t$-এর মানকে ভুজ ও $v$-এর মানকে কোটি ধরিয়া $v=g(t)$-এর যে-লেখটি অঙ্কন করা যাইবে তাহাই সময়-বেগ লেখ নামে পরিচিত।

স্পষ্টত, এই সময়-বেগ লেখস্থিত যে-কোন বিন্দু $(t, v)$-তে অঙ্কিত স্পর্শকের নতি $\frac{dv}{dt}$; কিন্তু $\frac{dv}{dt}$ দ্বারা $t$ সময়ের মাথায় ত্বরণ সূচিত হয়। স্বতরাং সময়-বেগ লেখস্থিত যে-কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক হইতে সহজেই ঐ বিন্দুতে ত্বরণের মান নির্ণয় করা যায়।



23নং চিত্র

আবার ধরা যাক, একটি সময়-বেগ লেখ $AP_0P_1B$-এর উপর $P_0$ ও $P_1$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(t_0, v_0)$ ও $(t_1, v_1)$. $P_0$ ও $P_1$-এর কোটি যথাক্রমে $MP_0$ এবং $NP_1$ হইলে, নির্দিষ্ট সমাকলের সংজ্ঞা অনুসারে,

$$P_0MNP_1\text{-এর ক্ষেত্রফল} = \int_{t_0}^{t_1} v\,dt.$$

কিন্তু $t$ সময়ে সরণ যদি $x$ হয়, তবে $v=\frac{dx}{dt}$.

$$\therefore\ P_0MNP_1\text{-এর ক্ষেত্রফল} = \int_{t_0}^{t} v\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{dx}{dt}\,dt$$

$$=\int_{t_0}^{t_1} dx = x\Big|_{t_0}^{t_1}$$

$$= x_{t_1} - x_{t_0}$$

$= t_0$ ও $t_1$ সময়ের মধ্যে সরণ।

এইভাবে, সময়-বেগ লেখ-এর $P_0P_1$ চাপ, $P_0$ ও $P_1$ বিন্দুর কোটি এবং $t$-অক্ষদ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলদ্বারা $t_0$ ও $t_1$ সময়ের মধ্যে সরণ সূচিত হয়।

## উদাহরণমালা

**উদা. 1.** সরলরেখায় $t$ সেকেণ্ড সময়ে কোন বস্তুকণার সরণ $x=2t-3$ ফুট হইলে দেখাও যে, কণাটি সমবেগে ধনাত্মক মুখে চলমান। উহা কোন্ বিন্দু হইতে যাত্রা স্রুরু করে এবং কোন্ সময় মূলবিন্দু অতিক্রম করে ?

বস্তুকণাটির বেগ হইল $\dfrac{dx}{dt}=2$ ফুট/সেকেণ্ড। স্রুতরাং বস্তুকণাটি সমবেগে ধনাত্মক অভিমুখে গতিশীল। আবার, যখন $t=0$, তখন $x=-3$ এবং যখন $x=0$, তখন $t=1\frac{1}{2}$। স্রুতরাং বস্তুকণাটি $x=-3$ বিন্দু হইতে যাত্রা স্রুরু করে এবং $1\frac{1}{2}$ sec. সময়ের মাথায় মূলবিন্দুকে অতিক্রম করে।

**উদা. 2.** কোন বস্তুকণার সরণ $x=(t^2-3t+2)$ ফুট হইলে, (i) উহার যাত্রা-মুহূর্তে বেগ কত ? (ii) কখন উহার সরণ $=0$ ? (iii) কখন উহার বেগ ঋণাত্মক এবং কখনই বা উহার বেগ ধনাত্মক হইবে ? চিত্রদ্বারা ব্যাখ্যা কর।

এখানে বেগ $=\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{d}{dt}(t^2-3t+2)=2t-3.$

(i) স্পষ্টত, যাত্রার স্রুরুতে যখন $t=0$, তখন $x=2$ এবং বেগ $=-3$ ফুট প্রতি সেকেণ্ডে।

স্রুতরাং বস্তুকণাটি মূলবিন্দুর দিকে চলিতে স্রুরু করে।

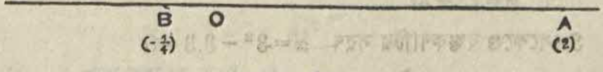
(ii) প্রদত্ত সমীকরণটিকে $x=(t-1)(t-2)$ আকারে প্রকাশ করা যায়।

স্রুতরাং $t=1$ এবং $t=2$, এই দুই মুহূর্তেই সরণ $x=0$.

আবার, যখন $t=1\frac{1}{2}$ এবং $x=-\frac{1}{4}$, তখন বস্তুকণাটির বেগ হয় শূন্য।

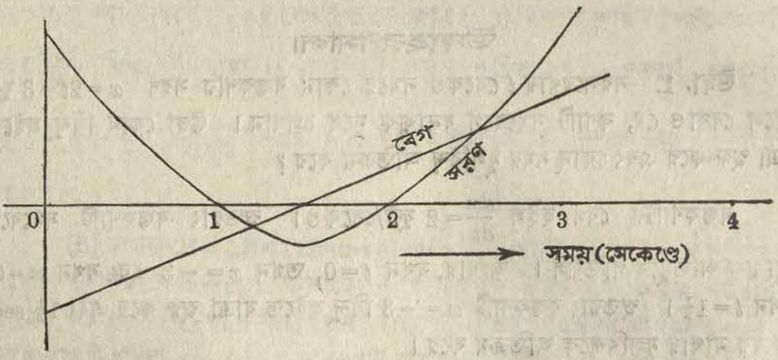
(iii) তৃতীয়ত, $t$-র মান যখন $1\frac{1}{2}$ অপেক্ষা কম, তখন বেগের মান ঋণাত্মক। কিন্তু $t$-র মান $1\frac{1}{2}$ অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে বেগের মান ধনাত্মক।

**চিত্রদ্বারা ব্যাখ্যা :**




24নং চিত্র

24নং চিত্রে, $x=2$ এবং $x=-\frac{1}{4}$ সরণ যথাক্রমে $A$ ও $B$ বিন্দু-দুইটি দ্বারা সূচিত। বস্তুকণাটি $A$ বিন্দু হইতে $-3$ ফুট প্রতি সেকেণ্ড বেগে যাত্রা সুরু করিয়া $t=1$ সেকেণ্ড সময়ে মূলবিন্দু 0 অতিক্রম করে, $t=1\frac{1}{2}$ সেকেণ্ড সময়ে মুহূর্তের জন্য $B$ বিন্দুতে স্থিতিশীল হয় এবং তাহার পর আবার ধনাত্মক অভিমুখে চলিতে সুরু করে এবং $t=2$ সেকেণ্ড সময়ে আবার মূলবিন্দুকে অতিক্রম করে। ইহার পর বস্তুকণাটি ক্রমবর্ধমান বেগ লইয়া ক্রমশঃ ধনাত্মক অভিমুখে চলিতে থাকে।




25নং চিত্র

25নং চিত্রে সময়-সরণ ও সময়-বেগ লেখ অঙ্কন করা হইয়াছে। এক্ষেত্রে সময়-সরণ লেখ একটি অধিবৃত্ত এবং সময়-বেগ লেখ একটি সরলরেখা। উপরোক্ত উদাহরণে বেগ সমহারে বৃদ্ধি পায়। প্রাথমিক বেগ ঋণাত্মক, $t=1\frac{1}{2}$ সেকেণ্ডে বেগ হয় শূন্য এবং তাহার পর বেগ ক্রমশঃই বৃদ্ধি পাইতে থাকে। $1\frac{1}{2}$ সেকেণ্ডের সময় সরণের মান সর্বাপেক্ষা কম, $-\frac{1}{4}$। কিন্তু ইহার পর সরণ $x$-এর মান ক্রমশঃই বৃদ্ধি পাইতে থাকে।

**উদা. 3.** $t$ সময়ের মাথায় কোন বস্তুকণার বেগ $v=2t-3$ cm./sec. এবং যাত্রার সুরুতে সরণ $x=0$ হইলে 3 সেকেণ্ডের সময় বস্তুকণাটির সরণ কত? 5 সেকেণ্ডের সময়েই বা সরণ কত?

$$v=2t-3 \text{ বা, } \frac{dx}{dt}=2t-3$$

$\therefore \int dx=\int(2t-3)\,dt$

$\therefore \quad x=t^2-3t+c,$ যেখানে $c$ ধ্রুবক।

যখন $t=0,$ তখন $x=0.$ $\therefore c=0.$

$\therefore$ সরণ $x=t^2-3t$

$\therefore$ 3 সেকেণ্ডে বস্তুকণাটির সরণ $x=3^2-3.3=0$

এবং 5 সেকেণ্ডে বস্তুকণাটির সরণ $x=5^2-3.5=10$ সে.মি.।

**উদা. 4.** কোন বস্তুকণার ত্বরণ $f=3+2t$ সে.মি./সে.$^2$, প্রাথমিক বেগ শূন্য এবং ঐ সময়ে বস্তুকণাটির অবস্থান $x=0$ হইলে 3 সেকেণ্ডে বস্তুকণাটির সরণ কত হইবে এবং ঐ মুহূর্তে বস্তুকণাটির বেগই বা কত হইবে ?

ত্বরণ $\quad f=\dfrac{dv}{dt}=3+2t$

$\therefore \quad \int dv=\int(3+2t)\,dt$

$\therefore \quad v=3t+t^2+c$, যেখানে $c$ ধ্রুবক।

যখন $t=0$, তখন $v=0$. $\therefore \; c=0$.

$\therefore \quad v=3t+t^2$.

$\therefore$ 3 সেকেণ্ডের মাথায় বেগ $=3.3+3^2$

$=18$ সে.মি. প্রতি সেকেণ্ডে।

আবার, $v=\dfrac{dx}{dt}=3t+t^2$ বলিয়া

$\int dx=\int(3t+t^2)\,dt$

$\therefore \quad x=\dfrac{3t^2}{2}+\dfrac{t^3}{3}+k.$ যেখানে $k$ ধ্রুবক।

যখন $t=0$, তখন $x=0$. $\therefore \; k=0$.

$\therefore \quad x=\dfrac{3t^2}{2}+\dfrac{t^3}{3}.$

$\therefore$ 3 সেকেণ্ডে সরণ $=\dfrac{3.3^2}{2}+\dfrac{3^3}{3}=\dfrac{27}{2}+9$

$=\dfrac{45}{2}=22{\cdot}5$ সে.মি.।

**উদা. 5.** একটি বস্তুকণার $x$-অক্ষের ধনাত্মক অভিমুখে উপবেগ সমহার এবং $y$-অক্ষের ধনাত্মক অভিমুখে $t$ সময়ে উহার অপর উপবেগটি $=mt+n$, যেখানে $m$ ও $n$ ধ্রুবক সংখ্যা। যে-কোনো মুহূর্তে কণাটির ত্বরণ কত হইবে ?

প্রশ্ন অনুসারে, কণাটির

$x$-অক্ষের ধনাত্মক অভিমুখে উপবেগ সমহার বলিয়া একটি ধ্রুবক সংখ্যার সমান হইবে।

$\therefore \quad \dfrac{dx}{dt}=c\,; \therefore \quad \dfrac{d^2x}{dt^2}=0.$

অর্থাৎ $x$-অক্ষ বরাবর ত্বরণ $=0$.

আবার $y$-অক্ষের ধনাত্মক অভিমুখে কণাটির উপবেগ

$$\frac{dy}{dt} = mt + n.$$

$\therefore$ একই মুখে উহার ত্বরণ $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)$

$$= \frac{d}{dt}(mt+n)$$

$$= \frac{mdt}{dt} + \frac{dn}{dt}$$

$$= m + 0 = m.$$

$\therefore$ কণাটির লব্ধি-ত্বরণ $= \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}$

$$= \sqrt{0+m^2} = m.$$

## প্রশ্নমালা 3

1. $t$ সেকেণ্ডে সরণ $x = 6t - t^2$ ফুট। $t$ সেকেণ্ড। এবং 2 সেকেণ্ড সময়ে বস্তু-কণাটির বেগ ও ত্বরণ নির্ণয় কর।

2. $t$ সেকেণ্ডে সরণ $x = 12t - t^3$ সে.মি. হইলে বস্তুকণাটির বেগ কখন শূন্য হইবে এবং ঐ সময়ে বস্তুকণাটি যাত্রাস্থল হইতে কতটা দূরে থাকিবে ?

3. $t$ সেকেণ্ডে সরণ $x = 40t - 16t^2$ সে.মি. হইলে যাত্রার সুরুতে বস্তুকণাটির বেগ কত এবং স্থির হওয়ার পূর্ব পর্যন্ত বস্তুকণাটি কতটা পথ অতিক্রম করিবে ?

4. $t$ সেকেণ্ড সময়ে একটি বস্তুকণার বেগ $v = 3t - \frac{1}{4}t^2$ সে.মি./সে.। যখন $t = 4$ সেকেণ্ড, তখন বস্তুকণাটির ত্বরণ কত ? বস্তুকণাটির সর্বাধিক বেগই বা কত ?

5. $t$ সেকেণ্ডের মাথায় সরলরেখায় চলমান একটি বস্তুকণার বেগ $(12t - 3t^2)$ ফুট প্রতি সেকেণ্ডে। বস্তুকণাটি তৃতীয় সেকেণ্ডে কতটা পথ যায় নির্ণয় কর।

6. একটি চলমান বস্তুকণার $t$ সেকেণ্ড সময়ে সরণ $x$ ফুট, যেখানে $x = 3 + 5t + t^2$. 3 সেকেণ্ড পরে উহার বেগ ও ত্বরণ নির্ণয় কর।

7. একটি চলমান বস্তুকণার $t$ সেকেণ্ড সময় পরে বেগ $v = (t-1)(2-t)$ ফুট/সে., যে দুই বিন্দুতে বস্তুকণাটি স্থির হয়, সেই দুই বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় কর।

8. সরলরেখায় চলমান একটি বস্তুকণা $t$ সেকেণ্ডে ঐ সরলরেখার উপরিস্থিত একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে $x$ ফুট দূরে আছে। $3x = 13 + 12t^2 - t^3$ হইলে দেখাও যে, 8 সেকেণ্ড পরে বস্তুকণাটির গতি পূর্বানুবৃত্তি করে। ঐ 8 সেকেণ্ড সময়ে বস্তুকণাটি সর্বাধিক যে বেগ অর্জন করে তাহাও নির্ণয় কর।

9. একটি বস্তুকণা একটি সরলরেখায় এরূপে চলমান যে, $t$ সেকেণ্ড পরে উহা ঐ সরলরেখার উপরিস্থিত একটি নির্দিষ্ট বিন্দু 0 হইতে $27t-t^3$ ফুট দূরে আছে। প্রমাণ কর যে, উহা 3 সেকেণ্ড সময় ধরিয়া 0 বিন্দু হইতে বাহিরের দিকে চলে এবং যখন উহা আবার 0 বিন্দুতে ফিরিয়া আসে, তখন উহার বেগ হয় প্রতি সেকেণ্ডে 54 ফুট।

10. একটি বস্তুকণা 0 বিন্দু হইতে যাত্রা স্থরু করিয়া সরলরেখা বরাবর চলিতে থাকে। $t$ সেকেণ্ড সময়ে উহার বেগ $v=10+25t-4t^2$ ফুট প্রতি সেকেণ্ড হইলে দেখাও যে, প্রথম $3\frac{1}{8}$ সেকেণ্ড ধরিয়া বস্তুকণাটির বেগ ক্রমশঃ বৃদ্ধি পায়। ঐ সময়ে বস্তুকণাটি কর্তৃক অতিক্রান্ত দূরত্ব নির্ণয় কর।

11. একটি বিন্দু $P$ সরলরেখা বরাবর এরূপে চলমান যে, ঐ সরলরেখার একটি নির্দিষ্ট বিন্দু $A$ হইতে $t$ সেকেণ্ডে চলমান বিন্দুটির দূরত্ব $x=t-t^3$ ফুট।

(i) তৃতীয় সেকেণ্ডে $P$ বিন্দুটি কতটা পথ অতিক্রম করিবে?

(ii) বস্তুকণাটি কখন স্থিতিশীল হইবে?

(iii) কোন এক মুহূর্তে বেগ $v$ এবং ত্বরণ $f$ হইলে দেখাও যে, $v=1+\frac{1}{2}ft.$

12. সরলরেখায় চলমান একটি বস্তুকণার $t$ সেকেণ্ড সময়ে বেগ $v=2t^2-7t+6$ ফুট/সে.। বস্তুকণাটি যাত্রার স্থরুতে মূলবিন্দুতে থাকিলে, ($a$) মূলবিন্দু হইতে সরণ এবং ($b$) ত্বরণ নির্ণয় কর। দেখাও যে, বস্তুকণাটি দুইবার স্থির হয়। স্থির অবস্থায় মূলবিন্দু হইতে বস্তুকণাটির দূরত্ব নির্ণয় কর।

13. উল্লম্বদিকে উৎক্ষিপ্ত একটি গোলা $t$ সেকেণ্ডে মাটি হইতে $(600t-16t^2)$ ফুট উচ্চতায় ওঠে। 10 সেকেণ্ড পরে উহার গতিবেগ কত নির্ণয় কর। গোলাটি কখন সর্বাধিক উচ্চতায় উঠিবে? [ সংকেত : সর্বাধিক উচ্চতায় বেগ $v=0$ ধর ]

14. মাটি হইতে উর্ধ্বে উৎক্ষিপ্ত একটি প্রস্তর $t$ সেকেণ্ডে $(120t-16t^2)$ ফুট উচ্চতায় ওঠে। 3 সেকেণ্ড ও 5 সেকেণ্ড পরে উহার বেগ কত হইবে?

15. একটি বস্তুকণা $A$ বিন্দু হইতে $B$ বিন্দুতে যায়। $A$ বিন্দু অতিক্রম করার $t$ সেকেণ্ড পরে উহার বেগ হয় $4+\frac{3}{8}t^2$ ফুট প্রতি সেকেণ্ড। $A$ বিন্দু হইতে $B$ বিন্দুতে যাইতে 5 সেকেণ্ড সময় লাগিলে $AB$-এর দূরত্ব নির্ণয় কর।

16. একটি বস্তুকণার বেগ $v=4t-3$ সে.মি./সে. (i) প্রথম 3 সেকেণ্ডে; (ii) প্রথম 4 সেকেণ্ডে এবং (iii) চতুর্থ সেকেণ্ডে বস্তুকণাটি কতটা পথ অতিক্রম করে?

17. একটি বস্তুকণা $5-4t+3t^2$ ফুট প্রতি সেকেণ্ড বেগে চলমান। 3 সেকেণ্ডে বস্তুকণাটি কতটা পথ অতিক্রম করিবে এবং ঐ মুহূর্তে উহার ত্বরণ কত?

18. সরলরেখায় চলমান একটি বস্তুকণার $t$ সেকেণ্ডে ত্বরণ $(8+3t)$ ফুট প্রতি সেকেণ্ডে সেকেণ্ডে। যাত্রার স্থরুতে বস্তুকণাটির একটি নির্দিষ্ট বিন্দু $A$ হইতে দূরত্ব

3 ফুট এবং তখন উহার বেগ 5 ফুট প্রতি সেকেণ্ড। 2 সেকেণ্ড পরে বস্তুকণাটির অবস্থান এবং বেগ নির্ণয় কর।

19. স্থির অবস্থা হইতে যাত্রা স্বরু করিয়া সরলরেখায় চলমান একটি বস্তুকণার $t$ সেকেণ্ডে ত্বরণ হয় $4-t$ সে.মি. প্রতি সেকেণ্ডে সেকেণ্ডে। পুনরায় যখন কণাটি স্থির হয়, তখন যাত্রাস্থল হইতে উহার দূরত্ব কত এবং বস্তুকণাটি কত বেগে যাত্রাস্থলে ফিরিয়া আসে ?

20. $t$ সেকেণ্ড সময়ে একটি বস্তুকণার বেগ $27-\frac{1}{3}t^2$ ফুট প্রতি সেকেণ্ড। (i) বস্তুকণাটির প্রাথমিক বেগ ; (ii) কখন উহা বিপরীত দিকে যাইতে স্বরু করে এবং (iii) ঐ সময়ে যাত্রাস্থল হইতে বস্তুকণাটির দূরত্ব কত, তাহা নির্ণয় কর।

21. একটি বস্তুকণা 0 বিন্দু হইতে 8 সে.মি. প্রতি সেকেণ্ড প্রারম্ভিক বেগ সহ সরলরেখায় চলিতে থাকে। $t$ সেকেণ্ড পরে উহার ত্বরণ $6(t-2)$ সে.মি./সে.$^2$ হইলে কখন এবং কত বেগে বস্তুকণাটি আবার 0 বিন্দু দিয়া যাইবে ?

22. একটি বস্তুকণা 0 বিন্দু হইতে 40 ফুট প্রতি সেকেণ্ড প্রারম্ভিক বেগসহ যাত্রা স্বরু করিয়া $(8-t)$ ফুট/সে.$^2$ ত্বরণে সরলরেখায় চলিতে থাকে। 0 বিন্দু হইতে কতদূরে আসিয়া উহা স্থির হয় এবং উহার সর্বাধিক বেগ কত ?

23. $(x, y)$ বিন্দুতে একটি বস্তুকণার $x$-অক্ষের সমান্তরাল ধনাত্মক অভিমুখে উপবেগ 3 সে.মি./সে. এবং $t$ সেকেণ্ড সময়ে $y$-অক্ষের ধনাত্মক অভিমুখে উহার উপবেগ $=4t+3$ সে. মি./সে.। ঐ বিন্দুতে কণাটির ত্বরণ কত ?

## চতুর্থ অধ্যায়

# একটি বস্তুকণার সরলরেখায় গতি

## ( Motion of a particle in a straight line )

**4·1. সূত্রাবলী ঃ** (a) পূর্বেই প্রমাণিত হইয়াছে যে, $v$ সমবেগে $t$ সময়ে $s$ সরণ হইলে,

$$\mathbf{s = vt} \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (1)$$

(b) **সমত্বরণে সরলরেখায় চলমান বস্তুকণার যে-কোন মুহূর্তে বেগ—** ধরা যাক, কোন বস্তুকণা যেন $u$ প্রাথমিক বেগসহ $f$ সমত্বরণে সরলরেখা বরাবর চলমান। বস্তুকণাটির সরণ $s$ দ্বারা সূচিত হইলে, বেগ $\frac{ds}{dt}$ দ্বারা এবং ত্বরণ $\frac{d^2s}{dt^2}$ দ্বারা সূচিত হইবে। এখানে ত্বরণ সমহার এবং $f$-এর সমান।

$$\therefore \quad \frac{d^2s}{dt^2} = f.$$

উভয়পক্ষের সমাকলন করিলে, $\frac{ds}{dt} = ft + c$, যেখানে $c$ ধ্রুবক।

কিন্তু যখন $t = 0$, তখন $\frac{ds}{dt} = u$.

$$\therefore \quad u = c$$

$$\therefore \quad \frac{ds}{dt} = u + ft.$$

এখন, যে-কোন এক মুহূর্তের বেগ $\frac{ds}{dt}$-কে $v$-দ্বারা সূচিত করিলে সমীকরণটি দাঁড়ায়,

$$\mathbf{v = u + ft} \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (2)$$

**4·2. প্রারম্ভিক বেগ u এবং f সমত্বরণসহ t সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব (Distance covered in time t with an initial velocity u and an acceleration f) ঃ** চলমান বস্তুকণাটির সমত্বরণ $f$ এবং প্রাথমিক বেগ $u$. সরণ $s$ দ্বারা সূচিত হইলে $\frac{d^2s}{dt^2} = f$.

উভয়পক্ষের সমাকলন করিয়া,

$$\frac{ds}{dt} = ft + c, \text{ যেখানে } c \text{ ধ্রুবক।}$$

কিন্তু যখন $t=0$, তখন $\frac{ds}{dt}=u \quad \therefore \quad u=c$

$$\therefore \quad \frac{ds}{dt}=u+ft$$

আবার সমাকলন করিয়া পাওয়া যায়,

$$\int ds=\int(u+ft)dt$$

বা $\quad s=ut+\frac{1}{2}ft^2+k$, যেখানে $k$ ধ্রুবক

কিন্তু যখন $t=0$, তখন $s=0 \quad \therefore \quad k=0$

$$\therefore \quad \mathbf{S=ut+\tfrac{1}{2}ft^2}. \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

**4·3. u প্রারম্ভিক বেগ ও v প্রান্তিক বেগ হইলে f সমত্বরণসহ চলমান বস্তুকণা দ্বারা t সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব (Distance covered by a particle in time t with uniform acceleration f, its initial and final velocity being u and v) ঃ** চলমান বস্তুকণাটির প্রারম্ভিক বেগ $u$, প্রান্তিক বেগ $v$, সমত্বরণ $f$ এবং $t$ সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব $s$ হইলে,

প্রথম হইতে 1 একক সময়ের মাথায় বেগ $=u+f$,

শেষ হইতে 1 একক সময় আগেকার মুহূর্তে বেগ $=v-f$;

$\therefore$ ঐ দুই মুহূর্তের গড় বেগ $=\frac{u+f+v-f}{2}=\frac{1}{2}(u+v)$.

এইভাবে প্রথম ও শেষ হইতে সমান দূরবর্তী প্রত্যেক দুইটি মুহূর্তের গড় বেগ $=\frac{1}{2}(u+v)$.

$\therefore$ সমগ্র কাল $t$ সময়ের গড় বেগও $\frac{1}{2}(u+v)$,

$$\therefore \quad \mathbf{s=\tfrac{1}{2}(u+v)t} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

কিন্তু $\quad v=u+ft$;

$$\therefore \quad s=\tfrac{1}{2}(u+u+ft)t$$

$$=\frac{1}{2}2u.t+\tfrac{1}{2}ft^2$$

$$=\mathbf{ut+\tfrac{1}{2}ft^2}.$$

**4·4. স্থির অবস্থা হইতে সমত্বরণে গতি (Motion from rest with an uniform acceleration) ঃ** $f, t, v$ এবং $s$ যেন যথাক্রমে সমত্বরণ, সময়, প্রান্তিক বেগ এবং ঐ সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্বের মান।

তাহা হইলে, $s=\frac{1}{2}(u+v)t$ সূত্রে $u=0$ বসাইয়া আমরা পাই

$$\mathbf{s=\tfrac{1}{2}vt} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (5)$$

অনুরূপে $u=0$ বসাইলে,

$s=ut+\frac{1}{2}ft^2$ সূত্রটি হয়

$$\mathbf{s=\tfrac{1}{2}ft^2} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (6)$$

**4·5. সময়, ত্বরণ, প্রারম্ভিক ও প্রান্তিক বেগের সম্পর্ক (Relation between time, acceleration, initial and final velocities) ঃ** $u, v, f, t$ ও $s$ যেন যথাক্রমে প্রারম্ভিক বেগ, প্রান্তিক বেগ, সমত্বরণ, নির্দিষ্ট সময় ও ঐ সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব। তাহা হইলে,

$$v=u+ft \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (i)$$

এবং $s=\frac{1}{2}(u+v)t \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (ii)$

(i) হইতে, $\frac{v-u}{f}=t.$

আবার (ii) হইতে,

$$\frac{2s}{u+v}=t\,;$$

$$\therefore \quad \frac{v-u}{f}=\frac{2s}{u+v}.$$

$$\therefore \quad v^2-u^2=2fs$$

অর্থাৎ $\mathbf{v^2=u^2+2fs} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (7)$

স্পষ্টতই প্রারম্ভিক বেগ শূন্য অর্থাৎ স্থির অবস্থা হইতে গতি শুরু হইলে

$$u=0\,;$$

$$\therefore \quad \mathbf{v^2=2fs} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (8)$$

**4·6. n-তম সেকেণ্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব নির্ণয় (To find the distance described in the n-th second) ঃ** প্রতি সেকেণ্ডে সেকেণ্ডে $f$ ফুট ত্বরণ ও সেকেণ্ডে $u$ ফুট প্রারম্ভিক বেগ ধরিলে, $n$-তম সেকেণ্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব

$= n$ সেকেণ্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব $-(n-1)$ সেকেণ্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব

$$=(un+\tfrac{1}{2}fn^2)-\{u(n-1)+\tfrac{1}{2}f(n-1)^2\}$$

$$=un-u(n-1)+\tfrac{1}{2}f\{n^2-(n-1)^2\}$$

$$=u(n-n+1)+\tfrac{1}{2}\{(n+n-1)(n-n+1)\}f$$

$$=\mathbf{u+\tfrac{1}{2}(2n-1)f} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (9)$$

**সূত্রাবলীর প্রয়োগ ঃ** নিচে কয়েকটি উদাহরণের সাহায্যে এই অধ্যায়ে আলোচিত সূত্রগুলির প্রয়োগ দেখানো হইতেছে। এই প্রসঙ্গে একটি কথা বিশেষভাবে

উল্লেখযোগ্য। ত্বরণ যখন প্রারম্ভিক বেগের বিপরীতমুখী হয়, তখন উহাকে ঋণাত্মক ধরিয়া সূত্র প্রয়োগ করিতে হইবে। অর্থাৎ $f$ যদি ত্বরণের মান হয়, তবে $-f$ দ্বারা উহাকে দিকে ও মানে সূচিত করিতে হইবে।

**উদাহরণ 1.** যে ত্বরণের ফলে কোন বস্তু স্থিরাবস্থা হইতে 5 সেকেণ্ডে 100 ফুট অতিক্রম করিতে পারে, তাহার মান নির্ণয় কর। [ক. বি. প্র. 1912]

এখানে $s$ ( সরণ ) $=100$ ফুট, $u$ ( প্রারম্ভিক বেগ ) $=0$, $t$ ( সময় ) $=5$, ত্বরণ $f$ নির্ণয় করিতে হইবে।

$$s=\tfrac{1}{2}ft^2.$$

$$\therefore\quad 100=\tfrac{1}{2}f.5^2=\tfrac{25}{2}f\,;$$

$\therefore\quad f=\dfrac{\overset{8}{\cancel{200}}}{\cancel{25}}$ বা সেকেণ্ডে সেকেণ্ডে 8 ফুট।

**উদাহরণ 2.** একটি বিন্দু 12 সেকেণ্ড কাল চলিবার পর উহার বেগ সেকেণ্ডে 56 ফুট হইতে সেকেণ্ডে 92 ফুটে পরিণত হয়। ঐ সময়ে বিন্দুটি কত পথ অতিক্রম করে?

এখানে $u$ ( প্রারম্ভিক বেগ ) $=56$,
$v$ ( প্রান্তিক বেগ ) $=92$,
$t$ ( সময় ) $=12$,
$s$ ( সরণ ) নির্ণয় করিতে হইবে।

$$s=\tfrac{1}{2}(u+v)t$$

$$=\frac{1}{\cancel{2}}(56+92)\,\overset{6}{\cancel{12}}$$

$=148\times 6$ ফুট

$=888$ ফুট।

**উদাহরণ 3.** একটি বন্দুকের গুলি উহার লক্ষ্যভেদ করিয়া 3 ইঞ্চি প্রবেশ করে এবং ঐ সময় পরে উহার বেগ অর্ধেক কমিয়া যায়। গুলিটি আরও কতদূর অগ্রসর হইবে? [C. U. I.Sc. 1943]

এখানে প্রথম ক্ষেত্রে $u$ যদি প্রারম্ভিক বেগ হয়, তবে প্রান্তিক বেগ $\frac{1}{2}u$ এবং সরণ $s=3$ ইঞ্চি $=\frac{1}{4}$ ফুট। এখানে ত্বরণ যেন সেকেণ্ডে সেকেণ্ডে $f$ ফুট।

আমরা জানি, $v^2=u^2-2fs$, [ $f$ ঋণাত্মক বলিয়া ]

$$\therefore\quad (\tfrac{1}{2}u)^2=u^2-\cancel{2}f.\,\frac{1}{\underset{2}{\cancel{4}}}\cdot$$

$\therefore\quad \frac{3}{4}u^2 = \frac{1}{2}f.$

$\therefore\quad f = \frac{3}{2}u^2.$

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে প্রান্তিক বেগ $=0$, প্রারম্ভিক বেগ $=\frac{1}{2}u$ এবং সরণ যেন $s_1$ ;

$$\therefore\quad 0 = (\tfrac{1}{2}u)^2 - 2fs_1$$
$$= \tfrac{1}{4}u^2 - 2.\tfrac{3}{2}u^2 s_1.$$

$\therefore\quad 3s_1 = \frac{1}{4}.$

$\therefore\quad s_1 = \frac{1}{12}$ ফুট বা 1 ইঞ্চি।

**উদাহরণ 4.** সমত্বরণে চলমান একটি বিন্দু গতির আরম্ভ হইতে একাদশ ও পঞ্চদশ সেকেণ্ডে যথাক্রমে 720 ও 960 সেন্টিমিটার অতিক্রম করে। 20 সেকেণ্ডে উহার সরণ কত হইবে ? [ C. U. I.Sc. 1937 ]

প্রারম্ভিক বেগ $u$ সেন্টিমিটার/সে. এবং ত্বরণ $f$ সেন্টিমিটার/সে.$^2$ হইলে,

$$720 = u + \tfrac{1}{2}(2\times 11 - 1)f$$
$$= u + \tfrac{21}{2}f.$$

অর্থাৎ $2u + 21f = 1440 \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$

আবার $\quad 960 = u + \frac{1}{2}(2\times 15 - 1)f$

$$= u + \tfrac{29}{2}f$$

অথবা $2u + 29f = 1920, \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$

(2) হইতে (1) বিয়োগ করিয়া,

$8f = 480,$

বা, $f = 60$ সেন্টিমিটার/সে.$^2$।

$\therefore\quad 2u = (1440 - 21\times 60)$ বা $(1440 - 1260)$

বা 180 সেন্টিমিটার/সে.।

$\therefore\quad u = 90$ সেন্টিমিটার/সে.।

আবার, $s = ut + \frac{1}{2}ft^2$ সূত্রানুসারে,

20 সেকেণ্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব $s = 90\times 20 + \frac{1}{2}\overset{30}{\cancel{60}}.20^2,$

বা $s = 1800 + 30\times 400$

$= (1800 + 12000)$ সেমি.

$= 13800$ সেন্টিমিটার $= 138$ মিটার।

**উদাহরণ 5.** স্থিরাবস্থা হইতে একটি রেলগাড়ী 45 মিনিটে $X$ হইতে $Y$ স্টেশনে পৌছায়। সমত্বরণে $X$ ও $Y$ স্টেশনের মধ্যবর্তী $Z$ বিন্দুতে উহার গরিষ্ঠ বেগ হয় ঘণ্টায় 45 মাইল এবং $Z$ হইতে সমহার মন্দনে $Y$ স্টেশনে আসিয়া উহা থামিয়া যায়। $XY$ দূরত্ব নির্ণয় কর। [ C. U. I.Sc. 1946 ]

এখানে $X$ হইতে $Z$ পর্যন্ত সমত্বরণ যেন $f_1$ মাইল/ঘণ্টা² এবং $Z$ হইতে $Y$ পর্যন্ত সমহার মন্দন যেন $-f_2$ মাইল/ঘণ্টা²। স্পষ্টতই, $Z$ বিন্দুতে গাড়ীর বেগ গরিষ্ঠ অর্থাৎ ঘণ্টায় 45 মাইল। $X$ হইতে $Z$ বিন্দুতে যাইতে $t_1$ ঘণ্টা এবং $Z$ হইতে $Y$ স্টেশনে যাইতে $t_2$ ঘণ্টা লাগিলে,




26নং চিত্র

$v = u + ft$ সূত্রানুসারে,

$$45 = f_1 t_1 \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

এখন, $XZ = \frac{1}{2} f_1 t_1^2 = \frac{1}{2} f_1 t_1 . t_1 = \frac{1}{2} . 45 t_1 \quad \cdots \quad (2)$

আবার, $s = \frac{1}{2}(u+v)\, t$ সূত্রানুসারে,

$$ZY = \frac{1}{2}(45+0) t_2 = \frac{1}{2} . 45 t_2 \quad \cdots \quad (3)$$

(2) ও (3) যোগ করিয়া,

$\therefore \quad XY = XZ + ZY = \frac{45}{2}(t_1 + t_2)$ মাইল

$$= \frac{45}{2} \times \frac{\overset{3}{\cancel{45}}}{\underset{4}{\cancel{60}}} \text{ মাইল}, \quad [\because t_1 + t_2 = 45 \text{ মি.} = \tfrac{45}{60} \text{ ঘণ্টা}]$$

$= \frac{135}{8}$ বা $16\frac{7}{8}$ মাইল।

**উদাহরণ 6.** একটি বস্তুকণা সমান দুই অর্ধেক দূরত্ব যথাক্রমে $f$ ও $f'$ ত্বরণ সহ অতিক্রম করে। প্রমাণ কর যে, কণাটি সমগ্র দূরত্ব $\frac{1}{2}(f+f')$ ত্বরণ সহ অতিক্রম করিলে যে প্রান্তিক বেগ হইত, উপরি-উক্ত ক্ষেত্রেও সেই প্রান্তিক বেগই হইবে।

[ C. U. I.Sc. 1940 ]

সমগ্র দূরত্ব যদি $s$ হয়, তবে উহার প্রত্যেক অর্ধেক $\frac{1}{2}s$। এখন প্রারম্ভিক বেগ $u$, প্রথমার্ধের শেষের বেগ $v_1$ এবং প্রান্তিক বেগ $v$ হইলে,

$$v_1^2 = u^2 + 2f \times \tfrac{1}{2}s = u^2 + fs\,;$$
$$v^2 = v_1^2 + 2f' \tfrac{1}{2}s = v_1^2 + f's$$
$$= u^2 + fs + f's$$
$$= u^2 + (f+f')s \quad \cdots \quad (1)$$

প্রথম হইতে শেষ পর্যন্ত $\frac{1}{2}(f+f')$ ত্বরণে চলিলে প্রান্তিক বেগ যদি $v_2$ হয়, তবে

$$v_2{}^2 = u^2 + 2.\tfrac{1}{2}(f+f')s$$
$$= u^2 + (f+f')s \qquad \cdots \qquad (2)$$

(1) ও (2) হইতে, $v^2 = v_2{}^2$.

$\therefore$ $v = v_2$ অর্থাৎ উভয় ক্ষেত্রে প্রান্তিক বেগ সমান।

**উদাহরণ 7.** একটি ট্রেন একটি স্টেশন হইতে স্থিরাবস্থা হইতে যাত্রা করিয়া একই সরলরেখায় $d$ ফুট দূরবর্তী অপর একটি স্টেশনে যায়। ট্রেনটি যাত্রাপথের প্রথমাংশ $a$ ফুট/সেকেণ্ড$^2$ সমত্বরণে এবং অবশিষ্টাংশ $b$ ফুট/সেকেণ্ডে$^2$ সমমন্দনে চলে। দেখাও যে, ট্রেনটি উহার যাত্রাপথ $\sqrt{\left\{\dfrac{2(a+b)d}{ab}\right\}}$ সেকেণ্ডে অতিক্রম করিবে।

[ C. U. I.Sc. 1945 ]

$d$ ফুট দূরত্বের প্রথম অংশ $s_1$ ও দ্বিতীয় অংশ $s_2$ ফুট এবং $s_1$ ফুট যাইতে $t_1$ সেকেণ্ড ও $s_2$ ফুট যাইতে যেন $t_2$ সেকেণ্ড লাগে। $t_1$ সেকেণ্ড পরে গাড়ীর বেগ যেন $v$ ফু./সে. হয়। তাহা হইলে, প্রশ্নানুসারে

$$s_1 = \tfrac{1}{2}(0+v)t_1 = \tfrac{1}{2}vt_1$$

এবং $$s_2 = \tfrac{1}{2}(v+0)t_2 = \tfrac{1}{2}vt_2.$$

$$\therefore \quad d = s_1 + s_2 = \tfrac{1}{2}vt_1 + \tfrac{1}{2}vt_2 = \tfrac{1}{2}v(t_1+t_2) = \tfrac{1}{2}vt,$$

[ $t = t_1 + t_2$ ধরিয়া ]

অথবা, $$\mathbf{t = \frac{2d}{v}} \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \quad \text{(i)}$$

আবার, $v = at_1$ বা $\dfrac{v}{a} = t_1$,

এবং $v - bt_2 = 0$ বা $v = bt_2$ বা $\dfrac{v}{b} = t_2$.

$$\therefore \quad t_1 + t_2 = \frac{v}{a} + \frac{v}{b} = \frac{v(a+b)}{ab}.$$

অর্থাৎ $$\mathbf{t = \frac{v(a+b)}{ab}}. \qquad \cdots \qquad \cdots \quad \text{(ii)}$$

(i)-কে (ii) দ্বারা গুণ করিলে,

$$t^2 = \frac{2d}{v} \times \frac{v(a+b)}{ab} = \frac{2(a+b)d}{ab}$$

$$\mathbf{t = \sqrt{\frac{2(a+b)d}{ab}}} \text{ সেকেণ্ড।}$$

**উদাহরণ 8.** একটি বস্তুকণা সমত্বরণে সরলরেখায় চলিতে চলিতে পরপর তিনটি বিন্দু $A$, $B$ ও $C$ অতিক্রম করে। $A$ হইতে $B$-তে যাইতে উহার সময় লাগে $t_1$, $B$ হইতে $C$-তে যাইতে সময় লাগে $t_2$, এবং $AB=a$ ও $BC=b$. প্রমাণ কর যে, কণাটির ত্বরণ হইল $\dfrac{2(bt_1-at_2)}{t_1t_2(t_1+t_2)}$. [ W. B. H. S. 1960 ]

কণাটির $t_1$ ও $t_2$ সেকেণ্ডের মাথায় বেগ যথাক্রমে $v_1$ ও $v_2$ হইলে প্রশ্নানুসারে $A$ হইতে যাত্রার পর $B$ বিন্দুতে প্রান্তিক বেগ $v_1$ এবং $B$ হইতে যাত্রার সময় প্রারম্ভিক বেগ $v_1$ এবং $C$ বিন্দুতে প্রান্তিক বেগ $v_2$।

$\therefore \quad v=ft_1 \quad$ এবং $\quad v_2=v_1+ft_2,$

অর্থাৎ $\quad v_2=ft_1+ft_2=f(t_1+t_2). \quad \cdots \quad$ (i)

আবার, $\quad a=\frac{1}{2}(0+v_1)t_1=\frac{1}{2}v_1t_1,$

বা, $\quad \dfrac{2a}{t_1}=v_1 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad$ (ii)

এবং $\quad b=\frac{1}{2}(v_1+v_2)t_2$

বা, $\quad \dfrac{2b}{t_2}=v_1+v_2. \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad$ (iii)

(iii) হইতে (ii) বিয়োগ করিয়া,

$$\frac{2b}{t_2}-\frac{2a}{t_1}=v_2.$$

(i)-এ $v_2$-র মান বসাইয়া

$$\frac{2(bt_1-at_2)}{t_1t_2}=f(t_1+t_2),$$

বা, $\quad f=\dfrac{2(bt_1-at_2)}{t_1t_2(t_1+t_2)}.$

**উদাহরণ 9.** $f$ ফুট/সেকেণ্ড$^2$ সমত্বরণে চলমান একটি বস্তুকণা $u$ ফুট/সেকেণ্ড সমবেগে চলমান অপর একটি বস্তুকণা হইতে $d$ ফুট আগাইয়া আছে। কি কি শর্তে তাহারা (i) মাত্র একবার মিলিত হইবে, (ii) দুইবার মিলিত হইবে, (iii) কখনই মিলিত হইবে না ?

$t$ সেকেণ্ড পরে কণা-দুইটি মিলিত হইলে, ঐ $t$ সময়ে পিছনেরটি সামনেরটির চেয়ে $d$ ফুট বেশী যাইবে।

$t$ সময়ে $f$ ত্বরণসহ সামনেরটি যাইবে $\frac{1}{2}ft^2$ ফুট; কাজেই পিছনেরটি যাইবে $\frac{1}{2}ft^2+d$ ফুট।

$\therefore\ ut = \frac{1}{2}ft^2 + d,$

বা, $\frac{1}{2}ft^2 - ut + d = 0,$

বা, $t = \dfrac{\mathbf{u} \pm \sqrt{\mathbf{u^2 - 2fd}}}{\mathbf{f}}.$

(i) স্পষ্টতই, $u^2 - 2fd = 0$ অর্থাৎ $\mathbf{u^2 = 2fd}$ হইলে, $t$-র একটি মান $\frac{u}{f}$ পাওয়া যায়। কাজেই, সেক্ষেত্রে কণা-দুইটি মাত্র একবার মিলিত হইবে।

(ii) দ্বিতীয়ত, $u^2 > 2fd$ হইলে, $u^2 - 2fd$ ধনাত্মক হইবে। সেক্ষেত্রে $t$-র দুইটি ধনাত্মক মান পাওয়া যাইবে। $t$-র ঋণাত্মক মানের কোন অর্থ হয় না। কাজেই, দুইবার মিলিত হইবার শর্ত

$$\mathbf{u^2 > 2fd.}$$

(iii) $u^2 < 2fd$ হইলে, $t$-র মান অবাস্তব হইয়া পড়ে। অর্থাৎ এমন কোন বাস্তব সময় পাওয়া যায় না যখন কণা-দুইটি মিলিত হয় ; অতএব,

$\mathbf{u^2 < 2fd}$ হইলে, কণা-দুইটি কখনও মিলিত হইবে না।

**উদাহরণ 10.** দুইটি বস্তুকণা একই বিন্দু $A$ হইতে যাত্রা শুরু করিয়া একই রেখা $AB$ বরাবর চলমান। একটি বস্তুকণা $u$ সমবেগে চলে এবং অপরটি স্থির অবস্থা হইতে শুরু করিয়া $f$ সমত্বরণে চলমান। দ্বিতীয় বস্তুকণাটি প্রথমটিকে কখন অতিক্রম করিবে নির্ণয় কর। আরও দেখাও যে, যাত্রা শুরু করার $\frac{u}{f}$ সময় পরে বস্তুকণা-দুইটির মধ্যে দূরত্ব সর্বাধিক হইবে এবং ঐ সর্বাধিক দূরত্বের মান হইবে $\frac{u^2}{2f}$.

কণা-দুইটির মধ্যে গরিষ্ঠ দূরত্ব যেন $d$ এবং $t$ সেকেণ্ড পর যেন উহাদের মধ্যে এই গরিষ্ঠ দূরত্ব হয়। তাহা হইলে,

$t$ সময়ে সমবেগে ধাবমান কণা যায় $ut$ ফুট, এবং সমত্বরণে ধাবমান কণা যায় $\frac{1}{2}ft^2$ ফুট। এই দুই দূরত্বের অন্তর $d$ ফুট।

$\therefore\ ut - \frac{1}{2}ft^2 = d,$

বা $\frac{1}{2}ft^2 - ut + d = 0.$

$\therefore\ t = \dfrac{u \pm \sqrt{u^2 - 2fd}}{f},$

(i) $t$-র মান বাস্তব বলিয়া, $u^2 - 2fd$ হয় শূন্য, নয় ধনাত্মক।

অর্থাৎ $u^2 \geqslant 2fd$

বা, $\dfrac{u^2}{2f} \geqslant d$

অথবা $d \leqslant \frac{u^2}{2f}$.

$\therefore$ $d$-এর গরিষ্ঠ মান $= \frac{u^2}{2f}$.

(ii) $d$-র মান $= \frac{u^2}{2f}$ হইলে,

$$u^2 = 2fd.$$

কাজেই, $t = \frac{u \pm 0}{f} = \frac{u}{f}$.

$\therefore$ কণা-দুইটির মধ্যে ব্যবধান গরিষ্ঠ হইবে যাত্রামুহূর্তের $\frac{u}{f}$ সেকেণ্ড পরে।

**উদাহরণ 11.** সমত্বরণে চলমান কোন বস্তুকণা উহার গতির $p$-তম, $q$-তম এবং $r$-তম সেকেণ্ডে যথাক্রমে $a$, $b$ ও $c$ দূরত্ব অতিক্রম করিলে প্রমাণ কর যে,

$$a(q-r)+b(r-p)+c(p-q)=0.$$

[ U. P. B. 1940 ; G. U. 1949 ; C. U. 1950 ]

$n$-তম সেকেণ্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব $= u + \frac{1}{2}f(2n-1)$, যেখানে $u$ ও $f$ যথাক্রমে প্রারম্ভিক বেগ ও সমত্বরণ।

$$\therefore \quad a = u + \tfrac{1}{2}f(2p-1) \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

$$b = u + \tfrac{1}{2}f(2q-1) \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

$$c = u + \tfrac{1}{2}f(2r-1) \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(iii)}$$

(i) হইতে (ii) বিয়োগ করিয়া,

$$a - b = \tfrac{1}{2}f(2p-1-2q+1) = \frac{1}{2} \times 2f\,(p-q)$$

$$= f(p-q). \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(iv)}$$

অনুরূপে (ii) হইতে (iii) বিয়োগ করিয়া,

$$b - c = f(q-r). \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(v)}$$

(iv)-কে (v) দ্বারা ভাগ করিয়া

$$\frac{a-b}{b-c} = \frac{p-q}{q-r},$$

বা, $a(q-r) - b(q-r) = b(p-q) - c(p-q)$,

বা, $a(q-r) - b(q-r+p-q) + c(p-q) = 0$,

বা, $a(q-r) + b(r-p) + c(p-q) = 0$.

**উদাহরণ 12.** একটি ট্রেন 4 মাইল দূরবর্তী দুইটি স্টেশনের একটি হইতে যাত্রা শুরু করিয়া অপরটিতে আসিয়া 8 মিনিটে থামে। ট্রেনটি উহার গতির প্রথমাংশ $x$ সমত্বরণে এবং অবশিষ্টাংশ $y$ সমমন্দনে চলিলে $x$ ও $y$-এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর।

[এখানে স্টেশন-দুইটির দূরত্ব—মাইলে এবং সময়—মিনিটে প্রদত্ত বলিয়া মাইল ও মিনিটের এককে গাড়ীটির ত্বরণ ও মন্দন প্রকাশ করাই সুবিধাজনক।]

রাস্তার প্রথম অংশে ত্বরণ $x$ মাইল/মিনিট$^2$ ও দ্বিতীয় অংশে মন্দন $y$ মাইল/মিনিট$^2$। রাস্তার প্রথম ও দ্বিতীয় অংশ যথাক্রমে $s_1$ ও $s_2$ মাইল এবং প্রথম অংশের শেষে বেগ যেন $v$ মাইল/মিনিট। এখন প্রথম ও দ্বিতীয় অংশ যাইতে যদি যথাক্রমে $t_1$ ও $t_2$ মিনিট লাগে, তবে

$$t_1 + t_2 = 8 \text{ মিনিট} \qquad \cdots \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

$$v = xt_1 \text{ বা } \frac{v}{x} = t_1 \qquad \cdots \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

আবার, দ্বিতীয় অংশে যাত্রার প্রারম্ভে বেগ $v$ এবং মন্দন $y$ বলিয়া,

$$v - yt_2 = 0,$$

বা, $v = yt_2$,

বা, $\dfrac{v}{y} = t_2$, $\qquad \cdots \quad \cdots \quad$ (iii)

এখন, $s_1 = \frac{1}{2}(0+v)t_1 = \frac{1}{2}vt_1$

এবং $s_2 = \frac{1}{2}(v+0)t_2 = \frac{1}{2}vt_2$.

$\therefore$ $s_1 + s_2 = \frac{1}{2}v(t_1 + t_2)$,

অথবা $4 = \dfrac{1}{2}\overset{4}{8}v$, [ $\because$ $s_1 + s_2 = 4$ মাইল এবং $t_1 + t_2 = 8$ মিনিট ]

বা, $4v = 4$

বা, $v = 1$. $\qquad \cdots \quad \cdots \quad$ (iv)

(ii) ও (iii) যোগ করিয়া,

$$\frac{v}{x} + \frac{v}{y} = t_1 + t_2,$$

বা, $v\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right) = 8$,

বা, $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 8$.

$x$ ও $y$-এর মধ্যে ইহাই নির্ণেয় সম্পর্ক।

## প্রশ্নমালা 4

1. ফুট-সেকেণ্ড এককে ত্বরণ 3 ও সেকেণ্ডে 4 ফুট প্রারম্ভিক বেগ সহ একটি বস্তু কত সময়ে ঘণ্টায় 30 মাইল বেগ লাভ করিবে ?

2. স্থিরাবস্থা হইতে ত্বরণসহ চলমান একটি গাড়ী 4 সেকেণ্ড পর যে-বেগ লাভ করে সেই বেগে 2 মিনিটে 1 মাইল অতিক্রম করিতে পারে। ঐ ত্বরণের মান নির্ণয় কর।

3. একটি স্থির বস্তু ত্বরণসহ চলিতে আরম্ভ করিয়া 5 সেকেণ্ড পরে সেকেণ্ডে 20 ফুট বেগ লাভ করে। 10 সেকেণ্ড পরে উহার বেগ কত হইবে ?

4. কোন একটি বস্তু ত্বরণসহ 2 সেকেণ্ড চলিবার পর যদি ঘণ্টায় 15 মাইল বেগ অর্জন করে, তবে সেই ত্বরণ সেকেণ্ডে সেকেণ্ডে কত ফুট ?

5. একটি গাড়ী ঘণ্টায় 45 মাইল বেগে চলিতে থাকে। প্রত্যেক সেকেণ্ড পর উহা ব্রেকের সাহায্যে হঠাৎ মুহূর্তকালের মধ্যে সেকেণ্ডে 11 ফুট পরিমাণ বেগ কমাইয়া ফেলে। এইভাবে গাড়ীটি থামিয়া যাওয়া পর্যন্ত কতদূর যাইবে ?

6. সেকেণ্ডে 25 সেন্টিমিটার প্রারম্ভিক বেগ যদি 10 সেকেণ্ড পর ঘণ্টায় 3·6 কিলোমিটারে পরিণত হয়, তবে ত্বরণ কত ?

7. স্থিরাবস্থা হইতে যাত্রা শুরু করিয়া সমত্বরণে চলমান যে-বস্তু 5 সেকেণ্ডে 100 ফুট অতিক্রম করে তাহার ত্বরণ কত ?

8. একটি বস্তু সেকেণ্ডে 9 ফুট বেগে চলিতে শুরু করে এবং 10 ফুট দূরত্ব অতিক্রম করার পর সেকেণ্ডে 10 ফুট বেগ লাভ করে। উহার ত্বরণ ও 10 ফুট অতিক্রমণের সময় নির্ণয় কর।

9. সমহার মন্দনে চলমান একটি রেলগাড়ীর বেগ ঘণ্টায় 40 মাইল হইতে ঘণ্টায় 10 মাইলে পরিণত হয়। ঐ সময়ে উহা যদি 150 গজ অতিক্রম করে, তবে গাড়ীটি থামিয়া যাওয়া পর্যন্ত আরও কতদূর অগ্রসর হইবে ?

10. একটি চলমান বস্তুকণার বেগ 10 সেকেণ্ডে 4 ফুট/সে. হইতে সেকেণ্ডে 14 ফুটে পরিণত হয়। কণাটি ঐ সময়ে কত ফুট দূরত্ব অতিক্রম করে ?

11. একটি রেলগাড়ী স্থিরাবস্থা হইতে যাত্রা শুরু করিয়া $2\frac{1}{2}$ মিনিট পর ঘণ্টায় 48 মাইল বেগ অর্জন করে। গাড়ীটি ঐ সময়ে কত মাইল দূরত্ব অতিক্রম করে ?

12. একটি বস্তুকণা নির্দিষ্ট প্রারম্ভিক বেগসহ সমত্বরণে 3 সেকেণ্ড কাল চলিয়া 81 ফুট অতিক্রম করে। ঠিক তাহার পরই ত্বরণ বন্ধ হইয়া গেলে পরবর্তী 3 সেকেণ্ডে কণাটি 72 ফুট অগ্রসর হয়। কণাটির প্রারম্ভিক বেগ ও ত্বরণ নির্ণয় কর।

13. স্থিরাবস্থা হইতে সমত্বরণে চলমান কোন বস্তু 5 সেকেণ্ডে যে-বেগ লাভ

করে, সেই বেগ-সহকারে বিনা ত্বরণে উহা যদি 4 মিনিটে 320 গজ যাইতে পারে, তবে উহার ত্বরণ নির্ণয় কর।

14. স্থিরাবস্থা হইতে সমত্বরণে চলমান একটি বস্তু উহার গতির দশম সেকেণ্ডে 171 ফুট অতিক্রম করে; উহার ত্বরণ কত?

15. স্থিরাবস্থা হইতে সমত্বরণে চলিতে শুরু করিয়া একটি গাড়ী 4 মিনিটে প্রথম মাইল অতিক্রম করে। ইহার পর উহা যদি সমবেগে চলে, তবে আরেক মাইল যাইতে উহার কত সময় লাগিবে?

16. সমত্বরণে সরলরেখায় চলমান একটি বস্তুকণা পঞ্চম সেকেণ্ডে 25 ফুট এবং সপ্তম সেকেণ্ডে 33 ফুট অতিক্রম করে। উহার প্রারম্ভিক বেগ ও ত্বরণ নির্ণয় কর।

17. সেকেণ্ডে 20 ফুট বেগে ধাবমান এক ব্যক্তিকে 48 ফুট পিছন হইতে অন্য এক ব্যক্তি প্রতি সেকেণ্ডে সেকেণ্ডে 4 ফুট ত্বরণসহ কতক্ষণে ও কতদূরে গিয়া ধরিয়া ফেলিবে?

18. সেকেণ্ডে 1600 ফুট বেগে ধাবমান একটি বন্দুকের গুলি লক্ষ্যভেদ করিয়া 1 ইঞ্চি প্রবেশ করার পর উহার অর্ধেক বেগ হারায়। বাধা যদি সমান থাকে, তবে গুলিটি থামিয়া যাওয়া পর্যন্ত আর কতদূর প্রবেশ করিবে?

19. $A$ বিন্দু হইতে $AB$ রেখা বরাবর একই সময়ে দুইটি বস্তুকণা চলিতে আরম্ভ করে। প্রথমটি সেকেণ্ডে 40 ফুট সমবেগে এবং দ্বিতীয়টি সেকেণ্ডে 16 ফুট প্রারম্ভিক বেগ-সহকারে প্রতি সেকেণ্ডে সেকেণ্ডে 6 ফুট সমত্বরণে ধাবমান হইলে কতক্ষণ পরে কণা-দুইটি দ্বিতীয়বার একত্র হইবে?

20. সমত্বরণে চলমান একটি বস্তুকণা উহার গতির চতুর্থ সেকেণ্ডে 19 ফুট এবং সপ্তম সেকেণ্ডে 27 ফুট অতিক্রম করে। দশম সেকেণ্ডে বস্তুটি দ্বারা অতিক্রান্ত দূরত্ব নির্ণয় কর।

21. একটি বিন্দু সমত্বরণে এক সেকেণ্ড চলার পরবর্তী আধ সেকেণ্ডে 25 ফুট এবং একাদশ সেকেণ্ডে 198 ফুট অতিক্রম করে। বিন্দুটির সমত্বরণ ও প্রারম্ভিক বেগ নির্ণয় কর।

22. সমত্বরণে চলমান একটি বস্তুকণা উহার গতির চতুর্থ সেকেণ্ডে 19 ফুট এবং ষষ্ঠ সেকেণ্ডে 27 ফুট অতিক্রম করে। কণাটির প্রারম্ভিক বেগ ও ত্বরণ নির্ণয় কর।

23. একটি বস্তুকণা সেকেণ্ডে 200 ফুট প্রারম্ভিক বেগ এবং সেকেণ্ডে সেকেণ্ডে 10 ফুট মন্দন সহকারে সরল রেখায় চলিতে থাকে। উহার 1500 ফুট অতিক্রম করার সময় নির্ণয় কর এবং উত্তরটি দ্ব্যর্থক কেন তাহা ব্যাখ্যা কর।

24. স্থিরাবস্থা হইতে সমত্বরণে চলমান একটি বস্তু উহার গতির দশম সেকেণ্ডে 133 ফুট অতিক্রম করে। উহার ত্বরণ নির্ণয় কর।

25. 100 গজ অতিক্রমণকালে একটি গাড়ীর বেগ ঘণ্টায় 30 মাইল হইতে ঘণ্টায় 10 মাইলে পরিণত হয়। এই মন্দন যদি সমহার হয়, তবে গাড়ীটি থামিয়া যাওয়া পর্যন্ত আরও কত পথ অতিক্রম করিবে ?

26. স্থিরাবস্থা হইতে সেকেণ্ডে সেকেণ্ডে 5 সে.মি. সমত্বরণে চলমান একটি বস্তু কতক্ষণে সেকেণ্ডে 25 সে.মি. বেগ লাভ করিবে এবং সেই সময়ে উহা কত পথ অতিক্রম করিবে ?

27. স্থিরাবস্থা হইতে সেকেণ্ডে সেকেণ্ডে 8 ফুট সমত্বরণসহ চলমান একটি বস্তু কত সেকেণ্ডে উহার গতিপথের দ্বিতীয় ফুট অতিক্রম করিবে ?

28. সমত্বরণে চলমান একটি বস্তুকণা উহার যাত্রামুহূর্তের পর পঞ্চম ও নবম সেকেণ্ডে যথাক্রমে $7\frac{1}{4}$ ও $9\frac{1}{4}$ ফুট অতিক্রম করে। কণাটির প্রারম্ভিক বেগ ও ত্বরণ নির্ণয় কর।

29. 132 গজ দীর্ঘ একটি রেলগাড়ী ব্রেকের সাহায্যে গতিরোধ করিতেছে ; এই অবস্থায় উহার দুই প্রান্ত একটি সিগন্যালের থাম যথাক্রমে 12 মাইল/ঘণ্টা ও 6 মাইল/ঘণ্টা বেগে পার হইয়া যায়। ফুট/সেকেণ্ডে উহার মন্দন নির্ণয় কর এবং গাড়িটি থামিয়া গেলে উহার পশ্চাদ্ভাগ হইতে সিগন্যালের থামটির দূরত্ব নির্ণয় কর।

30. $t$ সেকেণ্ড সময় সরলরেখায় চলমান একটি বিন্দুর $v$ ফুট/সে. বেগ নিম্নলিখিত সমীকরণ দ্বারা সূচিত হয়,

$$v = 3t^2 + 2t + 5.$$

$t$-র 0 হইতে 5 মানের জন্য একটি সময়-বেগ লেখ অঙ্কন করিয়া (i) যখন $t = 3$ তখন ত্বরণের মান এবং (ii) পঞ্চম সেকেণ্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব নির্ণয় কর।

31. সরল রেখায় চলমান একটি বস্তুকণা পর পর 3 সেকেণ্ডে যথাক্রমে 7, 9 ও 11 ফুট অতিক্রম করে। ইহা কি সমত্বরণের সহিত সঙ্গতিপূর্ণ ? যদি সঙ্গতিপূর্ণ হয়, তবে ঐ ত্বরণের মান নির্ণয় কর।

32. একটি এক্সপ্রেস গাড়ী যদি আধ মাইল দূরত্বের মধ্যে উহার ঘণ্টায় 60 মাইল বেগকে, ঘণ্টায় 15 মাইল বেগে কমাইয়া আনে, তবে কতক্ষণ যাবৎ ব্রেক প্রযুক্ত হয় এবং ইহার পর কতক্ষণ পরই বা উহা থামিয়া যায় ?

33. সমত্বরণে এবং সরল রেখায় চলমান একটি বস্তুকণা 8 সেকেণ্ডে 112 ফুট অতিক্রম করে এবং তাহার পরবর্তী আরও 126 ফুট অতিক্রম করে 6 সেকেণ্ডে। কণাটির ত্বরণ এবং পরবর্তী আরও 162 ফুট অতিক্রমণের সময় নির্ণয় কর।

34. কোন একটা প্রারম্ভিক বেগ সহকারে একটি বস্তুকণা 4 সেকেণ্ড কাল সমত্বরণে চলে ও ঐ সময়ে 84 ফুট অতিক্রম করে। তাহার পর ত্বরণ বন্ধ হয় এবং পরবর্তী 4 সেকেণ্ডে উহা 108 ফুট অতিক্রম করে। কণাটির প্রারম্ভিক বেগ ও ত্বরণ নির্ণয় কর।

35. সমত্বরণে চলমান একটি গাড়ী 30 গজ দূরে দূরে অবস্থিত পর পর তিনটি টেলিগ্রাফ পোস্ট অতিক্রম করে। $P$ হইতে $Q$-তে যাইতে গাড়ীটির লাগে 5 সেকেণ্ড এবং $Q$ হইতে $R$-এ যাইতে লাগে 4 সেকেণ্ড। গাড়ীটি $P$ ও $R$ পোস্টকে কত কত বেগে অতিক্রম করে ?

36. $f$ সমত্বরণে চলমান কোন বস্তুকণা পর পর $t$ ও $t'$ সেকেণ্ডে যথাক্রমে $s$ ও $s'$ দূরত্ব অতিক্রম করে। প্রমাণ কর যে,

$$f=\frac{2\left(\frac{s'}{t'}-\frac{s}{t}\right)}{t+t'}.$$

37. 2 ফুট/সেকেণ্ড² সমত্বরণে চলমান একটি বস্তুকণা যাত্রার শুরুতে $u$ ফুট/সেকেণ্ড সমবেগে চলমান অপর একটি বস্তুকণা হইতে 16 ফুট আগাইয়া আছে।

(i) উহারা একবার মাত্র মিলিত হইলে $u$-র মান কত ?

(ii) উহারা দুইবার মিলিত হইলেই বা $u$-র সর্বনিম্ন পূর্ণসংখ্যক মান কত হইবে ?

(iii) $u$-র মান 7 ফুট/সেকেণ্ড হইলে কি উহারা মিলিত হইবে ? না হইলে, কেন ?

38. দুইটি বস্তুকণার একটি 12 ফুট/সেকেণ্ড সমবেগে এবং অপরটি 3 ফুট/সেকেণ্ড² সমত্বরণে একই স্থান হইতে যাত্রা শুরু করিল। উহারা পুনরায় মিলিত হইবার পূর্বে উহাদের মধ্যে সর্বাধিক দূরত্ব কত হইবে এবং কখনই বা উহাদের মধ্যে দূরত্ব সর্বাধিক হইবে ?

39. দুইটি বস্তুকণা একই সরল রেখায় যথাক্রমে $f$ ও $f'$ সমত্বরণে চলমান। একই সরল রেখায় কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে উহাদের দূরত্ব যখন যথাক্রমে $a$ ও $a'$, তখন উহাদের বেগ যথাক্রমে $u$ ও $u'$. প্রমাণ কর যে, তাহারা পরস্পর দুইবারের বেশী মিলিত হইতে পারিবে না। যদি উহারা পরস্পর দুইবার মিলিত হয়, তবে ঐ দুইবার মিলনের সময়ের ব্যবধান হইবে,

$$\frac{2}{f-f'}\sqrt{\{(u-u')^2-2(a-a')(f-f')\}}.$$ [ C. U. 1938 ]

40. স্থির অবস্থা হইতে যাত্রা শুরু করিয়া একটি বস্তুকণা প্রথমে $a$ সমত্বরণে এবং পরবর্তী অংশ $b$ সমমন্দনে চলে। $t$ সময়ে পরে বস্তুকণাটি থামিলে এবং ঐ সময়ে মোট সরণ $s$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $2(a+b)s=abt^2$. [ C. U. 1945 ]

41. সরল রেখায় সমত্বরণে চলমান একটি বস্তুকণা যথাক্রমে 0, $n$, $2n$ ও $3n$ সেকেণ্ডে কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে $a, b, c$ ও $d$ দূরবর্তী চারিটি বিন্দু অতিক্রম করে। প্রমাণ কর যে,

(i) $d-a=3(c-b)$,

(ii) প্রাথমিক বেগ $=\dfrac{4b-3a-c}{2n}$

এবং (iii) ত্বরণ $=\dfrac{c+a-2b}{n^2}$. [ C. U. 1946 ]

42. সরল রেখায় সমত্বরণে চলমান একটি বস্তুকণা $t$-তম সেকেণ্ডে $x$ ফুট এবং $(t+n)$-তম সেকেণ্ডে $y$ ফুট অতিক্রম করিলে দেখাও যে, বস্তুকণাটির ত্বরণ হইল

$\dfrac{y-x}{n}$ ফুট/সেকেণ্ড$^2$. [ W. B. H. S. 1960 ]

43. একটি বস্তুকণা স্থির অবস্থা হইতে শুরু করিয়া $f$ সমত্বরণে একই অভিমুখে চলমান। প্রমাণ কর যে, $m$-তম সেকেণ্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব $(m+n)$-তম এবং $(m-n)$-তম সেকেণ্ডে অতিক্রান্ত দূরত্বের সমষ্টির অর্ধেক। [ C. U. 1957 ]

44. একটি বস্তুকণা সরল রেখায় $m$ ফুট/সেকেণ্ড$^2$ সমত্বরণে এবং $mn$ ফুট/সেকেণ্ড প্রারম্ভিক বেগ-সহ চলমান। দেখাও যে, $(n+k)$ সেকেণ্ড পরে বস্তুকণাটি $(n-k)$ সেকেণ্ডের মাথায় যে অবস্থানে ছিল, সেই অবস্থান একই বেগে অতিক্রম করিবে।

[ H.S. B. S. E. 1963 ]

45. দুইটি স্টেশনের মধ্যবর্তী দূরত্বের $\dfrac{1}{m}$ অংশ যাইতে একটি ট্রেন সমত্বরণে চলে এবং ঐ দূরত্বের $\dfrac{1}{n}$ অংশ সমমন্দনে চলে ; ট্রেনটি এক স্টেশনে স্থির অবস্থা হইতে যাত্রা শুরু করিয়া অপর স্টেশনে আসিয়া থামে। প্রমাণ কর যে, উহার সর্বাধিক বেগ ও গড় বেগের অনুপাত হইল $\left(1+\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}\right):1.$ [ B. H. U. 1942 ]

46. একটি লিফ্‌ট স্থির অবস্থায় শুরু করিয়া প্রথমে $f$ সমত্বরণে, তাহার পর কিছুটা সমবেগে এবং সর্বশেষে সমমন্দন $f$ সহ উপরের দিকে ওঠে। মোট অতিক্রান্ত দূরত্ব $s$ এবং ঐ দূরত্ব অতিক্রমণের মোট সময় $t$ হইলে দেখাও যে, লিফ্‌টটি যতক্ষণ ধরিয়া সমবেগে চলে তাহা হইল $t^2=\left(\dfrac{4s}{f}\right)^{\frac{1}{2}}$. [ H. S. B. S. E. 1963 ]

47. একটি ট্রেন স্থির অবস্থা হইতে যাত্রা শুরু করিয়া উহার যাত্রাপথের প্রথমাংশ সমত্বরণে চলিয়া সর্বাধিক ঘণ্টায় 30 মাইল বেগ অর্জন করে। ইহার পর সমমন্দনে চলিয়া অবশেষে স্থির হয়। সমগ্র যাত্রাপথের সময় 15 মিনিট হইলে, সমগ্র অতিক্রান্ত দূরত্ব নির্ণয় কর।

48. একটি ট্রেন 2 মাইল দূরবর্তী দুইটি স্টেশনের একটি হইতে যাত্রা শুরু করিয়া

4 মিনিট পরে দ্বিতীয় স্টেশনে আসিয়া থামে। উহা যাত্রাপথের প্রথম অংশ $x$ সমত্বরণে এবং পরবর্তী অংশ $y$ সমমন্দনে চলিলে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=4.$$ [ G. U. 1934 ]

49. একটি ট্রেন স্থির অবস্থা হইতে যাত্রা শুরু করিয়া সরল রেখায় উহার যাত্রাপথে $t$ সময় পরে আসিয়া থামে। উহা $\frac{2t}{n}$ সময় ধরিয়া সমত্বরণে চলিয়া সর্বাধিক $v$ বেগ অর্জন করে। তাহার পর $\frac{(2n-3)t}{n}$ সময় ধরিয়া $v$ সমবেগে চলে এবং সর্বশেষ $\frac{t}{n}$ সময় ধরিয়া সমমন্দনে চলে। প্রমাণ কর যে, উহার গড়বেগ হইল $\frac{(2n-3)v}{2n}$.

[ H. S. B. S. E. 1962 ]

50. একটি ট্রেন ঘণ্টায় 20 মাইল সমবেগে এবং অপর একটি ট্রেন উহার পিছনে পিছনে ঘণ্টায় 30 মাইল সমবেগে চলিতেছে। যখন ট্রেন-দুইটি $26\frac{2}{3}$ ফুট দূরে রহিয়াছে, সেই সময় দ্রুতগামী ট্রেনটি সমমন্দনে চলিতে আরম্ভ করিল। যখন ঐ দ্রুতগামী ট্রেনটি অপর ট্রেনটিকে প্রায় ধরিয়া ফেলে, তখন উহাদের বেগ সমান হয়। কতক্ষণ ধরিয়া দ্রুতগামী ট্রেনটি সমমন্দনে চলিয়াছে এবং ঐ সমমন্দনের হার কত ?

51. একটি বস্তুকণা স্থির অবস্থা হইতে যাত্রা শুরু করিয়া সমত্বরণে চলমান। কতক্ষণ পরে উহা এমন অবস্থানে পৌছাইবে যে, উহার ঠিক পরবর্তী সেকেণ্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব উহার পূর্বে অতিক্রান্ত মোট দূরত্বের সমান হইবে ? [ B. H. U. 1952 ]

## পঞ্চম অধ্যায়

# অভিকর্ষ ও অভিকর্ষজ ত্বরণ

## ( Gravity and acceleration due to gravity )

**5·1.** এই বিরাট বিশ্বের প্রতিটি জড়বস্তু অপর প্রতিটি জড়বস্তুকে নিজের দিকে টানিতেছে। আকাশের অসংখ্য গ্রহতারার পরস্পরের প্রতি টান বা আকর্ষণকে বলা হয় **মহাকর্ষ**। পৃথিবীও এই জড়জগতের একটি বস্তুপিণ্ড, কাজেই উহাও উহার উপরকার এবং নিকটস্থ সকল বস্তুকে নিজের কেন্দ্রের দিকে অহর্নিশ টানিতেছে। এই টান মহাকর্ষের বিশেষ একটি উদাহরণ মাত্র; তবে উহার একটি স্বতন্ত্র নাম আছে। সেই নাম হইল **অভিকর্ষ**।

অভিকর্ষ একটি বল। উহা **অভিকর্ষজ বল** নামে পরিচিত।

বলা বাহুল্য, অভিকর্ষজ বলের জন্যই বস্তুসমূহ নিচের দিকে পড়ে। এই বল পতনশীল বস্তুর মধ্যেই যে ত্বরণ সঞ্চারিত করে, তাহাকেই বলা হয় **অভিকর্ষজ ত্বরণ**। এই অভিকর্ষ ত্বরণকে ইংরেজীতে gravity বলা হয়। তাই এই ইংরেজী শব্দটির আদ্যক্ষর '$g$' দ্বারা অভিকর্ষজ ত্বরণ সূচিত করা হয়।

(i) পতনশীল বস্তুমাত্রই অভিকর্ষজ বলের অধীন, কাজেই উহারা অভিকর্ষজ ত্বরণ-সহ নিচে পড়িতেছে। **অভিকর্ষজ ত্বরণ সকল বস্তুর পক্ষেই সমান**। কয়েকটি পরীক্ষা দ্বারা ইহা সহজেই প্রমাণ করা যায়।

(a) **প্রথম পরীক্ষা**: একটুকরা কাগজ এবং একটি মুদ্রা লইয়া যদি উপর হইতে ছাড়িয়া দেওয়া যায়, তবে মুদ্রাটি আগে মাটিতে পড়িবে। এইবার মুদ্রাটি অপেক্ষা কাগজটি সামান্য একটু ছোট করিয়া কাটিয়া লওয়া যাক। তারপর কাগজটিকে মুদ্রাটির উপর গায়ে লাগাইয়া ছাড়িয়া দিলে দেখা যায়, মুদ্রাটি ও কাগজের টুকরাটি ঠিক একই সময়ে মাটিতে পড়ে।

প্রথমবার মুদ্রাটি যে আগে পড়িয়াছিল তাহার কারণ, বাতাসের চাপ কাগজকে আটকাইয়া রাখিতেছিল। দ্বিতীয়বার মুদ্রাটিই বাতাসের চাপ ভেদ করায় কাগজটির আর সেই বাধা রহিল না। সেইজন্য মুদ্রা ও কাগজের টুকরা একই সময়ে মাটিতে পড়িল। ইহা হইতেই প্রমাণ হয় যে, কাগজ ও মুদ্রার উপর অভিকর্ষজ ত্বরণ সমান। নহিলে উভয়ে কখনও একই সময়ে মাটিতে পড়িত না।

(b) **দ্বিতীয় পরীক্ষা**: লম্বা একটি কাচের নল লওয়া হইল। নলের মুখের কাছে একটি ক্লিপ বা ধারকের সাহায্যে একটি মুদ্রা ও একটি পালক ধরিয়া রাখা হইয়াছে। তারপর যন্ত্র দ্বারা নলের ভিতর হইতে বায়ু সম্পূর্ণভাবে নিষ্কাশিত করিয়া

দেওয়া হইল। এইবার ক্লিপটি আলগা করিলে দেখা যাইবে মুদ্রা ও পালকটি একসঙ্গে নিচে পড়িতে শুরু করে এবং একই সঙ্গে নলের তল স্পর্শ করে।

বাতাসের মধ্যে একটি মুদ্রা ও একটি পালক ছাড়িয়া দিলে বাতাসের বাধা হালকা পালকটি আটকাইয়া রাখে। মুদ্রাটি কিন্তু অনায়াসে সেই বাধা ঠেলিয়া নিচে নামিতে পারে। বাতাস না থাকিলে মুদ্রা ও পালক কেবলমাত্র অভিকর্ষজ বলের অধীন হয়। উপরের পরীক্ষায় দেখা গেল যে, বায়ুহীন স্থানে মুদ্রা ও পালক ঠিক একই সময়ে একই উচ্চতা হইতে তল স্পর্শ করে। অতএব একই স্থানে অভিকর্ষজ ত্বরণ সকল বস্তুর পক্ষে এক ও অভিন্ন।

(ii) **অভিকর্ষজ ত্বরণ সমহার (Acceleration due to gravity is uniform)ঃ** পরীক্ষা দ্বারা দেখা গিয়াছে যে, অভিকর্ষজ ত্বরণ সমহারও বটে। নিচে একটি পরীক্ষার বিবরণ দেওয়া যাইতেছে—

(ক) একটা মোটামুটি ভারী জিনিসকে কয়েকবার বিভিন্ন উচ্চতা হইতে ক্লিপের সাহায্যে ছাড়িয়া দেওয়া হইল এবং প্রত্যেকবার মাটিতে পড়া পর্যন্ত সময় (স্টপ-ওয়াচের দ্বারা) যথাসম্ভব নির্ভুলভাবে নির্ণয় করা হইল। দেখা যাইবে—

4 ফুট উচ্চতা হইতে মাটিতে পড়িতে $\frac{1}{2}$ সেকেণ্ড লাগে,
16 " " " " " 1 " "
64 " " " " " 2 " "



এখন, আমরা জানি সমত্বরণের বেলায়

$$\text{সরণ} = \tfrac{1}{2}\ \text{ত্বরণ} \times \text{সময়}^2$$

অর্থাৎ, $s = \frac{1}{2}ft^2$

অথবা, $\frac{2s}{t^2} = f$

প্রথমক্ষেত্রে, $\frac{2s}{t^2} = \frac{2\times 4}{(\frac{1}{2})^2} = \frac{8}{\frac{1}{4}} = 32$ ফুট/সে$^2$ ;

দ্বিতীয়ক্ষেত্রে, $\frac{2s}{t^2} = \frac{2\times 16}{1^2} = \frac{32}{1} = 32$ ফুট/সে$^2$ ;

তৃতীয়ক্ষেত্রে, $\frac{2s}{t^2} = \frac{2\times 64}{2^2} = 2\times 16 = 32$ ফুট/সে$^2$।

সুতরাং, প্রত্যেক ক্ষেত্রে $f$ বা ত্বরণ 32 ফুট/সে$^2$। কাজেই **সর্বক্ষেত্রে অভিকর্ষজ ত্বরণ সমান।**

(iii) **অভিকর্ষজ ত্বরণের মান (Magnitude of the acceleration due to gravity)ঃ**

উপরে বর্ণিত পরীক্ষাগুলির মতো আরও অনেক পরীক্ষা দ্বারা দেখা গিয়াছে যে,

অবাধে পতনশীল বস্তু সমত্বরণে নিচে পড়ে। বিশেষ স্থানে এই ত্বরণ আবার সকল বস্তুর পক্ষেই সমান।

স্থান-পরিবর্তনের সহিত অভিকর্ষজ ত্বরণের সামান্য একটু পরিবর্তন ঘটে। পরীক্ষা দ্বারা দেখা গিয়াছে, নিরক্ষরেখা বরাবর স্থানে উহার মান ক্ষুদ্রতম, এবং উত্তর ও দক্ষিণ মেরুতে উহার মান বৃহত্তম। অভিকর্ষজ ত্বরণের ক্ষুদ্রতম মান = 32·091 ফুট/সে$^2$ বা 978·10 সে.মি./সে$^2$ এবং গরিষ্ঠ মান = 32·255 ফুট/সে$^2$ বা 983·11 সে.মি./সে$^2$।

পৃথিবীর কেন্দ্র হইতে দূরত্ব যত বাড়ে অভিকর্ষজ ত্বরণ সেই অনুপাতে কমে। খুব উঁচু পর্বতের শিখরে এই ত্বরণের পরিমাণ সামান্য একটু কম। আবার অতি গভীর খনির তলায়ও উহা সামান্য একটু কম। লণ্ডনের সমুদ্রতলে উহার মান 32·191 ফুট/সে$^2$ বা 981·17 সে.মি./সে$^2$। সাধারণভাবে অভিকর্ষজ ত্বরণ বা $g$-র মান ধরা হয় 32 ফুট/সে$^2$ বা 981 সে.মি./সে$^2$।

### 5·2. স্থিরাবস্থা হইতে অভিকর্ষাধীন গতি (Motion from rest under gravity) :

স্থিরাবস্থা হইতে কোন বস্তু যখন নিচে পড়িতে থাকে, তখন উহাকে একমাত্র অভিকর্ষজ বলের অধীন বলিয়াই গণ্য করা হয়। প্রকৃতপক্ষে অভিকর্ষজ বল ছাড়া পতনশীল বস্তুর উপর বাতাসের ঊর্ধ্বচাপও ক্রিয়া করে। কিন্তু তাহা অত্যন্ত অল্প বলিয়া সাধারণতঃ উপেক্ষিত হয়। সুতরাং যাহা-কিছু পড়িতেছে তাহা কেবল অভিকর্ষজ বলের অধীন, কাজে-কাজেই অভিকর্ষজ ত্বরণসহ পতনশীল, এইরূপ ধরিয়া লইব।

এক্ষেত্রে $s = ut + \frac{1}{2}ft^2$ এই সূত্রটি প্রয়োগ করা যাইবে। এখানে $u = 0$ এবং $f = g$. $s$ এখানে উচ্চতা সূচিত করে বলিয়া '$s$'-এর বদলে '$h$' (height-এর আদ্যক্ষর) লেখা যায়। সুতরাং সূত্র দাঁড়ায় এইরূপ :

$$h = \tfrac{1}{2}gt^2. \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (1)$$

### 5·3. স্থিরাবস্থা হইতে অভিকর্ষাধীন বস্তু কর্তৃক n-তম সেকেণ্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব নির্ণয় (To find the distance fallen from rest under gravity in the n-th second) :

উপরের (1)-নম্বর সূত্রে $t$-র স্থলে $n$ লিখিলে,

$n$ সেকেণ্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব বা $h_1 = \frac{1}{2}gn^2$

$\therefore$ $(n-1)$ " " " বা $h_2 = \frac{1}{2}g(n-1)^2$

$\therefore$ **n-তম সেকেণ্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব** $= h_1 - h_2$

$$= \tfrac{1}{2}gn^2 - \tfrac{1}{2}g(n-1)^2 = \tfrac{1}{2}g\{n^2 - (n-1)^2\}$$

$$= \tfrac{1}{2}g\,(2n-1). \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (2)$$

**উদাহরণ 1.** কোন একটি পতনশীল বস্তু মাটিতে পড়ার আগের সেকেণ্ডে 80 ফুট দূরত্ব অতিক্রম করে ; কত ফুট উচ্চতা হইতে বস্তুটি পড়িয়াছিল ?

বস্তুটি যেন $n$-তম সেকেণ্ডে 80 ফুট দূরত্ব অতিক্রম করে।

$n$-তম সেকেণ্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব $= \frac{1}{2}g(2n-1)$.

$\therefore \quad 80 = \frac{1}{2}g(2n-1),$

বা $\quad 80 = 16(2n-1) = 32n - 16.$

$\therefore \quad 32n = 96$

$\therefore \quad n = 3.$

$\therefore \quad h = \frac{1}{2}gt^2$ সূত্রানুসারে নির্ণেয় উচ্চতা যদি $h$ হয়, তবে

$$h = \frac{1}{2} \times 32 \times 3^2 = 144 \text{ ফুট।}$$

## 5·4. h-পরিমাণ উচ্চতা হইতে পতনকাল ও ঐ সময়ের মাথায় বেগ নির্ণয় (To find the time of fall through a height h ft, and the velocity at the end of that time) :

$u = 0$ বলিয়া আমরা জানি, $s = \frac{1}{2}ft^2$, এবং $v^2 = 2fs$.

এক্ষেত্রে $h = \frac{1}{2}gt^2$, এবং $v^2 = 2gh$

$$\therefore \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$$

$$\text{এবং} \quad v = \sqrt{2gh} \quad \cdots \quad \cdots \quad (4)$$

[ * $h$-উচ্চতা হইতে পতনের পর বেগ $\sqrt{2gh}$ হয় বলিয়া কখনও কখনও এই বেগকে $h$-উচ্চতাজনিত বেগ বলা হয়। ]

**উদাহরণ 2.** একটি স্তম্ভের উপর হইতে 3 সেকেণ্ডে একটি ঢিল মাটিতে পড়ে। স্তম্ভটি কত উচ্চ ?

$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ সূত্রানুসারে,

$3 = \sqrt{\frac{2h}{32}}$ বা $3 = \sqrt{\frac{h}{16}}$ বা $9 = \frac{h}{16}$.

$\therefore \quad h = 144$ ফুট।

**উদাহরণ 3.** উপর হইতে 1600 ফুট গভীর একটা খনির মধ্যে একখণ্ড পাথর পড়িয়া গেল। উহা কখন ও কত বেগে খনির তলায় আঘাত করিবে ?

এখানে $1600=\frac{1}{2}gt^2$ বা $1600=16t^2$.

$\therefore \quad t=10$ সে.।

আবার, $v=\sqrt{2gh}$ সূত্রানুসারে,

প্রান্তিক বেগ $=\sqrt{2\times 32\times 1600}=8\times 40$ বা সেকেণ্ডে 320 ফুট।

$\therefore$ পাথরখণ্ডটি 10 সেকেণ্ড পর সেকেণ্ডে 320 ফুট বেগে খনির তলায় আঘাত করিবে।

**5·5. উল্লম্বদিকে নিচে নিক্ষিপ্ত বস্তুর গতি (Motion of a body projected vertically down) :**

নিচে নিক্ষেপ বিচারকালে বস্তুর উল্লম্বরেখার বেগ বুঝিতে হইবে। এক্ষেত্রে নিক্ষেপ-বেগই প্রারম্ভিক বেগ।

সুতরাং, সরণ $s$, ত্বরণ $g$, সময় $t$, নিক্ষেপ-বেগ বা প্রারম্ভিক বেগ $u$ এবং প্রান্তিক বেগ $v$ ধরিলে, এখানে

$$\mathbf{v=u+gt} \quad \cdots \quad \cdots \quad (5)$$

$$\mathbf{s=ut+\tfrac{1}{2}gt^2} \quad \cdots \quad \cdots \quad (6)$$

এবং $$\mathbf{v^2=u^2+2gs} \quad \cdots \quad \cdots \quad (7)$$

**উদাহরণ 4.** 550 ফুট উচ্চ হইতে উল্লম্বভাবে নিক্ষিপ্ত কোন বস্তু যদি 5 সেকেণ্ডে ভূতল স্পর্শ করে, তবে নিক্ষেপ-বেগ কত ? কত বেগে উহা ভূতলে আঘাত করে ?

$s=ut+\frac{1}{2}gt^2$ সূত্রানুসারে, $550=5u+\frac{1}{2}.32.5^2=5u+400$

বা $5u=150$ ; $\therefore u=30$ ; $\therefore$ নিক্ষেপ-বেগ সেকেণ্ডে 30 ফুট।

আবার, $v=u+gt$ সূত্রানুসারে, প্রান্তিক বেগ $=30+32\times 5=190$.

$\therefore$ সেকেণ্ডে 190 ফুট বেগে বস্তুটি ভূতলে আঘাত করে।

**উদাহরণ 5.** সেকেণ্ডে 80 ফুট বেগে নিক্ষিপ্ত কোন বস্তু কত সেকেণ্ডে 156 ফুট নিচে পড়ে এবং তখন উহার বেগ কত হইবে ?

$v^2=u^2+2gs$ সূত্রানুসারে, $v^2=80^2+2.32.156$.

$\therefore \quad v=\sqrt{6400+64.156}=128$.

আবার, $v=gt$ সূত্রানুসারে, $128=80+32t$ ; $\therefore 48=32t$.

$$\therefore \quad t=\frac{\overset{3}{\cancel{48}}}{\underset{2}{\cancel{32}}}=1\tfrac{1}{2} \text{ সে.।}$$

$\therefore$ বস্তুটি $1\frac{1}{2}$ সেকেণ্ড পরে 156 ফুট নিচে নামিবে এবং তখন উহার বেগ হইবে সেকেণ্ডে 128 ফুট।

### 5·6. ঊর্ধ্বমুখে উৎক্ষিপ্ত বস্তুর গতি (Motion of a body projected vertically up) :

ঊর্ধ্বমুখে উৎক্ষেপ বলিতে লম্বভাবে উৎক্ষেপ বুঝিতে হইবে। এখানে উৎক্ষেপ-বেগ ও অভিকর্ষজ ত্বরণ বিপরীতমুখী। স্থতরাং একটিকে ধনাত্মক ধরিলে অপরটিকে ঋণাত্মক ধরিতে হইবে। এইরূপ ক্ষেত্রে ঊর্ধ্বমুখে বেগকে ধনাত্মক ধরাই রীতি। কাজেই এখানে $g$-কে $-g$ লিখিতে হয়। ফলে আনুষঙ্গিক স্থত্রগুলির এইরূপ পরিবর্তন ঘটে :—

$$\mathbf{v = u - gt} \quad \cdots \quad (8)$$

$$\mathbf{s = ut - \tfrac{1}{2}gt^2} \quad \cdots \quad (9)$$

$$\mathbf{v^2 = u^2 - 2gs} \quad \cdots \quad (10)$$

### 5·7. উল্লম্বদিকে উৎক্ষিপ্ত বস্তুর উত্থানকাল নির্ণয় (To find the time of rise of a body projected vertically up) :

উৎক্ষিপ্ত বস্তুর বেলায় অভিকর্ষজ ত্বরণ উৎক্ষেপ-বেগের বিপরীতমুখী অর্থাৎ মন্দন বলিয়া প্রারম্ভিক বেগ ক্রমাগত হ্রাস পায়। কমিতে কমিতে একটা সময়ে এই বেগ শূন্যে পরিণত হয়। তাহার পরমূহূর্ত হইতেই বস্তুটি নিচে পড়িতে থাকে। স্থতরাং প্রারম্ভিক বেগ শূন্যে পরিণত হওয়া পর্যন্ত বস্তুটির উত্থানকাল। $u$ যদি প্রারম্ভিক বা উৎক্ষেপ-বেগ হয়, তবে প্রান্তিক বেগ $v$ এখানে শূন্য। $t$ যেন উত্থানকাল।

$$\therefore \quad 0 = u - gt,$$

বা $u = gt,$

বা $\mathbf{t = \dfrac{u}{g}}, \quad \cdots \quad \cdots \quad (11)$

অর্থাৎ **উত্থানকাল** $= \dfrac{\text{উৎক্ষেপ-বেগ}}{\mathbf{g}}$ ।

উত্থানকালকে উচ্চতম স্থানে আরোহণের সময়ও বলা যায়। কারণ, উৎক্ষিপ্ত বস্তু সর্বোচ্চ স্থান পর্যন্ত উঠিয়াই পড়িতে আরম্ভ করে।

### 5·8. সর্বাধিক উচ্চতা নির্ণয় (To find the greatest height) :

পূর্বেই বলা হইয়াছে, উৎক্ষেপ-বেগ যেখানে শূন্যে পরিণত হয় সেই বিন্দুর উচ্চতাই সর্বাধিক। ইহার পরেই উৎক্ষিপ্ত বস্তু নিচে নামিতে থাকে। কাজেই $v^2 = u^2 - 2gs$ স্থত্রে $v = 0$ লিখিলে $s$-এর মানই সর্বাধিক উত্থানের মান স্থচিত করিবে।

$$0 = u^2 - 2gs$$

অথবা $u^2 = 2gs$

বা $s = \frac{u^2}{2g}$

$s$-এর স্থলে $h$ লিখিলে, $\mathbf{h = \frac{u^2}{2g}}$ ... ... (12)

[ কখনও কখনও এই সর্বাধিক উচ্চতাকে $u$-বেগজনিত উচ্চতা (the height due to a velocity $u$) বলা হয়। ]

**উদাহরণ 6.** সেকেণ্ডে 88 ফুট বেগে উৎক্ষিপ্ত বস্তু সর্বাধিক কত উচ্চতায় ও কত সময়ে উঠিবে ?

$$h = \frac{u^2}{2g} \text{ সূত্রানুসারে, } h = \frac{88 \times 88}{32 \times 2} \text{ বা } 121 \text{ ফুট ;}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সর্বাধিক উচ্চতা $= 121$ ফুট,

আবার, $t = \frac{u}{g}$ অনুসারে, $t = \frac{\overset{11}{\cancel{88}}}{\underset{4}{\cancel{32}}} = 2\frac{3}{4}$ সে.।

$\therefore$ $2\frac{3}{4}$ সেকেণ্ডে বস্তুটি সর্বাধিক উচ্চে উঠিবে।

**5·9. সমগ্র উৎপতনকাল নির্ণয় (To find the total time of flight) :** উৎক্ষিপ্ত বস্তু সর্বাধিক উচ্চতায় আরোহণ করার পর নিচে নামিতে থাকে এবং শেষ পর্যন্ত উৎক্ষেপ-বিন্দুতে ফিরিয়া আসে। ফলে, শেষ পর্যন্ত তাহার সরণ শূন্য হয়। কাজেই $s = vt + \frac{1}{2}ft^2$ সূত্রে $s = 0$ এবং $f = -g$ বসাইয়া আমরা পাই,

$$0 = ut - \tfrac{1}{2}gt^2 \text{ বা, } t(u - \tfrac{1}{2}gt) = 0, \text{ কিন্তু } t = 0 \text{ নয়।}$$

$\therefore$ $u - \frac{1}{2}gt = 0.$

$\therefore$ $u = \frac{1}{2}gt.$

$\therefore$ $\mathbf{t = \frac{2u}{g}}.$ ... ... ... (13)

**উদাহরণ 7.** ঊর্ধ্বে উৎক্ষিপ্ত কোন বস্তু 10 সেকেণ্ডে উৎক্ষেপ-বিন্দুতে প্রত্যাবর্তন করে। বস্তুটি কত বেগে কত ফুট পর্যন্ত উপরে ওঠে ?

$\therefore$ $t = \frac{2u}{g}$ সূত্রানুসারে, $10 = \frac{\cancel{2}u}{\underset{16}{\cancel{32}}}$. $\therefore$ $u = 160.$

$\therefore$ বস্তুটি উৎক্ষেপ-বেগ সেকেণ্ডে 160 ফুট।

আবার, $h=\frac{u^2}{2g}$ বা $h=\frac{\overset{80}{\cancel{160}}\times\overset{5}{\cancel{160}}}{\cancel{2}\times\cancel{32}}=400.$

$\therefore$ বস্তুটি 400 ফুট পর্যন্ত উপরে ওঠে।

## 5·10. উত্থানকাল ও পতনকালের সমতা (Equality of the time of rise and the time of fall) :

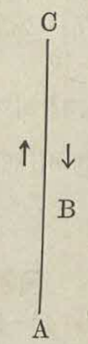
5·7 অনুচ্ছেদে দেখানো হইয়াছে যে, উৎক্ষিপ্ত বস্তুর উত্থানকাল $=\frac{u}{g}$।

এখন দেখা গেল, উত্থান ও পতন মিলিয়া সমগ্র উৎপতনকাল $=\frac{2u}{g}$।

$\therefore$ পতনকাল $=\frac{2u}{g}-\frac{u}{g}=\frac{u}{g}=$ উত্থানকাল।

$\therefore$ **পতনকাল ও উত্থানকাল সমান।**

শুধু উৎক্ষেপ-বিন্দুর তুলনাতেই নয়, অন্য যে-কোন উচ্চতায় যে-কোন বিন্দু হইলেও উত্থানকাল ও পতনকাল সমান হইবে। একটু ভাবিলেই ইহা বুঝিতে পারিবে। ধর, উৎক্ষেপ-বিন্দু A হইতে $h$ ফুট উচ্চে B একটি বিন্দু। উৎক্ষেপ-বেগ যেন $u$ ফুট/সেকেণ্ড। উৎক্ষিপ্ত বস্তুটি উচ্চতম বিন্দু C পর্যন্ত উঠিয়া যেন নামিতে থাকে এবং B বিন্দু হইয়া আবার A বিন্দুতে ফিরিয়া আসে। এখন B বিন্দুতে উৎক্ষিপ্ত বস্তুর বেগ যদি $v$ হয়, তবে $v^2=u^2-2gh$ সূত্র প্রয়োগ করিয়া আমরা $v=\pm\sqrt{u^2-2gh}$ পাই। এখানে লক্ষ্য কর $v$-র মান দুইটি—একটি ধন-চিহ্নিত, অন্যটি ঋণ-চিহ্নিত। আমরা জানি যে, উঠিবার সময় বেগ ধনাত্মক আর নামিবার সময় ঋণাত্মক। এখন উভয় ক্ষেত্রেই সরণ $h$ ফুট। কাজেই দিক্ বিচার না করিলে উভয় ক্ষেত্রেই বেগ সমান। দিক্ বিচারে ইহারা সমান ও বিপরীতমুখী। অর্থাৎ একটি মান যদি $\sqrt{u^2-2gh}$ হয়, তবে অপরটির মান $-\sqrt{u^2-2gh}$।



27নং চিত্র

এইবার মনে কর, B বিন্দু হইতে উঠিবার সময় $v$-ই যেন প্রারম্ভিক বেগ। উচ্চতম বিন্দুতে এই বেগ শূন্য হইবে। $\therefore\ 0=v-gt$ অর্থাৎ $t=\frac{v}{g}$,

$$\text{বা } t=\frac{\sqrt{u^2-2gh}}{g},\ [\because\ v=\sqrt{u^2-2gh}\,] \quad\cdots\quad\cdots\quad (a)$$

নামিবার সময় প্রারম্ভিক বেগ শূন্য এবং প্রান্তিক বেগ $-\sqrt{u^2-2gh}$.

$\therefore\ -\sqrt{u^2-2gh}=0-gt.$

$$\therefore\ \sqrt{u^2-2gh}=gt \quad \text{অর্থাৎ} \quad t=\frac{\sqrt{u^2-2gh}}{g}. \quad\cdots\quad (b)$$

$(a)$ ও $(b)$ হইতে স্পষ্টই দেখা যায় যে, উত্থানকাল ও পতনকাল সমান।

**5·11. কোন নির্দিষ্ট উচ্চতা আরোহণের সময় (The time for rising to a given height) :**

**প্রথম পদ্ধতি :** $h$ নির্দিষ্ট উচ্চতা, $u$ উৎক্ষেপ-বেগ, $g$ অভিকর্ষজ ত্বরণ ও $t$ সময় হইলে,

$$h = ut - \tfrac{1}{2}gt^2$$

অর্থাৎ $gt^2 - 2ut + 2h = 0.$

$$\therefore \quad t = \frac{2u \pm \sqrt{4u^2 - 8gh}}{2g} = \frac{u \pm \sqrt{u^2 - 2gh}}{g}.$$

এইভাবে $t$-র দুইটি মান পাওয়া গেল। ইহার কারণ, উৎক্ষিপ্ত বস্তুটি নির্দিষ্ট উচ্চতায় দুইবার আসে, একবার উঠিবার সময়, আর একবার উচ্চতম বিন্দু হইতে নামিবার সময়। আগের অনুচ্ছেদে দেখা গিয়াছে যে, এইরূপ নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে উচ্চতম বিন্দুতে উঠিতে এবং সেই বিন্দু হইতে উক্ত উচ্চতায় নামিতে একই সময় $\frac{\sqrt{u^2 - 2gh}}{g}$ লাগে। এছাড়া মোট উত্থানকাল ও মোট পতনকাল প্রত্যেকেই $\frac{u}{g}$। কাজেই উঠিবার সময় $h$-উচ্চতা পৌছিতে লাগে $\frac{u}{g} - \frac{\sqrt{u^2 - 2gh}}{g}$ বা $\frac{u - \sqrt{u^2 - 2gh}}{g}$

আর নামিবার বেলায় লাগে,

$$\frac{u}{g} + \frac{\sqrt{u^2 - 2gh}}{g} \text{ বা } \frac{u + \sqrt{u^2 - 2gh}}{g}.$$

**দ্বিতীয় পদ্ধতি :** $h$-উচ্চতায় প্রান্তিক বেগ যদি $v$ হয়, তবে আমরা জানি $v^2 = u^2 - 2gh$ অর্থাৎ $v = \pm\sqrt{u^2 - 2gh}$ এবং $v = u - gt.$

$$\therefore \quad t = \frac{u - v}{g} = \frac{u \pm \sqrt{u^2 - 2gh}}{g}.$$

$t$-র মান কেন দুইটি তাহা উপরে ব্যাখ্যা করা হইয়াছে।

**উদাহরণ 8.** সেকেণ্ডে 48 ফুট বেগে উৎক্ষিপ্ত একটি বস্তু কত সেকেণ্ডে 36 ফুট উপরে উঠিবে ?

$s = ut - \tfrac{1}{2}gt^2$ সূত্রানুসারে,

$$36 = 48t - 16t^2$$

বা, $4t^2 - 12t + 9 = 0$

বা, $(2t - 3)^2 = 0$

বা, $2t = 3$ বা $t = \frac{3}{2} = 1\tfrac{1}{2}$ সে.

$\therefore$ নির্ণেয় সময় $= 1\tfrac{1}{2}$ সেকেণ্ড।

**5·12. ছুইটি পতনশীল বস্তুর আপেক্ষিক গতি (Relative motion of two falling bodies) :** একই মুখে ছুইটি চলমান বস্তুর আপেক্ষিক বেগ বলিতে উহাদের বেগের অন্তরকে বুঝায়। সেইরূপ একই দিকে সমত্বরণে চলমান ছুইটি বস্তুর আপেক্ষিক ত্বরণ বলিতে উহাদের ত্বরণের অন্তরফল বুঝায়। অভিকর্ষজ ত্বরণ সকল বস্তুর পক্ষেই সমান বলিয়া ছুইটি পতনশীল বস্তুর ত্বরণের অন্তর শূন্য। কাজেই উহাদের **আপেক্ষিক বেগ সমহার হইবে।**

ছুইটি নিক্ষিপ্ত ও উৎক্ষিপ্ত বস্তুর মিলনকাল ও মিলনবিন্দু নির্ণয়কালে এই তত্ত্বটি অত্যন্ত প্রয়োজনীয়।

**উদাহরণ 9.** 80 ফুট উচ্চ একটি স্তম্ভের উপর হইতে একটি ঢিল পড়িতেছে। স্তম্ভটির পাদদেশ হইতে সেকেণ্ডে 60 ফুট বেগে আর একটা ঢিল উপরে ছুঁড়িয়া দেওয়া হইল। ঢিল-ছুইটি কখন ও কোথায় মিলিত হইবে ?

ঢিল-ছুইটির প্রারম্ভিক বেগ যথাক্রমে সেকেণ্ডে 0 ফুট ও 60 ফুট। বিপরীতমুখী বলিয়া উহাদের আপেক্ষিক বেগ সেকেণ্ডে (0 + 60) বা 60 ফুট। উহাদের ত্বরণ সমান ও বিপরীতমুখী বলিয়া আপেক্ষিক ত্বরণ শূন্য হইবে। কাজেই তাহাদের আপেক্ষিক বেগ সমহার। ঢিল-ছুইটির ব্যবধান 80 ফুট।

$\therefore \quad s = vt$ বা $\dfrac{s}{v} = t$ সূত্রানুসারে,

$\frac{80}{60}$ বা $\frac{4}{3}$ বা $1\frac{1}{3}$ সেকেণ্ড পর ঢিল-ছুইটি মিলিত হইবে। ঐ সময়ে স্তম্ভের পাদদেশ হইতে দ্বিতীয় ঢিলটি, সূত্রানুসারে,

$s = ut - \frac{1}{2}gt^2$ উচ্চতায় উঠিবে অর্থাৎ উহা তখন

$\overset{20}{\cancel{60}} \times \dfrac{4}{\cancel{3}} - 16 \times \frac{16}{9}$ বা $\dfrac{720 - 256}{9}$ বা $51\frac{5}{9}$ ফুট উঠিবে।

**5·13. বেলুন হইতে নিক্ষিপ্ত বা উৎক্ষিপ্ত বস্তুর গতি (Motion of a body thrown vertically up or down from a balloon) :**

বেলুন, লিফ্‌ট প্রভৃতি ঊর্ধ্বগামী আধার হইতে পতনকালে বস্তুবিশেষ স্থিরাবস্থা হইতে নিচে নামে না। বেলুন বা লিফ্‌টের ঊর্ধ্বমুখী বেগ তাহার মধ্যেও সঞ্চারিত হয়। কাজেই ঐ বেগকে প্রারম্ভিক বেগ ধরিতে হয়।

**উদাহরণ 10.** ঘণ্টায় 15 মাইল বেগে ঊর্ধ্বগামী একটি বেলুন হইতে চ্যুত একটি বস্তু 5 সেকেণ্ডে মাটিতে পড়িল। বস্তুটি কত ফুট উচ্চে বেলুন হইতে চ্যুত হয় ?

এখানে, $u =$ ঘণ্টায় 15 মাইল = সেকেণ্ডে $\dfrac{15 \times 1760 \times 3}{3600}$

বা সেকেণ্ডে 22 ফুট।

$f$ = ত্বরণ $= -g = -32$ ফুট/সে.$^2$

$t = 5$ সে.।

উর্ধ্বমুখী দূরত্ব এখানে ধনাত্মক বলিয়া নিম্নমুখী দূরত্ব ঋণাত্মক ; কাজেই বেলুন হইতে মাটির দূরত্ব যেন $-h$ ;

$\therefore \quad -h = ut - \frac{1}{2}gt^2$, বা $-h = 22 \times 5 - \frac{1}{2} \times 32 \times 5^2$ ;

অর্থাৎ $\quad -h = 110 - 440.$

$\therefore \quad h = 330.$

$\therefore$ বস্তুটি 330 ফুট উচ্চে বেলুন হইতে চ্যুত হয়।

## প্রশ্নমালা 5

[ নিম্নলিখিত উদাহরণগুলিতে $g$-এর মান উল্লিখিত না হইলে 32 ফুট/সেকেণ্ড$^2$ অথবা 980 সে.মি./সেকেণ্ড$^2$ ধরিতে হইবে। ]

1. উপর হইতে কোন স্থিরবস্তু অবাধে পড়িতে থাকিলে নিম্নলিখিত সময়ে কত দূরত্ব অতিক্রম করিবে এবং কত বেগ অর্জন করিবে ?

(i) 3 সেকেণ্ড, (ii) $1\frac{1}{2}$ মিনিট, (iii) $\frac{3}{4}$ ঘণ্টা, (iv) $\frac{1}{2}$ সেকেণ্ড।

2. নিম্নলিখিত উচ্চতা হইতে কোন স্থিরবস্তু কতক্ষণে মাটিতে পড়িবে এবং মাটিতে পড়ার সময় তাহার কত বেগ হইবে ?

(i) 660 ফুট, (ii) 323 গজ, (iii) 10 ইঞ্চি, (iv) 1500 সে.মি., (v) 5 কি.মি.।

3. উর্ধ্বে উৎক্ষিপ্ত কোন বস্তু 144 ফুট পর্যন্ত উঠিয়াই পড়িতে থাকে। কত ফুট বেগে উহা ভূতল স্পর্শ করিবে ?

4. একটি বস্তুকে সেকেণ্ডে 80 ফুট বেগে উর্ধ্বে উৎক্ষিপ্ত করা হইল। কত সেকেণ্ড পর উহা 64 ফুট উচ্চে থাকিবে এবং প্রথমে 64 ফুট উচ্চে পৌঁছিবার মুহূর্তে উহার বেগ কত হইবে ?

5. সেকেণ্ডে 40 ফুট বেগে একটি বস্তু উর্ধ্বে উৎক্ষিপ্ত হইলে, কখন উহার বেগ সেকেণ্ডে 25 ফুট হইবে এবং কখন উহা উৎক্ষেপ-বিন্দু হইতে 25 ফুট উর্ধ্বে থাকিবে ?

6. সেকেণ্ডে 40 ফুট বেগে একটি বস্তু উর্ধ্বে উৎক্ষিপ্ত হইয়াছে। উহার বেগ শূন্যে পরিণত হওয়া পর্যন্ত উহা কত ফুট উচ্চে উঠিবে ?

7. সেকেণ্ডে 80 ফুট বেগে একটি বস্তু উর্ধ্বে উৎক্ষিপ্ত হইল। উহার বেগ শূন্যে পরিণত হওয়া পর্যন্ত উহা কত ফুট উচ্চে উঠিবে এবং কখন উহার বেগ সেকেণ্ডে 40 ফুট হইবে ?

8. একটি বস্তু সেকেণ্ডে 60 ফুট বেগে উৎক্ষিপ্ত হইলে, কত সেকেণ্ড পর উহা সেকেণ্ডে 20 ফুট বেগ লাভ করিবে এবং তখন উহা কত উচ্চে থাকিবে ?

9. সেকেণ্ডে 50 ফুট বেগে একখণ্ড পাথর ঊর্ধ্বে উৎক্ষিপ্ত হইলে কতক্ষণ পর উহার বেগ ঊর্ধ্বমুখে সেকেণ্ডে 20 ফুট হইবে এবং তখন উহা কত উচ্চে থাকিবে ?

10. 960 ফুট গভীর একটি খনির উপর হইতে সেকেণ্ডে 64 ফুট বেগে উপরের দিকে একটি ঢিল ছুঁড়িয়া দেওয়া হইল। কতক্ষণ পর উহা খনির তল স্পর্শ করিবে ?

11. সেকেণ্ডে 48 ফুট বেগে উৎক্ষিপ্ত একটি বস্তু কতক্ষণে এবং সর্বাধিক কত ফুট উচ্চে উঠিবে ?

12. একটি বলকে উল্লম্বভাবে ঊর্ধ্বে উৎক্ষিপ্ত করা হইল। 60 সেকেণ্ডে উহা আবার হাতে ফিরিয়া আসিল। কত ফুট বেগে উহা উৎক্ষিপ্ত হইয়াছিল এবং সর্বাধিক কত ফুট পর্যন্ত উহা উঠিয়াছিল ?

13. ঊর্ধ্বে উৎক্ষিপ্ত একটি বস্তু 144 ফুট পর্যন্ত উচ্চে ওঠে। উৎক্ষেপ-মুহূর্তের পর কত শীঘ্র উহা 80 ফুট ঊর্ধ্বে অবস্থিত হইবে ?

14. 400 ফুট উচ্চে একটি পাহাড়ের পাদদেশ হইতে একখণ্ড পাথর এমন বেগে সোজা উপরে ছুঁড়িয়া দেওয়া হইল যে, উহা ঠিক পাহাড়ের চূড়া পর্যন্ত উঠিতে পারে। 1 সেকেণ্ড পর পাহাড়ের চূড়া হইতে আর একটি পাথর নিচে ছাড়িয়া দেওয়া হইল। পাথর-দুইটি কখন কোথায় মিলিত হইবে ?

15. স্থিরাবস্থা হইতে পতনশীল একটি বস্তু একটি নির্দিষ্ট বিন্দুকে সেকেণ্ডে 120 ফুট বেগে অতিক্রম করে। দুই সেকেণ্ডে পূর্বে উহা কোথায় ছিল এবং দুই সেকেণ্ড পরে উহা কোথায় থাকিবে ?

16. চন্দ্রমণ্ডলে পতনশীল বস্তুর ত্বরণ পৃথিবীর উপর পতনশীল বস্তুর ত্বরণের $\frac{1}{6}$ অংশ হইলে, চন্দ্র উপগ্রহ হইতে 40 ফুট বেগে ঊর্ধ্বে উৎক্ষিপ্ত একটি বস্তু কত ফুট পর্যন্ত উপরে উঠিবে ?

17. একটি স্তম্ভের চূড়া হইতে অবাধে পতনশীল একটি বস্তু উহার পতনকালের শেষ সেকেণ্ডে উহার দ্বারা অতিক্রান্ত সমগ্র দূরত্বের $\frac{19}{100}$ ভাগ অতিক্রম করে। স্তম্ভটির সর্বাধিক উচ্চতা নির্ণয় কর।

18. উল্লম্বদিকে উৎক্ষিপ্ত কোন বস্তুকণা সর্বাধিক 289 ফুট উচ্চতায় ওঠে। উৎক্ষেপনের পর কত শীঘ্র বস্তুকণাটি 264 ফুট উচ্চতায় উঠিবে ? [ U. P. B. 1955 ]

19. একটি বস্তুকে উল্লম্বভাবে 200 ফুট/সেকেণ্ড বেগে উৎক্ষেপন করা হইল। উহা সর্বাধিক কতটা উচ্চতায় উঠিবে এবং উৎক্ষেপন বিন্দুতে আবার ফিরিয়া আসিতে মোট কত সময় লাগিবে নির্ণয় কর।

20. কোন স্তম্ভের শিখর হইতে এক ব্যক্তি 96·6 ফুট/সে. বেগে একটি বস্তু ঊর্ধ্বে উৎক্ষিপ্ত করিল। 4 সেকেণ্ড পর সে অপর একটি বস্তু নিচে ছাড়িয়া দিল। যদি

উভয় বস্তু একই সময়ে ভূতল স্পর্শ করে এবং যদি $g = 32.2$ ফুট/সে.$^2$ হয়, তবে স্তম্ভটির উচ্চতা এবং দ্বিতীয় বস্তুটির পতনকাল নির্ণয় কর।

21. $u$-বেগে একটি বস্তু উল্লম্বদিকে উর্ধ্বে উৎক্ষিপ্ত হয়। যদি $u = 30$ মাইল/ঘণ্টা এবং $g = 32$ ফুট/ সেকেণ্ড$^2$ হয়, তবে বস্তুটির উৎক্ষেপ-মুহূর্তের পর উৎক্ষেপ-বিন্দুতে ফিরিয়া আসা পর্যন্ত সময় নির্ণয় কর।

22. দুইটি বস্তুকে একই সময়ে যথাক্রমে 25 ফুট এবং 50 ফুট উপর হইতে ছাড়িয়া দেওয়া হইল। প্রথমটি যখন মাটিতে পৌছায়, সেই মুহূর্তে দ্বিতীয়টির উচ্চতা ও বেগ নির্ণয় কর।

23. একটি বিশেষ মুহূর্তে 200 ফুট উচ্চ একটি স্তম্ভের উপর হইতে একটি বস্তু শূন্যে ছাড়িয়া দেওয়া হইল এবং ঠিক একই মুহূর্তে সেকেণ্ডে 200 ফুট বেগে ঐ স্তম্ভের পাদদেশ হইতে একটি গোলা উল্লম্বভাবে উপরের দিকে ছুঁড়িয়া দেওয়া হইল। স্তম্ভের পাদদেশ হইতে কত ফুট উচ্চে ঐ বস্তু ও গোলাটি পরস্পরের সহিত মিলিত হইবে?

24. 400 ফুট উচ্চস্থিত একটি উর্ধ্বগামী বেলুন হইতে পতিত একখণ্ড পাথর 6 সেকেণ্ডে মাটিতে পড়ে। বেলুনটি কত বেগে উর্ধ্বে উঠিতেছে?

25. সেকেণ্ডে 5 ফুট সমবেগে একটি লিফ্‌ট উপরে উঠিতেছে। উহার একটি স্ক্রু হঠাৎ খসিয়া পড়িল। $1\frac{1}{2}$ সেকেণ্ড পর ঐ স্ক্রু-র বেগ কত হইবে এবং ঐ মুহূর্তে লিফ্‌ট ও স্ক্রু-টির মধ্যে কত ব্যবধান থাকিবে?

26. 32 ফুট/সেকেণ্ড বেগে উর্ধ্বে উঠিতেছে এরূপ একটি বেলুন হইতে একটি পাথর ছাড়িয়া দেওয়া হইল। পাথরটি 17 সেকেণ্ড পরে মাটিতে আসিয়া পৌছিলে পাথরটি যখন ছোঁড়া হইয়াছিল তখন বেলুনটি কতটা উচ্চতায় ছিল?

[ B. H. U. 1931 ]

27. একটি কূপের উপর হইতে একখণ্ড পাথর পড়িল। যদি 1120 ফুট/সেকেণ্ড বেগে চলমান শব্দ পাথরটি পড়িবার $7\frac{7}{10}$ সেকেণ্ড পর কানে আসে, তবে কূপটির গভীরতা কত?

28. একটি কূপের গভীরতা নির্ণয় করিবার জন্য এক ব্যক্তি কূপের ভিতর একখণ্ড পাথর ফেলিয়া দেয় এবং ফেলিয়া দেওয়ার 9 সেকেণ্ড পর পাথরটি জলে পড়িবার শব্দ শুনিতে পায়। শব্দের বেগ সেকেণ্ডে 1024 ফুট ধরিয়া কূপের গভীরতা নির্ণয় কর।

29. একটি কূপের ভিতর একটি পাথর ফেলা হইল এবং ঐ পাথর জলে পড়ার শব্দ $2\frac{33}{56}$ সেকেণ্ড পরে শোনা গেল। শব্দের বেগ সেকেণ্ডে 1120 ফুট হইলে কূপের গভীরতা নির্ণয় কর।

[ C. U. I.Sc. 1932 ]

30. ফুট-সেকেণ্ড এককে 4 একক সমত্বরণে একটি বেলুন সোজা উপরে উঠিতেছে। আধ মিনিট পর ঐ বেলুন হইতে একটি বস্তু ছাড়িয়া দেওয়া হইল। বস্তুটি কত সেকেণ্ডে মাটিতে পড়িবে?

31. সমবেগে 4·5 সেকেণ্ড ধরিয়া উল্লম্বভাবে উর্ধ্বগামী একটি বেলুন হইতে পতিত একখণ্ড পাথর 7 সেকেণ্ডে ভূতল স্পর্শ করে। বেলুনটির বেগ ও পাথরখণ্ডটির খসিয়া পড়ার সময় উচ্চতা নির্ণয় কর।

32. অবাধে পতনশীল একটি বস্তু কোন বিশেষ সেকেণ্ডে 80 ফুট অতিক্রম করে। পরবর্তী সেকেণ্ডে উহা কত ফুট অতিক্রম করিবে ?

33. সেকেণ্ডে 32 ফুট বেগে উর্ধ্বগামী একটি বেলুন হইতে চ্যুত একখণ্ড পাথর 10 সেকেণ্ডে ভূতল স্পর্শ করে। পাথরখণ্ডটি মাটি হইতে সর্বাধিক কত উচ্চে ওঠে এবং বেলুন হইতে চ্যুত হইবার মুহূর্তে উহা কত উচ্চে ছিল ? [ C. U. I.Sc. 1957 ]

34. সেকেণ্ডে 20 ফুট বেগে নিম্নগামী একটি বেলুন হইতে একটি বস্তু খসিয়া পড়ে এবং 10 সেকেণ্ডে ভূতল স্পর্শ করে। বস্তুটি কত বেগে ভূতলে আঘাত করে এবং উহার খসিয়া পড়ার সময় বেলুনটি কত উচ্চে অবস্থিত ছিল ?

35. উর্ধ্বে উৎক্ষিপ্ত একটি বস্তুর $h$ ফুট উঠিতে $t_1$ সেকেণ্ড লাগে। ইহার পর আরও $t_2$ সেকেণ্ড পরে যদি উহা মাটিতে আসিয়া পৌঁছায়, তবে প্রমাণ কর যে, $h=\frac{1}{2}gt_1t_2$. [ C. U. I.Sc. 1953 ]

36. একটি স্তম্ভের উপর হইতে পতনশীল একখণ্ড পাথর যখন $x$ ফুট নিচে নামিয়াছে, ঠিক সেই সময় স্তম্ভের চূড়ার $y$ ফুট নিচে হইতে আর একটি পাথর ছাড়িয়া দেওয়া হইল। পাথর-দুইটি যদি স্থিরাবস্থা হইতে পড়িয়া থাকে এবং একই সময়ে মাটিতে পড়ে, তবে দেখাও যে, স্তম্ভটির উচ্চতা $\frac{(x+y)^2}{4x}$ ফুট।

[ C. U. I.Sc. 1935, 1954 ]

[ সংকেত : স্তম্ভটির উচ্চতা $h$ ফুট, $x$ ফুট পড়িতে $t_1$ সেকেণ্ড এবং $(h-y)$ ফুট পড়িতে $t_2$ সে. লাগিল, প্রথম পাথরের নিচে পড়িতে $(t_1+t_2)$ সে. এবং দ্বিতীয় পাথরের নিচে পড়িতে $t_2$ সে. লাগে।

$\therefore \quad x=16t_1^2 \; ; \; h-y=16t_2^2$

এবং $h=16(t_1+t_2)^2$

$$=16\left(\frac{\sqrt{x}}{4}+\frac{\sqrt{h-y}}{4}\right)^2=(\sqrt{x}+\sqrt{h-y})^2.$$

$\therefore \quad h=x+h-y+2\sqrt{x(h-y)}$

বা $\quad y-x=2\sqrt{x(h-y)}$.

বর্গ ও পক্ষান্তর করিয়া নির্ণেয় উত্তর পাওয়া যায়। ]

37. একই উল্লম্বরেখায় $Q$ বিন্দুর উপরে $P$ বিন্দু অবস্থিত। $O$ বিন্দু হইতে একটি বস্তু এমন বেগে উর্ধ্বে উৎক্ষিপ্ত হইল যে, উহা ঠিক $P$ বিন্দু পর্যন্তই উঠিতে পারে

এবং ঠিক একই সময়ে $P$ বিন্দুতে স্থির একটি বস্তুকে নিচে ছাড়িয়া দেওয়া হইল। দেখাও যে, বস্তু-দুইটির মিলনকালে তাহাদের বেগ সমান ও বিপরীত এবং উহাদের দ্বারা অতিক্রান্ত দূরত্বের অনুপাত 3 : 1. [ C. U. I.Sc. 1939 ]

38. একটি বস্তুকে 100 ফুট/সেকেণ্ড বেগে উপরের দিকে ছোঁড়া হইল এবং 1 সেকেণ্ড পরে অপর একটি বস্তুকে 89 ফুট/সেকেণ্ড বেগে উপরের দিকে ছোঁড়া হইল। কখন বস্তু-দুইটি মাটি হইতে একই উচ্চতায় থাকিবে এবং ঐ উচ্চতাই বা কত ? [ W. B. H. S. 1963 ]

39. একটি বস্তুকে সোজা উপরের দিকে ছোঁড়া হইল এবং উহার $t$ সেকেণ্ড পরে অপর একটি বস্তুকে একই বেগে সোজা উপরের দিকে ছোঁড়া হইল। দেখাও যে, যখন উহাদের সাক্ষাৎ হইবে তখন উভয়েরই বেগ হইবে $\frac{1}{2}gt$. [ W. B. H. S. 1962 ]

40. মাটি হইতে কিছুটা উপরে একটি বিন্দু $A$ হইতে একটি পাথরকে সোজা উপরের দিকে ছুঁড়িয়া দেওয়া হইল। পাথরটি যখন $A$-র নিচে $h$ দূরত্বে পৌছায়, তখন উহার বেগ $A$-র উপরে $h$ উচ্চতায় থাকাকালীন যে বেগ ছিল, তাহার দ্বিগুণ হয়। দেখাও যে, $A$-র উপরে পাথরটি সর্বাধিক যে উচ্চতায় ওঠে, তাহা হইল $\frac{5}{3}h$. [ W. B. H. S. 1961 ]

41. কোন স্তম্ভের চূড়া হইতে একটি পাথর 48 ফুট/সেকেণ্ড বেগে সোজা উপরের দিকে ছোঁড়া হইল। দুই সেকেণ্ড পরে দ্বিতীয় একটি পাথর একই স্থান হইতে নিচে ফেলা হইল এবং দুইটি পাথর একই সঙ্গে মাটিতে পৌছাইল। স্তম্ভটির উচ্চতা নির্ণয় কর। [ $g = 32$ ফুট/সেকেণ্ড$^2$ ] [ W. B. H. S. 1964 ]

## ষষ্ঠ অধ্যায়

# প্রাস ( Projectile )

**6·1. প্রাস ঃ** শূন্যদেশে যে-কোন দিকে প্রক্ষিপ্ত বস্তুকে **প্রাস** বলা হয়। প্রাসের গতিপথকে ইংরেজীতে trajectory বলে। বাংলায় ইহাকে প্রাস-পথ বলা চলে।

প্রাস-পথ সরল নহে, বক্র। পঞ্চম অধ্যায়ে অভিকর্ষাধীন বস্তুর উল্লম্ব সরল রেখায় গতিই বিচার করা হইয়াছে। প্রাসের গতি সরল রেখায় নয় বলিয়া উহা ক্রমাগত বাঁকিয়া চলে। কাজেই উহার গতি ও গতিপথের স্বরূপসম্বন্ধে আলোচনার পূর্বসূত্র হিসাবে প্রথমে কয়েকটি সংজ্ঞা নির্দেশ করা প্রয়োজন।

যে-বিন্দু হইতে প্রাস প্রক্ষিপ্ত হয়, তাহাকে **প্রক্ষেপ-বিন্দু (Point of projection)**, অনুভূমিক রেখার সহিত যে-কোণে উহা প্রক্ষিপ্ত হয়, তাহাকে **প্রক্ষেপ-কোণ (Angle of projection)** এবং যে প্রারম্ভিক বেগ সহ উহা প্রক্ষিপ্ত হয়, তাহাকে বলে **প্রক্ষেপ-বেগ (Velocity of projection)**। প্রক্ষেপ-বিন্দু হইতে কোন সমতলে প্রাসের পতন-বিন্দু পর্যন্ত দূরত্বকে বলে ঐ সমতলে প্রাসের **পাল্লা (Range)**।

এই প্রসঙ্গে আরেকটি কথা উল্লেখযোগ্য যে, প্রাসের গতি-বিচারে বাতাসের বাধা একেবারেই গ্রাহ্য করা হইবে না।

**6·2. অনুভূমিকের সহিত $\alpha$ কোণে ও u বেগে প্রক্ষিপ্ত প্রাসের গতি ঃ** অনুভূমিক দিকে $x$-অক্ষ এবং উল্লম্ব অভিমুখে $y$-অক্ষ ধরিলে $x$-অক্ষের ধনাত্মক অভিমুখে প্রাসের ত্বরণ হইল $\frac{d^2x}{dt^2}$ এবং $y$-অক্ষের ধনাত্মক অভিমুখে ত্বরণ হইল $\frac{d^2y}{dt^2}$.

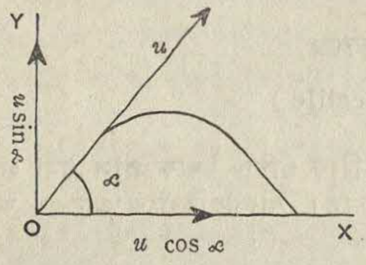
কিন্তু অনুভূমিক দিকে প্রাসের উপর কোন বল সক্রিয় নয় বলিয়া ঐ অভিমুখে ত্বরণ শূন্য এবং উল্লম্ব দিকে প্রাসটি অভিকর্ষজ ত্বরণ $g$-র অধীন। ( এখানে ঊর্ধ্বমুখকে ধনাত্মক ধরায় অভিকর্ষজ ত্বরণ $-g$ ধরিতে হইবে )।

$\therefore$ প্রাসের গতির অবকল সমীকরণ হইল—

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0. \qquad \cdots \quad (1)$$

এবং $$\frac{d^2y}{dt^2}=-g. \qquad \cdots \quad (2)$$

(1) নং সমীকরণ হইতে সমাকলন করিয়া পাওয়া যায়,




28নং চিত্র

$$\frac{dx}{dt}=k \quad \text{এবং} \quad x=kt+k',$$

যেখানে $k$ ও $k'$ সমাকলন ধ্রুবক।

কিন্তু যখন $t=0$, তখন $x=0$,

$\therefore \quad k'=0$

$\therefore \quad x=kt$

এবং $\frac{dx}{dt}=k.$

এখন, $k$ ধ্রুবক বলিয়া অনুভূমিক দিকে বেগের কোন পরিবর্তন হইবে না। কিন্তু প্রক্ষেপকালে প্রাসটির $u$ বেগের অনুভূমিক দিকে উপাংশ হইল $u \cos a$.

$$\therefore \quad \frac{dx}{dt}=u\cos a \ \text{এবং}\ x=u\cos a.\,t \qquad \cdots \qquad \cdots \quad (3)$$

আবার, (2) নং অবকল সমীকরণকে সমাকলন করিয়া পাওয়া যায়,

$$\frac{dy}{dt}=-gt+c$$

কিন্তু প্রক্ষেপের সময় উল্লম্ব অভিমুখে বেগ হইবে $u \sin a$.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dt}=u\sin a, \ \text{যখন}\ t=0 \quad \therefore \quad c=u\sin a.$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dt}=u\sin a-gt \qquad \cdots \qquad \cdots \quad (4)$$

আবার, (4)-এর সমাকলন করিয়া পাওয়া যায়,

$y=u\sin a.t-\frac{1}{2}gt^2+c'$, যেখানে $c'$ ধ্রুবক।

কিন্তু যখন $t=0$, তখন $y=0$

$\therefore \quad c'=0$

$$\therefore \quad y=u\sin a.\,t-\tfrac{1}{2}gt^2 \qquad \cdots \qquad \cdots \quad (5)$$

(3) ও (5) নং সমীকরণ হইতে যে-কোন মুহূর্তে প্রাসের অবস্থান $(x, y)$ নির্ণয় করা যাইবে।

(i) **প্রাসের গতিপথ একটি অধিবৃত্ত** (*Locus of a projectile is a parabola*) ঃ

(3) নং সমীকরণ হইতে $x=u\cos a.t$ বলিয়া

$$t=\frac{x}{u\cos a}$$

(5) নং সমীকরণে $t$-এর মান $x/u \cos \alpha$ বসাইলে দেখা যায়,

$$y = u \sin \alpha \cdot \frac{x}{u \cos \alpha} - \tfrac{1}{2} g \frac{x^2}{u^2 \sin^2 \alpha}$$

$$= x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2u^2 \sin^2 \alpha},$$

স্পষ্টত, ইহা একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ। সুতরাং প্রাসের গতিপথ একটি অধিবৃত্ত।

(ii) **প্রাসের উৎপতনকাল ও অনুভূমিক পাল্লা** (*Time of flight and horizontal range of a projectile*) ঃ

(5) নং সমীকরণ হইতে পাওয়া যায়,

যখন $y = 0$, তখন $(u \sin \alpha - \frac{1}{2} gt)t = 0$ অর্থাৎ $t = 0$ বা $\frac{2u \sin \alpha}{g}$, সুতরাং প্রাসের উৎপতনকাল $= \frac{2u \sin \alpha}{g}$.

(3) নং সমীকরণে $t$-র এই মান বসাইয়া পাওয়া যায়, অনুভূমিক পাল্লা

$$R = u \cos \alpha \cdot \frac{2u \sin \alpha}{g} = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g}$$

নির্দিষ্ট প্রক্ষেপ-বেগের দরুন অনুভূমিক পাল্লা $R$ তখনই সর্বাধিক হইবে, যখন $\sin 2\alpha = 1$ অর্থাৎ $\alpha = 45°$.

সুতরাং **নির্দিষ্ট প্রক্ষেপ-বেগের দরুন কোন প্রাস অনুভূমিকের সহিত 45° কোণে প্রক্ষিপ্ত হইলেই অনুভূমিক পাল্লা সর্বাধিক হইবে এবং এই পাল্লার সর্বাধিক মান হইল $\frac{u^2}{g}$.**

(iii) **প্রাসের সর্বাধিক উচ্চতা ও উত্থানকাল** (*Maximum height of a projectile and the time of rise*) ঃ

(4) নং সমীকরণ হইতে পাওয়া যায়, $\frac{dy}{dt} = 0$, যখন $t = \frac{u \sin \alpha}{g}$, সুতরাং সর্বাধিক উচ্চতায় উত্থানকাল $= \frac{u \sin \alpha}{g}$.

(5) নং সমীকরণে $t$-র এই মান বসাইয়া পাওয়া যায়,

$$\text{সর্বাধিক উচ্চতা } H = u \sin \alpha \cdot \frac{u \sin \alpha}{g} - \tfrac{1}{2} g \cdot \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{g^2}$$

$$= \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{g} - \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g} = \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

(iv) **t-সময় পরে প্রাস-এর বেগের মান ও দিক্** (*Direction and magnitude of velocity of a projectile after time t*) :

$t$ সময় পরে প্রাসের বেগ $v$ হইলে এবং ঐ বেগের অভিমুখ অনুভূমিকের সহিত $\theta$ কোণে নত হইলে,

$$v^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

$$=u^2\cos^2\alpha+(u\sin\alpha-gt)^2$$

$$=u^2-2u\sin\alpha.gt+g^2t^2$$

এবং $\tan\theta=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{u\sin\alpha-gt}{u\cos\alpha}.$

**উদাহরণ 1.** একটি বস্তুকণাকে অনুভূমিকের সহিত $\alpha$ কোণে সেকেণ্ডে 65 ফুট বেগে উৎক্ষেপণ করা হইল, যেখানে $\sin\alpha=\frac{12}{13}$. $1\frac{1}{4}$ সেকেণ্ড পরে উহার বেগের মান ও অভিমুখ নির্ণয় কর।

এখানে $\sin\alpha=\dfrac{12}{13}$ বলিয়া, $\cos\alpha=\sqrt{1-\dfrac{12^2}{13^2}}=\dfrac{5}{13}.$

প্রারম্ভিক উল্লম্ববেগ $=65\sin\alpha=65\times\dfrac{12}{13}=60$ ফু./সে.।

$\therefore$ প্রান্তিক উল্লম্ববেগ $=60-32\times\dfrac{5}{4}=20$ ফু./সে.

এবং অনুভূমিক বেগ $=65\cos\alpha=65\times\dfrac{5}{13}=25$ ফু./সে.।

(i) $1\frac{1}{4}$ সে. পর নির্ণেয় বেগ $=\sqrt{20^2+25^2}=5\sqrt{4^2+5^2}$
$=5\sqrt{41}$ ফু./সে. $=5\times6{\cdot}4=32$ ফু./সে. (প্রায়)।

(ii) $1\frac{1}{4}$ সে. পর বস্তুকণাটি যদি অনুভূমিক রেখার সহিত $\theta$ কোণে নত হয়, তবে আমরা জানি,

$$\tan\theta=\frac{u\sin\alpha-gt}{u\cos\alpha}=\frac{65\times\frac{12}{13}-32\times\frac{5}{4}}{65\times\frac{5}{13}}=\frac{20}{25}=\frac{4}{5}.$$

$\therefore\ \theta=\tan^{-1}\dfrac{4}{5}.$

**উদাহরণ 2.** একটি বস্তুকণাকে অনুভূমিকের সহিত 60° কোণে সেকেণ্ডে 90 ফুট বেগে উৎক্ষেপণ করা হইল। বস্তুকণাটি যখন 81 ফুট উচ্চতায় উঠিবে তখন উহার বেগের মান ও অভিমুখ নির্ণয় কর।

বস্তুকণাটি 81 ফুট উচ্চতায় অনুভূমিক রেখার সহিত যদি $\theta$ কোণ উৎপন্ন করে, তবে উহার বেগের উল্লম্ব-উপাংশ $v \sin\theta$।

$\therefore \quad v^2 = u^2 - 2fs$ সূত্রানুসারে,

$\therefore \quad v^2 \sin^2\theta = (90 \sin 60°)^2 - 2.32.81.$

আবার অনুভূমিক উপাংশ $v \cos\theta = 90 \cos 60°$.

$\therefore \quad v^2 \cos^2\theta = (90 \cos 60°)^2.$

$\therefore \quad v^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = 90^2 (\sin^2 60° + \cos^2 60°) - 2.32.81.$

$\therefore \quad v^2 = 90^2 - 72^2 = 162 \times 18 = 81 \times 36.$

$\therefore \quad v = 54$ ফু./সে.।

আবার, $\tan\theta = \dfrac{v \sin\theta}{v \cos\theta} = \dfrac{\sqrt{(90 \times \sin 60°)^2 - 2.32.81}}{90 \cos 60°}$

$$= \frac{\sqrt{\left(90 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 8^2.9^2}}{90 \times \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{45^2.3 - 8^2.9^2}}{45} = \frac{\cancel{9}\sqrt{75-64}}{\underset{5}{\cancel{45}}} = \frac{\sqrt{11}}{5}$$

$$= \frac{3{\cdot}32}{5} = {\cdot}664.$$

$\therefore$ ট্যানজেন্ট সারণী অনুসারে $\theta = 33°38'$.

**উদাহরণ 3.** একটি বল অনুভূমিকের সহিত 30° কোণে সেকেণ্ডে 50 ফুট বেগে ছোড়া হইল। বলটি সর্বাধিক কতটা উচ্চতায় উঠিবে এবং অনুভূমিক পাল্লা কত হইবে? উৎক্ষেপণ বিন্দু হইতে অনুভূমিক দিকে 60 ফুট দূরে 5 ফুট উচ্চ একটি দেওয়াল আছে। বলটি দেওয়ালটিকে অতিক্রম করিতে পারিবে কিনা নির্ণয় কর।

(i) সর্বাধিক উচ্চতা $H$, প্রারম্ভিক বেগ $u$ এবং প্রক্ষেপ-কোণ $a$ হইলে,

$$H = \frac{u^2 \sin^2 a}{2g} = \frac{50 \times 50 \times \sin^2 30°}{64}$$

$$= \frac{2500 \times \frac{1}{4}}{64} = \frac{625}{64} = 9\frac{49}{64} \text{ ফুট।}$$

(ii) আবার অনুভূমিক পাল্লা $R=\frac{u^2}{g}\sin 2a$

$$=\frac{50^2}{32}\times(\sin 2\times 30^\circ)$$

$$=\frac{50^2}{32}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2500\times 1{\cdot}732}{64}$$

$$=\frac{4330}{64}=67\frac{21}{32} \text{ ফুট।}$$

(iii) বলটির অনুভূমিক বেগ $=50\cos 30^\circ=25\sqrt{3}$ ফু./সে.। উহা যদি $t$ সেকেণ্ডে 60 ফুট যায়, তবে

$$25\sqrt{3}t=60,\quad \text{বা}\quad t=\frac{60}{25\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{5} \text{ সেকেণ্ড।}$$

$\frac{4\sqrt{3}}{5}$ সেকেণ্ড পরে বলটির উল্লম্ব-সরণ যেন $h$ ফুট।

$$\therefore\quad h=50\sin 30^\circ\times\frac{4\sqrt{3}}{5}-16\left(\frac{4\sqrt{3}}{5}\right)^2$$

$$=\left(50\times\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{3}}{5}-16\times\frac{48}{25}\right) \text{ ফুট}$$

$$=(20\times 1{\cdot}732-16\times 1{\cdot}92) \text{ ফুট}$$

$$=(34{\cdot}64-30{\cdot}72) \text{ ফুট}$$

$$=3{\cdot}92 \text{ ফুট।}$$

অর্থাৎ অনুভূমিক দিকে বলটি যখন প্রক্ষেপ-বিন্দু হইতে 60 ফুট দূরে প্রাচীরটিতে পৌঁছাইবে তখন প্রক্ষেপ-তল হইতে উহা 3·92 ফুট উপরে থাকিবে। কিন্তু প্রাচীরটি সেই তল হইতে 5 ফুট উঁচু। কাজেই বলখানি ঐ প্রাচীর অতিক্রম করিতে পারে না।

**উদাহরণ 4.** এক ব্যক্তি একটি পাথর সর্বাধিক 392 ফুট দূরে ছুঁড়িতে পারে। সে পাথরটি কত বেগে ছোঁড়ে? পাথরটি সর্বাধিক কতটা উচ্চতায় উঠিবে তাহাও নির্ণয় কর।

(i) প্রশ্নানুসারে লোকটি সর্বাধিক 392 ফুট দূর পর্যন্ত পাথরটি ছুঁড়িতে পারে। আমরা জানি, সর্বাধিক দূরত্বের জন্য প্রক্ষেপ-কোণ 45°। নির্ণেয় প্রক্ষেপ-বেগ $u$ হইলে,

$$\text{অনুভূমিক পাল্লা}=\frac{u^2}{g}\sin(2\times 45^\circ)=\frac{u^2}{g}.$$

$$\text{বা}\quad \frac{u^2}{g}=392.$$

বা $u^2 = 392 \times 32 = (16 \times 7)^2$.

$\therefore \quad u = 112$ ফু./সে.।

(ii) সর্বাধিক উচ্চতা $H = \dfrac{u^2 \sin^2 45^\circ}{2g}$

$$= \frac{112 \times \overset{56}{\cancel{112}} \times \frac{1}{\cancel{2}}}{64} \text{ ফুট}$$

$$= \frac{\overset{14}{\cancel{112}} \times \overset{7}{\cancel{56}}}{\cancel{64} \quad \cancel{8}} = 98 \text{ ফুট।}$$

**উদাহরণ 5.** একটি পাহাড়ের চূড়া হইতে অনুভূমিক দিকে প্রতি সেকেণ্ডে 64 ফুট বেগে একটি পাথর ছোঁড়া হইল। পাথরটি পাহাড়ের পাদদেশ হইতে 320 ফুট দূরে গিয়া মাটিতে পড়িল। পাহাড়ের উচ্চতা নির্ণয় কর।

পাহাড়-চূড়ার নির্ণেয় উচ্চতা যেন $h$ ফুট। পাথরখণ্ডটি অনুভূমিক দিকে 64 ফু./সে. সমবেগে এবং উল্লম্বদিকে 32 ফু./সে$^2$ সমত্বরণে ধাবমান। $t$ সেকেণ্ড পরে যদি উহা পাহাড়ের পাদদেশগামী সমতলে নামিয়া আসে, তবে ঐ $t$ সেকেণ্ডেই উহা 320 ফুট অনুভূমিক দূরত্ব অতিক্রম করে।

$\therefore \quad 64t = 320$ বা $t = 5$ সেকেণ্ড।

$\therefore \quad h = \dfrac{1}{\cancel{2}} \times \overset{16}{\cancel{32}}.5^2$ বা 400 ফুট।

**উদাহরণ 6.** 6·25 ফুট উচ্চতা হইতে অনুভূমিক দিকে নিক্ষিপ্ত একটি টেনিস-বল খেলোয়াড়ের নিকট হইতে 60 ফুট দূরে মাটিতে পড়ে। বলটি যদি খেলোয়াড়ের নিকট হইতে 40 ফুট দূরে অবস্থিত একটি জালে ঠিক স্পর্শ করিয়া যায়, তবে জালটির মাটি হইতে উচ্চতা নির্ণয় কর।

বলটি যেন $u$ বেগে চলে। এই বেগ অনুভূমিক। উল্লম্বদিকে একমাত্র অভিকর্ষজ ত্বরণ বলটির উপর সক্রিয়। $t$ সেকেণ্ড পর যদি বলটি মাটিতে পড়ে, তবে

$$\frac{1}{2} gt^2 = 6{\cdot}25 \text{ অথবা } 16t^2 = \frac{25}{4} = t^2 = \frac{25}{64}.$$

$$\therefore \quad t = \frac{5}{8} \text{ সে.।}$$

আবার, $ut = 60$ অথবা $\dfrac{5}{8}u = 60$ ; $\therefore \quad u = \dfrac{\overset{12}{\cancel{60}} \times 8}{\cancel{5}} = 96$ ফু./সে.।

এখন জালখানি অনুভূমিক দিকে 40 ফুট দূরে অবস্থিত। 40 ফুট দূরে যাইতে বলটির যদি $t'$ সে. সময় লাগে, তবে

$$96t' = 40 \quad \text{বা} \quad t' = \frac{40}{96} \text{ সে.} = \frac{5}{12} \text{ সে.};$$

এই $\frac{5}{12}$ সেকেণ্ডে বলটির উল্লম্ব-সরণ $= 16 \times \left(\frac{5}{12}\right)^2 = \frac{16 \times 25}{12 \times 12}$

$= \frac{25}{9}$ ফুট $= 2\frac{7}{9}$ ফুট।

স্পষ্টত, জালখানির উচ্চতা $= \left(6\frac{1}{4} - 2\frac{7}{9}\right)$ ফুট

$$= \left(\frac{25}{4} - \frac{25}{9}\right) \text{ ফুট} = \frac{25 \times 5}{36} \text{ ফুট}$$

$$= \frac{125}{36} = 3\frac{17}{36} \text{ ফুট।}$$

**উদাহরণ 7.** একটি বোমা মাটিতে আঘাত করিবার পর বোমাটির টুকরাগুলি $u$ বেগে বিভিন্নদিকে ছিট্‌কাইয়া পড়ে। বোমাটির টুকরাগুলি মাটির যতটা স্থান জুড়িয়া ছড়াইয়া পড়ে তাহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

বোমাটির টুকরাগুলির প্রত্যেকটির বেগ যেন $u$। এখন ইহাদের যেগুলি অনুভূমিক তলের সহিত 45° কোণে বিক্ষিপ্ত, তাহারাই সর্বাধিক দূরে ছিট্‌কাইয়া পড়িবে।

স্পষ্টতই, এই সর্বাধিক অনুভূমিক পাল্লা $= \frac{u^2}{g} \sin(2 \times 45°) = \frac{u^2}{g}$.

$\therefore$ $\frac{u^2}{g}$-এর সমান ব্যাসার্ধযুক্ত একটি বৃত্তের মধ্যেই বিক্ষিপ্ত টুকরাগুলি সীমাবদ্ধ থাকে।

এই বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi\left(\frac{u^2}{g}\right)^2 = \frac{\pi u^4}{g^2}$.

**উদাহরণ 8.** একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে কতকগুলি বস্তুকণাকে $V$ বেগে একইসঙ্গে একই উল্লম্বতলে বিভিন্ন দিকে উৎক্ষেপণ করা হইল। প্রমাণ কর যে, $t$ সেকেণ্ড পরে তাহারা একই বৃত্তের উপর অবস্থিত হইবে।

যে-কোন একটি বস্তুকণা অনুভূমিক রেখার সহিত যেন $\alpha$ কোণে ও $V$ বেগে প্রক্ষিপ্ত। এই $V$ বেগের অনুভূমিক ও উল্লম্ব-উপাংশ যথাক্রমে $V\cos\alpha$ ও $V\sin\alpha$।

$t$ সময় পর প্রদত্ত বিন্দু হইতে কণাটির অনুভূমিক ও উল্লম্ব দূরত্ব যদি যথাক্রমে $x$ ও $y$ হয়, তবে

$$x = V \cos a.t \qquad \cdots \qquad \cdots \quad (1)$$

এবং $\quad y = V \sin a.t - \frac{1}{2}gt^2$

অর্থাৎ $\quad y + \frac{1}{2}gt^2 = V \sin a.t. \qquad \cdots \qquad \cdots \quad (2)$

$\therefore$ (1) ও (5) হইতে,

$$x^2 + (y + \tfrac{1}{2}gt)^2 = V^2 \,(\sin^2 a + \cos^2 a)\, t^2 = V^2t^2 = (Vt)^2.$$

স্পষ্টতই ইহা এমন একটি বৃত্তের সমীকরণ যাহার কেন্দ্র $(0, \; -\frac{1}{2}gt)$ বিন্দু এবং ব্যাসার্ধ $= Vt$. অতএব, কণাগুলি $t$ সেকেণ্ড পরে $Vt$ ব্যাসার্ধযুক্ত বৃত্তের পরিধিতে শায়িত হইবে।

**উদাহরণ 9.** একটি নির্দিষ্ট $h$ উচ্চতায় একটি নির্দিষ্ট বেগে উড্ডীয়মান একটি এরোপ্লেন একটি কামানের উপর দিয়া উড়িয়া যায়। কামানের অবস্থান হইতে এরোপ্লেনের উন্নতিকোণ যখন $\theta$ হয়, তখন কামানটি হইতে গোলা ছোঁড়া হইল। দেখাও যে, গোলাটি এরোপ্লেনকে আঘাত করিবে, যদি $2(V \cos \theta - v)\, v \tan^2\theta = hg$ হয়, যেখানে $V$ গোলার প্রাথমিক বেগ এবং গোলাটির গতিপথ একটি অধিবৃত্ত।

ধরা যাক, কামানটি $A$ বিন্দুতে অবস্থিত। বিমানখানি সর্বদা $h$ ফুট উচ্চে থাকিয়া যখন $A$ বিন্দুর সহিত $\theta$ কোণে আসিয়াছে, ঠিক তখন গোলা ছোঁড়া হইল। সেই মুহূর্তে বিমানখানির অবস্থান $D$ এবং $D$ হইতে $AC$ অনুভূমিক রেখার উপর লম্ব $DB$ হইলে,

$$DB = h, \quad \angle DAB = \theta \text{ এবং } \tan \theta = \frac{h}{AB} \qquad \cdots \qquad \cdots \quad (1)$$

এখন, কামানের গোলাটি যে অধিবৃত্ত-পথে ধাবমান, $t$ সময় পরে যেন বিমানটি তাহাকে $E$ বিন্দুতে ছেদ করিয়া চলিয়া যায়। $E$ হইতে লম্ব যেন $EC$. স্পষ্টতই $EC = h$।

$v$ বেগে $D$ হইতে $E$ বিন্দুতে যাইতে বিমানটির $t$ সময় লাগে,

$$\therefore \quad DE = BC = vt. \qquad \cdots \qquad \cdots \quad (2)$$

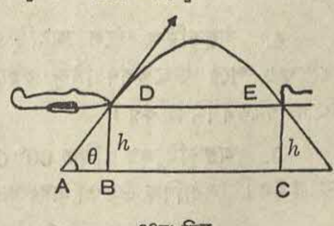
$AC$ অনুভূমিক দূরত্ব যাইতে গোলাটির $t$ সময় লাগিলেই, উহা বিমানটিকে আঘাত করিবে।

$\therefore \quad AC = V \cos \theta.t,$

কিন্তু $\quad AB = AC - BC = V \cos \theta.t - vt, \quad [\because \;\; BC = vt]$

$$\tan \theta = \frac{h}{AB} = \frac{h}{(V \cos \theta - v)t}.$$

$$\therefore \quad t = \frac{h}{(V \cos \theta - v) \tan \theta}.$$



29নং চিত্র

আবার গোলাটির উল্লম্ব-সরণ বিচার করিলে,

$$h = V \sin \theta.t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

$$= V\sin\theta \times \frac{h}{(V\cos\theta - v)\tan\theta} - \tfrac{1}{2}g\frac{h^2}{(V\cos\theta - v)^2\tan^2\theta}$$

$$= \frac{h\{V\sin\theta\tan\theta\,(V\cos\theta - v)\} - \frac{1}{2}gh}{(V\cos\theta - v)^2\tan^2\theta}.$$

উভয়পক্ষকে $h$ দ্বারা ভাগ করিয়া বজ্রগুণন দ্বারা,

$$(V\cos\theta - v)^2\tan^2\theta = \frac{V\sin\theta \times \sin\theta\,(V\cos\theta - v)}{\cos\theta} - \tfrac{1}{2}gh$$

বা, $$\tfrac{1}{2}gh = \frac{V\sin^2\theta\,(V\cos\theta - v)}{\cos\theta} - (V\cos\theta - v)^2\tan^2\theta$$

$$= (V\cos\theta - v)\sin^2\theta\left\{\frac{V}{\cos\theta} - \frac{(V\cos\theta - v)}{\cos^2\theta}\right\}$$

$$= (V\cos\theta - v)\sin^2\theta\left\{\frac{V\cos\theta - V\cos\theta + v}{\cos^2\theta}\right\}$$

$$= (V\cos\theta - v)\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}v,$$

বা, $gh = 2(V\cos\theta - v)\,v\tan^2\theta,$

অথবা, $2(V\cos\theta - v)\,v\tan^2\theta = gh.$

## প্রশ্নমালা 6

1. একটি বস্তুকণাকে অনুভূমিকের সহিত $a$ কোণে সেকেণ্ডে 160 ফুট বেগে উৎক্ষেপণ করা হইল। $\sin a = \frac{4}{5}$ হইলে $2\frac{1}{2}$ সেকেণ্ড পরে উহার বেগের মান ও অভিমুখ কি হইবে নির্ণয় কর।

2. একটি বস্তুকণাকে অনুভূমিকের সহিত 60° কোণে সেকেণ্ডে 100 ফুট বেগে উৎক্ষেপণ করা হইল। 2 সেকেণ্ড পরে উহার বেগের মান ও অভিমুখ নির্ণয় কর।

3. একটি বস্তুকণাকে অনুভূমিকের সহিত 60° কোণে সেকেণ্ডে 120 ফুট বেগে উৎক্ষেপণ করা হইল। 81 ফুট উচ্চতায় উঠিলে উহার বেগের মান ও অভিমুখ কত হইবে ?

4. অনুভূমিক তলে অবস্থিত কোন এক বিন্দু হইতে উৎক্ষিপ্ত কোন বস্তু 4 সেকেণ্ড পরে উৎক্ষেপণ বিন্দু হইতে 64 গজ দূরে ঐ সমতলে ফিরিয়া আসে। উৎক্ষেপণ-বেগ নির্ণয় কর।

5. অনুভূমিকের সহিত 60° কোণে সেকেণ্ডে 40 ফুট বেগে একটি বল উৎক্ষেপণ করা হইল। সর্বাধিক উচ্চতা এবং অনুভূমিক পাল্লা নির্ণয় কর।

6. একটি বুলেট অনুভূমিকের সহিত 30° কোণে সেকেণ্ডে 640 ফুট বেগে

উৎক্ষিপ্ত হইল। বুলেটটির সর্বাধিক উচ্চতা, অনুভূমিক পাল্লা এবং উৎপতন কাল নির্ণয় কর।

7. 2000 ফুট উঁচু দিয়া ঘণ্টায় 60 মাইল বেগে অনুভূমিক অভিমুখে উড্ডীয়মান একটি প্লেন হইতে বোমা ফেলা হইল। বোমাটি লক্ষ্যের কতদূর হইতে ফেলিলে উহা ঠিক লক্ষ্যবস্তুকে আঘাত করিবে ?

8. একটি বস্তুকণাকে অনুভূমিকের সহিত এরূপ একটি কোণে উৎক্ষেপণ করা হইল, যাহার sin-এর মান $\frac{3}{5}$. বস্তুকণাটির অনুভূমিক পাল্লা 3 মাইল হইলে, উৎক্ষেপণ-বেগ নির্ণয় কর। $(g = 32 \text{ ft./sec}^2)$

9. 200 ফুট উঁচু একটি স্তম্ভের শীর্ষ হইতে একটি পাথরকে অনুভূমিক দিকে কত বেগে ছুঁড়িলে উহা স্তম্ভের পাদদেশ হইতে 800 ফুট দূরে মাটিতে আসিয়া পড়িবে ?

10. একটি পাথরকে অনুভূমিকের সহিত 45° কোণে সেকেণ্ডে 80 ফুট বেগে ছোঁড়া হইল। অপর একটি পাথরকে একই স্থান হইতে কত বেগে সোজা উপরের দিকে ছুঁড়িলে উহা একই সর্বাধিক উচ্চতায় উঠিবে ?

11. একটি গুলি 96 ফুট দূরবর্তী 64 ফুট উঁচু একটি দেওয়ালের ঠিক উপর দিয়া অনুভূমিক অভিমুখে অতিক্রম করে। উহার উৎক্ষেপণ-বেগ এবং প্রক্ষেপ-কোণ নির্ণয় কর।

12. 6 ফুট উচ্চতা হইতে অনুভূমিক দিকে নিক্ষিপ্ত একটি টেনিস-বল খেলোয়াড়ের নিকট হইতে 39 ফুট দূরে অবস্থিত 3 ফুট উঁচু একটি জাল ঠিক অতিক্রম করিয়া যায়। বলটির প্রাথমিক বেগ এবং উহা কতদূরে মাটিতে গিয়া পড়ে তাহা নির্ণয় কর।

13. অনুভূমিকের সহিত $\tan^{-1}\frac{4}{3}$ কোণে নিক্ষিপ্ত একটি বল 60 ফুট দূরবর্তী একটি দেওয়ালের উপর দিয়া ঠিক অনুভূমিক ভাবে অতিক্রম করে। বলটি দেওয়ালের ঠিক উপরে পৌছিতে 2·2 সেকেণ্ডে সময় লাগিলে (i) সর্বাধিক উচ্চতায় উঠিবার সময় (ii) প্রক্ষেপ-বেগ এবং (iii) দেওয়ালের উচ্চতা নির্ণয় কর।

14. একটি গুলি 50 গজ দূরবর্তী এবং 75 ফুট উঁচু একটি দেওয়ালের ঠিক উপর দিয়া অনুভূমিক দিকে অতিক্রম করে। উহার প্রক্ষেপ-বেগ ও প্রক্ষেপ-কোণ নির্ণয় কর।

15. 192 ফুট উঁচু একটি স্তম্ভের শীর্ষ হইতে অনুভূমিকের সহিত 30° কোণে সেকেণ্ডে 32 ফুট বেগে একটি বস্তু প্রক্ষিপ্ত হইল। কখন এবং স্তম্ভের পাদদেশ হইতে কতদূরে বস্তুটি মাটিতে পড়িবে তাহা নির্ণয় কর।

16. দুইটি গোলা একই সময়ে একই অনুভূমিক তলে অবস্থিত দুইটি বিন্দু হইতে ছোঁড়া হইল। একটি গোলার প্রক্ষেপ-বেগ সেকেণ্ডে 800 ফুট এবং অনুভূমিকের সহিত প্রক্ষেপ-কোণ $a$, যেখানে $\sin a = \frac{3}{5}$ এবং অপরটির প্রক্ষেপ-বেগ একই, কিন্তু প্রক্ষেপ-

কোণ $\beta$, যেখানে $\sin\beta = \frac{4}{5}$. প্রথম গোলাটি মাটিতে আসিয়া পড়িতে কত সময় লাগিবে নির্ণয় কর।

17. একজন খেলোয়াড় 6 ফুট উচ্চতা হইতে অনুভূমিকের সহিত 30° কোণে সেকেণ্ডে 80 ফুট বেগে একটি ক্রিকেট বল উৎক্ষেপণ করে। অপর একজন খেলোয়াড় মাটি হইতে 2 ফুট উঁচুতে উহা ধরিয়া ফেলে। খেলোয়াড়-দুইজনের মধ্যে দূরত্ব কত?

18. 48 ফুট উঁচু একটি স্তম্ভের শীর্ষদেশ হইতে অনুভূমিকের সহিত 30° কোণে সেকেণ্ডে 64 ফুট বেগে গুলি ছোঁড়া হইল। স্তম্ভের পাদদেশ হইতে কত দূরে গুলিটি মাটিতে আসিয়া পড়িবে?

19. একটি জানালা হইতে অনুভূমিকের সহিত 60° কোণ করিয়া নিচের দিকে সেকেণ্ডে 40 ফুট বেগে একটি বল নিক্ষেপ করা হইল এবং উহা 1 সেকেণ্ড পরে মাটিতে পড়িল। মাটিতে পড়িবার মুহূর্তে বলটির বেগের মান ও দিক্ নির্ণয় কর। বলটি কতটা উচ্চতা হইতে ছোঁড়া হইয়াছিল তাহাও নির্ণয় কর।

20. 400 ফুট উঁচু একটি স্তম্ভের শীর্ষ হইতে অনুভূমিকের সহিত 30° কোণে সেকেণ্ডে 768 ফুট বেগে একটি গুলি ছোঁড়া হইল। স্তম্ভের পাদদেশ হইতে কত দূরে উহা মাটিতে পড়িবে?

21. মাটি হইতে 7 ফুট উঁচু কোন স্থান হইতে উৎক্ষিপ্ত একটি বস্তু মাটি হইতে সর্বাধিক 16 ফুট উঁচুতে ওঠে এবং প্রক্ষেপ-বিন্দু হইতে 105 ফুট দূরে মাটিতে আসিয়া পড়ে। বস্তুটির প্রক্ষেপ-বেগ এবং প্রক্ষেপ-কোণ নির্ণয় কর।

22. একটি বস্তুকণার প্রক্ষেপ-বেগ সেকেণ্ডে 48 ফুট। সর্বাধিক অনুভূমিক পাল্লা কত নির্ণয় কর এবং একই অনুভূমিক পাল্লা 36 ফুটের যে-দুইটি প্রক্ষেপ-কোণ হইতে পারে, তাহা নির্ণয় কর।

23. একটি বস্তু এরূপ কোণে প্রক্ষিপ্ত হইল যে, অনুভূমিক পাল্লা সর্বাধিক উচ্চতার তিনগুণ হইল। প্রক্ষেপ-কোণ নির্ণয় কর এবং এই প্রক্ষেপ-কোণের জন্য অনুভূমিক পাল্লা 400 গজ হইলে প্রক্ষেপ-বেগ এবং উৎপতন কাল নির্ণয় কর।

24. একটি নির্দিষ্ট বেগে প্রক্ষিপ্ত-কোণ বস্তুকণার অনুভূমিক পাল্লা $R$ হইলে এবং যে-দুইটি বিভিন্ন পথে বস্তুকণাটির অনুভূমিক পাল্লা $R$ হয়, সেই দুইটি পথে সর্বাধিক উচ্চতা যথাক্রমে $H$ ও $H'$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $R = 4\sqrt{HH'}$.

25. একই বেগে দুইটি বিভিন্ন কোণে প্রক্ষিপ্ত একটি বস্তুকণার অনুভূমিক পাল্লা $R$ একই হয়। $t$ ও $t'$ যথাক্রমে ঐ দুই ক্ষেত্রে উৎপতন কাল হইলে, দেখাও যে, $R = \frac{1}{2}gtt'$.

26. অনুভূমিক পাল্লা $R$, উৎপতন কাল $T$ এবং প্রক্ষেপ-কোণ $\alpha$ হইলে, দেখাও যে, $2R\tan\alpha = gT^2$. [W. B. H. S. 1960]

27. অনুভূমিকের সহিত $\alpha$ কোণে প্রক্ষিপ্ত একটি বস্তু পরস্পর হইতে $2a$ দূরবর্তী

এবং সমান উচ্চতা $a$-বিশিষ্ট দুইটি দেওয়ালের ঠিক উপর দিয়া চলিয়া যায়। দেখাও যে, উহার অনুভূমিক পাল্লা হইল $2a \cot \frac{\alpha}{2}$. [ C. U. 1943 ]

28. একটি প্রাসের (Projectile) অনুভূমিক পাল্লা $r$, সর্বাধিক উচ্চতা $h$ এবং প্রক্ষেপ-বেগ $v$ হইলে, দেখাও যে,

$$\frac{v^2}{2g} = h + \frac{r^2}{16h}.$$ [ H. S. B. S. E. 1963 ]

## সপ্তম অধ্যায়

# নিউটনের গতি সূত্রাবলী

## ( Newton's laws of motion )

**7·1. গতিবিদ্যা (Kinetics) :** এ-পর্যন্ত দ্রুতি, বেগ ও ত্বরণ প্রভৃতি আলোচনায় গতিকে নিছক গতি হিসাবেই দেখানো হইয়াছে। সেই আলোচনা স্থিতি-বিদ্যার অন্তর্গত।

এইবার, (i) কে গতি সঞ্চার করে ? এবং (ii) কে-ই বা সেই গতি লাভ করে ? —এই দুইয়ের বিচার করা যাইতে পারে। পূর্বেই বলা হইয়াছে, ইহাই গতিবিদ্যার আলোচ্য বিষয়।

জড়বস্তুর ভর-ই গতির আশ্রয় ; একটু পরে দেখা যাইবে যে, বস্তুর ভরে যে বা যাহা সেই গতি সঞ্চার করে, তাহারই নাম বল। অতএব ভর ও বলের পরিপ্রেক্ষিতে এইবার গতির আলোচনা করা হইবে।

**7·2. নিউটনের সূত্রত্রয় (Laws of Newton) :** বস্তুর গতি-সম্বন্ধে নিউটন তিনটি সূত্র নির্দেশ করিয়াছেন। এইগুলি বলবিদ্যার ভিত্তিস্বরূপ। ইহাদের মধ্যে বস্তুর ভর, ভার, বল ও গতির স্বরূপ ও পারস্পরিক সম্পর্ক বিধিবদ্ধ হইয়াছে। সূত্রগুলি এই :

**প্রথম সূত্র :** বলপ্রয়োগে অবস্থা-পরিবর্তনে বাধ্য না হইলে বস্তুমাত্রই উহার স্থিতিশীল বা সরল রেখায় সমহারে গতিশীল অবস্থায় অব্যাহত থাকে। (Every body continues in its state of rest or of uniform motion in a straight line, except in so far as it is compelled by forces to change its state.)

**দ্বিতীয় সূত্র :** গতি-পরিবর্তন প্রযুক্ত বলের সমানুপাতিক এবং এই পরিবর্তন ঘটে প্রযুক্ত বলের গতিমুখে ও সরল রেখায়। (The change of motion is proportional to the impressed motive force and takes place along the straight line in which the force is impressed.)*

[ * সূত্রটির সংশোধিত আধুনিক রূপ 7·6 অনুচ্ছেদের শেষাংশটি দ্রষ্টব্য। ]

**তৃতীয় সূত্র :** প্রত্যেকটি **ক্রিয়ার** সমান ও বিপরীতমুখী একটি **প্রতিক্রিয়া** থাকে। (Every action has an equal and opposite reaction.)

**7·3. নিউটনের প্রথম সূত্র হইতে বলের সংজ্ঞা নির্দেশ (Definition of force from the Newton's first law) :** নিউটনের প্রথম সূত্রের প্রথম অংশে আছে : "বলপ্রয়োগে অবস্থা-পরিবর্তনে বাধ্য না হইলে"

ইত্যাদি। ইহার অর্থ বস্তুর অবস্থা-পরিবর্তনের কারণ হইল বল বা তাহার প্রভাব। বল যদি না থাকিত, তবে বস্তু-নিচয় যেমন অবস্থায় আছে ঠিক তেমন অবস্থাতেই অনন্তকাল অব্যাহত থাকিত। পড়িয়া থাকিলে উহারা ঠায় পড়িয়াই থাকিত, চলিতে থাকিলে আবার তাহারা সরল রেখায় ও সমহারে চিরকাল চলিতেই থাকিত। কিন্তু কোন বস্তু এমনতর পড়িয়াও থাকে না, অথবা চলিতে থাকিলে, এমনভাবে সরল রেখায় সমহারে চিরকাল চলেও না। বস্তুমাত্রেরই কখনও-না-কখনও অবস্থা-পরিবর্তন ঘটেই। নিউটনের সূত্র বলিতেছে তাহার কারণ হইল **বল**। এই কথার মধ্যে বলের স্বরূপ সম্বন্ধে এইরূপ একটা সংজ্ঞা লুকাইয়া আছেঃ **যাহা বস্তুর অবস্থা-পরিবর্তন ঘটায় অথবা ঘটাইতে চেষ্টা করে তাহাই বল।**

এই সংজ্ঞাটির শেষ অংশটুকু একটু পরিষ্কার করা প্রয়োজন। বল বস্তুর অবস্থা-পরিবর্তন করিতে চেষ্টা করে কিন্তু সব সময়েই যে পারে, এমন নয়। উদাহরণস্বরূপ, একটা স্থির টেবিলকে যদি আস্তে ঠেলা যায় তবে টেবিলটি নড়ে না। অর্থাৎ স্থির অবস্থার পরিবর্তন হয় না। তাই বলিয়া উহার উপর যে একটি বল ক্রিয়া করে, তাহাও অস্বীকার করা যায় না। বলটা পরিমাণে আরও একটু বেশী হইলে টেবিলটি হয়তো সরিতে থাকিবে। অর্থাৎ তখন তাহার স্থির অবস্থা হইতে গতিশীল অবস্থায় পরিবর্তন ঘটিবে, এবং সেক্ষেত্রে বলের অস্তিত্ব স্পষ্ট ধরা পড়িবে। কিন্তু প্রথম ক্ষেত্রে ঠেলা সত্ত্বেও টেবিলটি যখন নড়ে না তখনও বলের ক্রিয়া অবশ্যই রহিয়াছে; কেবল পরিমাণে অল্প বলিয়াই উহা টেবিলটিকে নড়াইতে পারিতেছে না। নচেৎ টেবিলটির অবস্থা-পরিবর্তনের জন্য সে-ও চেষ্টা করিতেছে। কাজেই যাহা বস্তুর অবস্থা-পরিবর্তন ঘটায় অথবা ঘটাইতে চেষ্টা করে, তাহাই বল।

এখন সমহারে গতিশীল অবস্থা হইল সমবেগের অবস্থা এবং সমবেগের পরিবর্তন-হারের নামই হইল ত্বরণ। **কাজেই ত্বরণ উৎপন্ন করাই বলের কাজ।** বল যখন কোন স্থির বস্তুর উপর কাজ করে, তখনও এই ত্বরণ সঞ্চার করার জন্যই তাহার চেষ্টা। বলের এই চেষ্টা সফল হইলে বস্তুটি চলিতে সুরু করে এবং তখন তাহার মধ্যে ত্বরণ ধরা পড়ে। কিন্তু চেষ্টা সফল না হইলে বস্তুটি স্থিরই থাকে। তবে বলের ধর্ম যেহেতু ত্বরণ উৎপন্ন করা, সেইহেতু বলা চলে এক্ষেত্রেও বল ত্বরণ সঞ্চার করিতেছে, কিন্তু সেই ত্বরণ বাধাহত হইয়া রুদ্ধ হইয়া গিয়াছে।

নিউটনের প্রথম সূত্র এইভাবে বলের একটি গুণগত সংজ্ঞা নির্দেশ করে। ইহা হইতে আমরা বলের গুণ বা ধর্ম অর্থাৎ বলের স্বরূপ জানিতে পারি।

**7·4. নিউটনের প্রথম সূত্র ও জাড্যতত্ত্ব (First law of Newton and theory of inertia)ঃ** নিউটনের প্রথম সূত্রের শেষাংশটুকু এইবার বিচার করা যাক। এই অংশে আছে যে বলের ক্রিয়া না থাকিলে "বস্তুমাত্রই উহার স্থিতিশীল বা সরল রেখায় সমহারে গতিশীল অবস্থায় অব্যাহত থাকে"। অর্থাৎ

একটি বস্তু যদি কোথাও স্থির পড়িয়া থাকে আর তাহার উপর যদি কোন প্রকারের কোন বল কাজ না করে, তবে চিরকাল উহা সেই অবস্থায় ঠায় পড়িয়া থাকিবে। আবার বস্তুটি যদি চলিতে থাকে আর কোন রকমের কোন বল যদি উহার উপর কাজ না করে তবে অনন্তকাল উহা চলিতেই থাকিবে। এই এক কথা। দ্বিতীয় কথা, চলিবার সময় উহা সমহারে এবং সরল রেখাতেই চলিতে থাকিবে। যদি তাহাই হয় তবে বস্তুগুলি জড়ভরত। ইহারা চলিলে থামিতে পারে না, থামিলে নড়িতে পারে না। নিজের কোন ক্ষমতাই নাই তাহাদের। কাজেই তাহারা জড়। নিউটনের প্রথম সূত্র এইভাবে বস্তুনিচয়ের **জড়ত্ব** বা **জাড্য** ঘোষণা করে। এইজন্য কখনও কখনও এই সূত্রকে **জাড্যসূত্র**ও বলা হয়।

উপরের আলোচনা হইতে এ-কথা স্পষ্ট যে, বস্তুর জাড্য আবার দুই রকমের ; যথা—স্থির অবস্থায় জাড্য এবং গতিশীল অবস্থায় জাড্য। সংক্ষেপে উহারা যথাক্রমে **স্থিতিজাড্য** ও **গতিজাড্য** নামে পরিচিত।

**স্থিতিজাড্য** সম্বন্ধে ধারণা করা অনেকটা সহজ। একটা বস্তু যদি স্থির হইয়া পড়িয়া থাকে, তবে এমনিতেই তাহা পড়িয়াই থাকিবে। পাথর, পাহাড় প্রভৃতি জিনিস তো এইভাবেই বহুকাল পড়িয়া আছে। অনন্তকালও তাহারা পড়িয়া থাকিত, যদি না প্রকৃতির অসংখ্য উৎপাত তাহাদের উপর ক্রিয়া করিত। রৌদ্র, বৃষ্টি, ঝড়-বাতাস, আরও কত কি দিনরাত তাহাদের উপর অল্পবিস্তর ক্রিয়া করে। সেই ক্রিয়া হয় রাসায়নিক, নয়তো বলপ্রয়োগ-জনিত। রাসায়নিক ক্রিয়ায় বস্তুর ক্ষয়বৃদ্ধি ও রূপান্তর ঘটে আর বলপ্রয়োগে সেই বস্তুর অবস্থা-পরিবর্তন হয়। নচেৎ যে-বস্তু পড়িয়া আছে তাহা যে চিরকালই পড়িয়া থাকিত, তাহা প্রায় নিত্যসত্য। স্থিতিজাড্য তাই স্বতঃসিদ্ধের মতো স্পষ্ট।

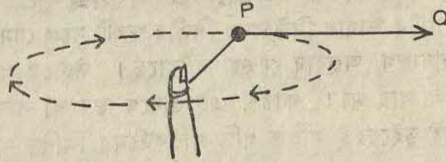
**গতিজাড্য** কিন্তু এত সহজে ধারণা করা যায় না। এখানে খানিক কল্পনা ও খানিকটা অনুমানের আশ্রয় লইতেই হয়।

খুব পালিশ একটা তলের উপর তেমনি পালিশ একটা গুলি গড়াইয়া দিলে সহজে তাহা থামে না। কোন্-না-কোন সময়ে যে উহা আদৌ থামে তাহার কারণ, বাতাস আর সেই পালিশ তলের কিছু-না-কিছু ঘর্ষণ তাহার গতি রুদ্ধ করে। যদি বাতাস না থাকিত আর ঘর্ষণ হইতেও সম্পূর্ণ রেহাই মিলিত, তবে গুলিটা কখনও থামিত না। অনন্তকাল সমহারে ও সরল রেখায় উহা গতিশীল অবস্থায় অব্যাহত থাকিত।

গাড়ী যতক্ষণ সমবেগে চলে ততক্ষণ সেই গাড়ীর আরোহী উহার গতি প্রায় বুঝিতেই পারে না, যদি না সে বাহিরে তাকায়। কিন্তু এইভাবে চলিতে চলিতে গাড়ীটার বেগ যেই একটু বাড়িল অমনি আরোহী পিছনের দিকে একটু টলিয়া পড়ে। কারণ একটা বিশেষ গতিতে ঐ ব্যক্তি এতক্ষণ অভ্যস্ত হইয়া উঠিয়াছিল অর্থাৎ গাড়ীটা যে সমবেগে চলিতেছিল তাহার দেহও ঠিক সেই সমবেগে চলিতেছিল। ফলে সেই

সমবেগে তাহার জাড্য বা জড়ত্ব আসিয়া গিয়াছিল। এখন সামান্য একটু গতি-পরিবর্তনেও তাই তাহার ঝাঁকি লাগে। আবার, পিছনদিকে একটু বেগ না লইয়া যদি চলন্ত একটা গাড়ী হইতে নামা যায় তবে সামনের দিকে সবেগে ছিট্‌কাইয়া পড়া অনিবার্য। ইহার কারণ, গাড়ীতে থাকাকালে দেহটি গাড়ীর বেগ লাভ করিয়াছে এবং সেই বেগে দেহটির গতিজাড্য আসিয়া গিয়াছে। ফলে সেই বেগেই দেহ চলিতে চায়। আচমকা তাহাকে থামাইতে গেলেই বিভ্রাট, আগের বেগে মুখ থুবড়াইয়া আছাড় খাইতে হয়।

উদাহরণ-দুইটি হইতে গতিজাড্যের এইটুকু নিশ্চয় পরিষ্কার হইয়াছে যে, বস্তুমাত্রই বিশেষ একটা বেগে চলিতে থাকিলে সেই বেগেই অনন্তকাল চলিতে চায়। **কিন্তু গতিজাড্যের ফলে বস্তু-বিশেষ যে সমবেগে ও সরল রেখা বরাবরই চলিতে চায়,** তাহার প্রমাণ কি? একটি দৃষ্টান্ত লওয়া যাক। একটা সূতার ডগায় একটা ঢিল বাঁধিয়া ঘোরানো হইতেছে।



30নং চিত্র

$P$ ঢিলটি যেন একটা বৃত্তপথে সমদ্রুতিতেই ঘুরিতেছে। এখন হঠাৎ সূতাটি ছাড়িয়া দিলে ঢিলটি সোজা সরল রেখায় ছুটিয়া যায়। আঙুলের ডগাটি কেন্দ্র করিয়া $P$ ঢিলটি বৃত্তপথে ঘুরিতেছে, এবং আঙুলের ডগাটির দিকে একটা টান বা একরকমের বল কেন্দ্রের দিকে কাজ করিতেছে। সূতাটি ছাড়িয়া দেওয়ার অর্থ টান বা বল অপসারিত করা। তাহার পর দেখা গেল বৃত্তের অন্যতম স্পর্শক $PQ$ সরলরেখায় সমবেগেই ছিট্‌কাইয়া চলিয়া যাইতেছে। ইহাতে প্রমাণ হয় সমহারে গতিশীল বস্তু সরল রেখা বরাবরই চলিতে চায়, যদি না বলের দ্বারা বাধ্য হইয়া অন্যভাবে উহা চালিত হয়। আলোচ্য উদাহরণে ঢিলটি ছিট্‌কাইয়া কিন্তু বেশীক্ষণ চলে না, খানিক বাদেই উহা পড়িয়া যায়। তাহার কারণ অভিকর্ষজ বল তাহাকে নিচের দিকে চালিত করে। যদি বাতাস বা অভিকর্ষজ বল না থাকিত, তবে দেখা যাইত, ঢিলটি সেই সরল রেখায় চলিতেই থাকিত, কখনও থামিত না। গতিজাড্যের ফলে সমবেগে চলমান বস্তু যে সরল রেখা বরাবরই চলিতে থাকে, আলোচ্য উদাহরণটি তাহাই প্রমাণ করে।

**7·5. বস্তুর ভর ও জাড্য (Mass of a particle and inertia) ঃ** বস্তুর ভর বলিতে উহার জড়-পরিমাণকে বুঝায়। কিন্তু এই জড়-পরিমাণ কি-ভাবে মাপা হইবে? উহার ঘন-পরিমাণকেও বস্তুটির জড়-পরিমাণ বলা যাইতে পারে। তাহা হইলে এক ঘনফুট লোহা আর এক ঘনফুট কাঠের জড়-পরিমাণ কি সমান? নিশ্চয়ই না। কারণ এক ঘনফুট লোহা এক ঘনফুট কাঠ অপেক্ষা ওজনে অনেক বেশী

ভারী ; আর ওজন দিয়াই ভরের পরিমাণ নির্ণয় করার নিয়ম। কাজেই বস্তুর জড়-পরিমাণই উহার ভর—এই কথা সম্পূর্ণ অভ্রান্ত বলা চলে না।

এখন, $m$ ভরযুক্ত একটা বস্তুর মধ্যে $v$ বেগ সঞ্চার করিতে যদি $P$ বল প্রয়োগ করিতে হয়, তবে স্পষ্টতই $2m$ ভরযুক্ত অপর একটি বস্তুতে সেই $v$ বেগ সঞ্চার করিতে $2P$ বল প্রয়োগ করিতে হইবে। বস্তু-দুইটির কেহই নিজে নিজে নড়িতে পারে না, চাহেও না। বরং নড়িতে চাহিলে তাহাদের জড়ত্ব বা জাড্যই বাধা দেয়। কাজেই প্রথম বস্তু যদি একগুণ বাধা দেয়, তবে দ্বিতীয় বস্তু তাহার দুইগুণ পরিমাণ বাধা দিবে। ইহা হইতে বলা যায় যে, প্রথমটির যদি একগুণ ভর হয়, তবে দ্বিতীয়টির ভর হইবে দুইগুণ। এইভাবে বলা চলে যে, **বস্তুর জাড্যই তাহার ভরের প্রকৃত পরিমাপ।**

**7·6. নিউটনের দ্বিতীয় সূত্রের তাৎপর্য ও সংশোধন :** ল্যাটিন ভাষায় নিউটনের দ্বিতীয় সূত্রটি মূলে যেমন আছে, 7·2 অনুচ্ছেদে তাহার প্রায় ভাষানুগ অনুবাদ দেওয়া হইয়াছে। উহাতে 'গতি-পরিবর্তন' কথাটি নিখুঁত হইয়াছে বলা যায় না। কারণ, এই প্রসঙ্গে ভর বা সময়ের একেবারেই উল্লেখ নাই। কিন্তু এই দুইয়েরই সহিত গতি-পরিবর্তনের নিবিড় সম্বন্ধ রহিয়াছে। সহজেই ধারণা করা যায় যে, একগুণ ভরে যেটুকু বল প্রয়োগ করিলে যতটা বেগ সঞ্চারিত হয়, একই সময়ে দুইগুণ ভরে ঠিক ততটাই বেগ সঞ্চার করিতে হইলে আগেকার প্রযুক্ত বলের দ্বিগুণ পরিমাণ বল প্রয়োগ করিতে হইবে। সুতরাং ভরের সঙ্গে বলের তথা গতি-পরিবর্তনের সম্পর্ক রহিয়াছে। দ্বিতীয়ত, $v = u + ft$ সূত্র অনুসারে এক সেকেণ্ডে যত বেগ-পরিবর্তন হইবে, দুই সেকেণ্ডে হইবে তাহার দ্বিগুণ বেগ-পরিবর্তন। অতএব সময়ের সহিতও গতি-পরিবর্তনের ঘনিষ্ঠ সম্পর্ক। নিউটনের দ্বিতীয় সূত্রের মূলরূপে কিন্তু ভর ও সময় এই দুইয়ের কাহারও উল্লেখ নাই। কাজেই বর্তমান কালে সূত্রটিকে কিঞ্চিৎ সংশোধিত আকারে গ্রহণ করা হয়।

ল্যাটিন ভাষায় movimentum শব্দের অর্থ motion বা গতি। সেই হইতে 'গতির পরিমাণ' অর্থে momentum শব্দটির সৃষ্টি, বাংলা ভাষায় *momentum*-এর পরিভাষা হইল **ভরবেগ**। ভরবেগের পরিমাণ হয় ভর ও বেগের গুণফল দ্বারা। কাজেই আজকাল নিউটনের দ্বিতীয় সূত্রে 'গতি-পরিবর্তন' কথাটির স্থলে 'ভরবেগের পরিবর্তন' লেখা যায়। ইহাতে ভর-সংক্রান্ত প্রশ্নের সমাধান হয়। সময়-সংক্রান্ত প্রশ্নের মীমাংসার জন্য এখন শুধু 'ভরবেগের পরিবর্তন' নয়, 'ভরবেগের পরিবর্তন-হার' কথাটিই ব্যবহৃত হয়। 'হার' কথাটির মধ্যে সময়ের বিচার লুকাইয়া আছে। কেননা, এক একক সময়ে ভরবেগের যতটা পরিবর্তন হয় তাহাই তো ভরবেগের পরিবর্তন-হার।

সুতরাং নিউটনের দ্বিতীয় সূত্রটির সংশোধিত রূপ দাঁড়াইয়াছে এইরূপ : **ভরবেগের পরিবর্তন-হার প্রযুক্ত বলের সমানুপাতিক এবং যে সরল রেখায় প্রযুক্ত বলটি সক্রিয়, সেই সরল রেখাতেই ভরবেগের সেই পরিবর্তন**

**সংঘটিত হইয়া থাকে।** (The rate of change of momentum is proportional to the applied force and the change of momentum takes place in the direction of the straight line in which the force acts.)

**7·7. ভরবেগ (Momentum) :** বস্তু-বিশেষের ভর ও বেগের গুণফলকে উহার **ভরবেগ** বলে।

সুতরাং, কোন বস্তুর ভর $m$ এবং বেগ $v$ হইলে, উহার **ভরবেগ** $= mv$।

ভরবেগের একটি উপাদান হইল বেগ। বেগের দিক্ আছে। কাজেই বেগের দিকেই ভরবেগেরও দিক্ রহিয়াছে। সেই কারণে ভরবেগ একটি **ভেক্টর।**

($a$) **ভরবেগের একক :** এক একক ভরযুক্ত কোন বস্তু যদি এক একক বেগে চলমান হয়, তবে তাহার ভরবেগকেই ভরবেগের একক বলা হয়।

($b$) **এফ.-পি.-এস্. পদ্ধতিতে** ভরের একক—এক পাউণ্ড এবং বেগের একক—সেকেণ্ডে এক ফুট। সুতরাং এক পাউণ্ড ভরের 1 ফুট/সেকেণ্ড বেগ থাকিলে উহার ভরবেগই এক একক ভরবেগ। সংক্ষেপে এক এককে 1 পাউণ্ড-ফু./সেকেণ্ড বা 1 পা.-ফু./সে. লেখা হয়।

($c$) **সি.-জি.-এস্. পদ্ধতিতে** ভরের একক—এক গ্রাম এবং বেগের একক—1 সেন্টিমিটার/সেকেণ্ড। সুতরাং সেকেণ্ডে 1 সে.মি. বেগে চলমান 1 গ্রাম ভরের ভরবেগই এই পদ্ধতিতে ভরবেগের একক। সংক্ষেপে ইহাকে 1 গ্রাম-সেন্টিমিটার/সেকেণ্ড বা 1 গ্রা.-সে.মি./সে. এইরূপ লেখা হয়।

**উদাহরণ 1.** 144 পাউণ্ড ওজনের এক ব্যক্তি ঘণ্টায় 10 মাইল বেগে দৌড়াইতেছে। তাহার ভরবেগ কত ?

$$\text{ঘণ্টায় 10 মাইল} = \frac{10 \times 1760 \times 3}{3600} = \frac{44}{3} \text{ ফুট/সেকেণ্ড};$$

$$\therefore \text{ নির্ণেয় ভরবেগ} = \overset{48}{\cancel{144}} \times \frac{44}{\cancel{3}} \text{ বা 2112 পা.-ফু./সে. একক।}$$

**উদাহরণ 2.** 15 কিলোগ্রাম ভরসম্পন্ন একটি গোলা যদি সেকেণ্ডে ·4 কিলোমিটার বেগে ধাবমান হয়, তবে উহার ভরবেগ কত ?

$$15 \text{ কিলোগ্রাম} = 15000 \text{ গ্রাম} = 15 \times 10^3 \text{ গ্রাম},$$

$$\cdot 4 \text{ কি. মি./সে.} = 40000 \text{ সে.মি./সে.} = 4 \times 10^4 \text{ সে.মি./সে.।}$$

$$\therefore \text{ নির্ণেয় ভরবেগ} = 15 \times 10^3 \times 4 \times 10^4 \text{ গ্রা.-সে.মি./সে.}$$
$$= 6 \times 10^8 \text{ গ্রাম-সে.মি./সেকেণ্ড একক।}$$

**7·8. দ্বিতীয় সূত্র হইতে বলের পরিমাপ-প্রণালী নির্ণয় (Measurement of force from Newton's second law) :** নিউটনের প্রথম গতিসূত্রটি হইতে বলের গুণগত একটি সংজ্ঞা পাওয়া যায়। নিচের আলোচনা

হইতে দেখা যাইবে যে, নিউটনের দ্বিতীয় সূত্র হইতে পাওয়া যায় বলের পরিমাপ।

ধরা যাক, $m$ ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুকণা $\overrightarrow{OX}$ সরল রেখা বরাবর চলমান এবং $t$ সময়ে মূলবিন্দু হইতে উহার সরণ $x$. তাহা হইলে বস্তুকণাটির বেগ $v=\dfrac{dx}{dt}$ এবং বস্তুকণাটির ভরবেগ হইবে $mv$. $m$ ধনাত্মক বলিয়া ভরবেগের অভিমুখ $v$-র অভিমুখের অনুরূপ হইবে।




31নং চিত্র

$\therefore$ সময়-সাপেক্ষে ভরবেগ-পরিবর্তনের হার হইল

$$\frac{d}{dt}(mv)=m\,\frac{dv}{dt}=m\,\frac{d^2x}{dt^2}=mf.$$

সুতরাং ভরবেগ-পরিবর্তনের হার হইল ভর এবং ত্বরণের গুণফলের সমান এবং তাহা এমন একটি ভেক্টর রাশি যাহার অভিমুখ ভরটির ত্বরণের অভিমুখের অনুরূপ।

এখন, নিউটনের দ্বিতীয় সূত্রে বিবৃত হইয়াছে যে, ভরবেগ-পরিবর্তনের হার প্রযুক্ত বলের সমানুপাতিক এবং ভরবেগের এই পরিবর্তন ঘটে সেই অভিমুখে যে-অভিমুখে প্রযুক্ত বলটি সক্রিয়। সুতরাং বস্তুকণাটির উপর $\overrightarrow{OX}$ অভিমুখে $F$ বল ক্রিয়া করিলে $F\propto mf$, $\quad\therefore\ F=kmf$, যেখানে $k$ ধ্রুবক।

এইবার, বলের একক যদি এইরূপভাবে নির্বাচন করা যায় যে, এই সমীকরণে $k=1$ হয়, তবে সমীকরণটি সুবিধাজনক হয়। সেইজন্য যে-পরিমাণ বল একক ভরের উপর ক্রিয়া করিয়া একক ত্বরণ উৎপন্ন করে তাহাকেই বলের একক বলিয়া ধরা হয়। বলের এরূপ একককে চরম একক বলা হয়।

$\therefore$ বলের চরম এককের ক্ষেত্রে, $F=1$ তখনই, যখন $m=1$ এবং $f=1$;

$\therefore\ k=1$

$\therefore$ বলের চরম একক লইলে, $F=mf$

**7·9. বলের একক (Unit of force) ঃ** উপরের অনুচ্ছেদেই বলা হইয়াছে, **যে-পরিমাণ বল এক একক ভরের উপর এক একক ত্বরণ উৎপাদন করে, তাহাই বলের একক।**

ত্বরণ হইল বেগ-পরিবর্তনের হার অর্থাৎ ত্বরণ বলিতে প্রতি একক সময়ে বেগের বৃদ্ধি বা হ্রাসের হারকে বুঝায়। সুতরাং ত্বরণের এককে দৈর্ঘ্য ও সময় উভয়েরই বিচার আছে। বলের এককে আবার ভর ও ত্বরণ দুইটি বস্তু বিচার্য। কাজেই ভর, দৈর্ঘ্য ও সময়—এই তিনটি উপাদান লইয়াই বলের একক।

(*a*) **এফ্.-পি.-এস্. পদ্ধতিতে,** ভরের একক 1 পাউণ্ড এবং ত্বরণের একক 1 ফুট/সেকেণ্ড$^2$। সুতরাং, যে-পরিমাণ বল এক পাউণ্ড ভরের উপর সেকেণ্ডে সেকেণ্ডে

এক ফুট ত্বরণ উৎপাদন করিতে পারে, সেই পরিমাণ বলই এফ্.-পি.-এস্. পদ্ধতিতে বলের একক। ইহাকে এক **পাউণ্ডাল** (poundal) বলে।

(*b*) **সি.-জি.-এস্. পদ্ধতিতে,** ভরের একক 1 গ্রাম এবং ত্বরণের একক 1 সে. মি./সে.$^2$। সুতরাং যে-পরিমাণ বল এক গ্রাম ভরের উপর সেকেণ্ডে সেকেণ্ডে এক সেন্টিমিটার ত্বরণ উৎপাদন করিতে পারে সেই পরিমাণ বলই সি.-জি.-এস্ পদ্ধতিতে বলের একক। ইহাকে এক **ডাইন** (dyne) বলা হয়।

**7·10. বস্তুর ভর ও ভারের সম্পর্ক (Relation between mass and weight of a particle) :** বস্তুমাত্রই মাটির দিকে অর্থাৎ নিচে পড়িতে চায়। কিন্তু কোন বস্তুর নিজে নিজে নড়িবার ক্ষমতা নাই। উহারা জড়। তবে যে উপর হইতে ছাড়িয়া দিলে বস্তুমাত্রই নিচে পড়ে তাহার কারণ নিশ্চয় কোন বলের ক্রিয়া। নিউটনের প্রথম গতিসূত্র অনুসারে এই সিদ্ধান্তই অনিবার্য হইয়া পড়ে। এই বল, যাহা বস্তুকে মাটির দিকে আকৃষ্ট করে, তাহারই নাম বস্তুর ভার।

(i) প্রত্যেক বস্তুই অভিকর্ষজ ত্বরণের অধীন। এই ত্বরণের পরিমাণ যদি $g$ হয়, তবে প্রত্যেক বস্তুকে পৃথিবী তাহার কেন্দ্রের দিকে $g$ ত্বরণসহ টানিতেছে। কাজেই $m$ ভরযুক্ত কোন বস্তুর ভার যদি $W$ হয় তবে $P=mf$ সূত্রে $P$-র স্থলে $W$ এবং $f$-এর স্থলে $g$ বসাইলে হয়,

$$W=mg,$$

অর্থাৎ $$\frac{W}{m}=g.$$

কোন একটা বিশেষ স্থানে $g$ অর্থাৎ অভিকর্ষজ ত্বরণ ধ্রুবক। সুতরাং বিশেষ স্থানে $\frac{W}{m}$ ও ধ্রুবক, কাজেই বস্তুর **ভর ও ভার সমানুপাতিক।**

(ii) সুতরাং $m_1$ ও $m_2$ ভরযুক্ত দুইটি বস্তুর ভার যদি যথাক্রমে $W_1$ ও $W_2$ হয়, তবে

$$W_1=m_1g$$

এবং $$W_2=m_2g\ ;$$

$$\therefore\ \frac{W_1}{W_2}=\frac{m_1g}{m_2g}=\frac{m_1}{m_2}.$$

তাহা হইলে, বস্তু-দুইটির ভারের অনুপাত তাহাদের ভরের অনুপাতের সমান।

$\therefore\ W_1=W_2$ হইলে $m_1=m_2$ ; অর্থাৎ দুইটি বস্তুর ভার যদি সমান হয়, তবে বস্তু-দুইটির ভরও সমান। অবশ্য বস্তু-দুইটি একই স্থানে থাকিলে এই কথা সত্য।

**7·11. ভর ও ভারের পার্থক্য (Difference between mass and weight) :** সাধারণভাবে ভার দ্বারাই ভরের পরিমাপ হয়, কিন্তু তাই বলিয়া উহারা সমার্থক নয়।

কারণ,

(a) প্রথমত, ভর হইল বস্তুর জড়-পরিমাণ। কিন্তু ভার একটি বলের নামান্তর। যে-বলের দ্বারা বস্তু পৃথিবীর কেন্দ্রের দিকে আকৃষ্ট হয়, তাহাই উহার ভার। সুতরাং জড়-পরিমাণ ও বল কখনও এক জিনিস হইতে পারে না।

(b) দ্বিতীয়ত, $W=mg$ সূত্র অনুসারে ভার, ভরের $g$ গুণ। কিন্তু $g$-র মান পৃথিবীর সর্বত্র এক নয় বলিয়া একই ভরের ভারও বিভিন্ন স্থানে বিভিন্ন হইতে পারে। সমুদ্রতলে $g$-র মান যত, খুব উঁচু পাহাড়ের চূড়ায় $g$-র মান তাহার চেয়ে বেশ কম। কাজেই একই ভরের সমুদ্রতলে যাহা ভার, পাহাড়ের চূড়ায় উহার ভার তাহার চেয়ে কম।

(c) তৃতীয়ত, $g$ হইল অভিকর্ষজ ত্বরণ। পৃথিবীর আওতার বাহিরে চলিয়া গেলে $g$-র মান শূন্যও হইয়া যাইতে পারে। তখন $m$ ভরযুক্ত একটি বস্তুর ভর অব্যাহত থাকিলেও উহার ভার হইবে শূন্য, কারণ তখন $g=0$ বলিয়া $W=mg=m\times 0=0$. বহু বহু দূরে বস্তুর কোন ভার থাকে না, যদিও ভর তাহার যেমন তেমনই থাকে।

(d) চতুর্থত, ভার যেহেতু বল, সেইহেতু উহার দিক্ ও মান দুই-ই আছে; কাজে কাজেই উহা ভেক্টর রাশি। কিন্তু ভরের কেবল মান আছে, দিক্ নাই; অতএব উহা স্কেলার রাশি।

**7·12. (a) পাউণ্ড ও পাউণ্ডাল এবং (b) গ্রাম ও ডাইনের সম্পর্ক [ Relation between (a) Pound and poundal and (b) gram and dyne ] :** (a) যাহা 1 পাউণ্ড ভরের উপর 1 ফু./সে$^2$ ত্বরণ উৎপন্ন করে, তাহার নাম এক পাউণ্ডাল। সুতরাং $P=mf$ সূত্রে $m=1$ পাউণ্ড, $f=g$ এবং $P=W$ ( ভার ) বসাইলেই পাই,

$$W=1\times g \text{ পাউণ্ডাল।}$$

এখন $W$-র স্থলে 1 পাউণ্ড ভার লিখিলে পাই,

**1 পাউণ্ড-ভরের ভার = g পাউণ্ডাল ;**

∴ $g$-র মান যদি 32 ফু./সে.$^2$ ধরা হয়,

তবে, **1 পাউণ্ড-ভার = 32 পাউণ্ডাল।**

(b) এক গ্রাম ভরের উপর যে-বল 1 সে. মি./সে.$^2$ পরিমাণ ত্বরণ উৎপন্ন করে, তাহার নাম এক ডাইন।

∴ $W=mg$ সূত্রে

$W=1$ গ্রাম-ভার, $m=1$ গ্রাম বসালেই পাই

**1 গ্রাম-ভার = g ডাইন।**

আর $g$-র মান যদি 981 সে.মি./সে.$^2$ হয়,

তবে **1 গ্রাম-ভার = 981 ডাইন।**

**7·13. (a) বলের পরম বা গতীয় একক (Absolute or dynamical unit of forces)ঃ** এফ্.-পি.-এস্ ও সি.-জি.-এস্. পদ্ধতিতে যথাক্রমে এক পাউণ্ডাল ও এক ডাইনকে বলের একক বলিয়া ধরা হয়। উভয় ক্ষেত্রেই এক একক ভরের উপর যে-বল এক একক ত্বরণ উৎপন্ন করে, তাহাকে এক একক বল বলা হয়। উহাকেই পরম বা গতীয় একক বলা হয়। ভর ও ত্বরণের একক নির্দিষ্ট—উহারা অভিকর্ষজ বল বা অন্যতর প্রভাব-নিরপেক্ষ। সেইজন্য এই একক পরম অর্থাৎ নিরপেক্ষ (absolute)। সুতরাং পাউণ্ডাল বা ডাইন, বলের **পরম** বা **গতীয়** একক। ইহাদের গতীয় একক বলার সার্থকতা এই যে, ত্বরণের সহিত ইহাদের সম্পর্ক রহিয়াছে; তাহা ছাড়া প্রচলিত গতি-সমীকরণে তথা সমগ্র গতি-বিজ্ঞানে এই এককের বহুল ব্যবহার।

**(b) বলের মহাকর্ষজ বা স্থিতীয় একক (Gravitational or Statical unit of force)ঃ এক একক ভরের ওজন বা ভারকে বলের মহাকর্ষজ বা স্থিতীয় একক বলা হয়।**

এফ্.-পি.-এস্. পদ্ধতিতে 1 পাউণ্ড-ভার এবং সি.-জি.-এস্. পদ্ধতিতে 1 গ্রাম-ভার বলের মহাকর্ষজ বা স্থিতীয় একক।

ইতিপূর্বেই দেখা গিয়াছে যে,

1 পাউণ্ড-ভার = $g$ পাউণ্ডাল = 32 পাউণ্ডাল

এবং 1 গ্রাম-ভার = $g$ ডাইন = 981 ডাইন

1 পাউণ্ড-ভার 1 পাউণ্ড ভরের উপর $g$ ফু./সে.$^2$

এবং 1 গ্রাম-ভার 1 গ্রাম ভরের উপর $g$ সে.মি./সে.$^2$ ত্বরণ উৎপন্ন করে।

কাজেই 1 পাউণ্ড-ভার 1 পাউণ্ডালের $g$ গুণ, তেমনই 1 গ্রাম, 1 ডাইনের $g$ গুণ।

স্পষ্টতই, 1 পাউণ্ড-ভার ও 1 গ্রাম-ভার উভয়ে অভিকর্ষজ ত্বরণের সহিত সম্পর্কিত। অভিকর্ষ মহাকর্ষেরই বিশেষ উদাহরণ। সেইজন্য এইপ্রকার বলের একককে মহাকর্ষজ একক বলা হয়। অভিকর্ষজ ত্বরণ পৃথিবীর সর্বত্র এক নয়। কাজেই এক একক ভরের ভারও সর্বত্র এক নয়। ইহা $g$-র মান সাপেক্ষ। পরম বা গতীয় মান যেমন নিরপেক্ষ ও নির্দিষ্ট, ইহা তেমন নয়। দ্বিতীয়ত, স্থিতি-বিজ্ঞানে এই এককেরই ব্যবহার হয় বলিয়া ইহার অপর নাম স্থিতীয় একক।

**7·14. পাউণ্ডাল ও ডাইনের সম্পর্ক (Relation between poundal and dyne)ঃ**

$P = mf$ সূত্র অনুসারে আমরা জানি,

1 পাউণ্ডাল = 1 পাউণ্ড × 1 ফু./সে.$^2$।

এখন, 1 পাউণ্ড = 453·7 গ্রাম,

1 ফুট = 30·48 সেন্টিমিটার।

∴ 1 পাউণ্ডাল = 453·7 গ্রাম × 30·48 সে.মি./সে.²

= 453·7 × 30·48 ডাইন

= 13828·776 ডাইন

= 13800 ডাইন ( স্থূল হিসাবে )।

ডাইন অত্যন্ত ক্ষুদ্র মান বলিয়া, স্থূল হিসাবে,

**1 পাউণ্ডাল = 13,800 ডাইন।**

**7·15. বলের প্রাকৃতিক স্বাধীনতা (Physical independence of forces) :** প্রত্যেক বলের প্রকৃতিগত একটা স্বাধীনতা আছে। একটি বল অপর বলের ক্রিয়া বা প্রতিক্রিয়ায় ব্যাহত হয় না। অন্য বল-নিরপেক্ষভাবে উহা যথাবিহিত নিয়মে কাজ করিয়া যায়। এক কথায়, বল-মাত্রই অন্যতর বল-নিরপেক্ষ। এই সত্যই **প্রাকৃতিক স্বাধীনতা-তত্ত্ব** নামে পরিচিত।

নিউটনের দ্বিতীয় সূত্র অনুসারে বলা যায় যে, বলের কাজ নিজ অভিমুখে ত্বরণ উৎপন্ন করা। একই বস্তুর উপর যদি বিভিন্ন অভিমুখে কয়েকটি বল কাজ করে, তবে দৃশ্যতঃ যে-ত্বরণ ধরা পড়ে তাহার অভিমুখ ঐ প্রযুক্ত বলগুলির কোনটির অভিমুখে নাও হইতে পারে। কিন্তু তাই বলিয়া এইরূপ মনে করা ভুল যে, এমন ক্ষেত্রে বলগুলি আপন আপন দিকে ত্বরণ উৎপন্ন করে নাই। বস্তুত, এইরূপ ক্ষেত্রেও প্রত্যেকটি বল নিজ নিজ দিকে নিশ্চয় ত্বরণ উৎপন্ন করিয়াছে। তাহার পর এই ত্বরণগুলির লব্ধি হয়তো ভিন্ন মুখ লাভ করিয়াছে। কয়েকটি উদাহরণ দ্বারা বিষয়টি পরিষ্কার করা যাক।

1. একটি চলন্ত গাড়ীতে বসিয়া যদি একটি গুলি সোজা উপরে ছুঁড়িয়া দেওয়া যায়, তবে খানিক বাদে গুলিটা আবার হাতেই ফিরিয়া আসে। এখানে যে-বল গাড়ীটির ত্বরণ উৎপন্ন করিতেছে, সেই বল গুলিটার উপরেও সমান ত্বরণ উৎপন্ন করিতেছে। দ্বিতীয়ত, উপরের দিকে ছুঁড়িবার জন্য প্রযুক্ত বলও ঊর্ধ্বমুখে আর একটি ত্বরণ উৎপন্ন করিয়াছে। এখন প্রথম ত্বরণের ফলে গুলিটা অনুভূমিক রেখায় আগাইয়া যাইবে, দ্বিতীয় ত্বরণের ফলে উহা উপরে উঠিবে এবং অভিকর্ষজ ত্বরণের ফলে নিচে নামিবে। ঊর্ধ্বমুখী ও নিম্নমুখী ত্বরণের ক্রিয়ায় গুলিটা এমনভাবে খানিকটা উঠিয়া আবার হাতে ফিরিয়া আসে, যেন অনুভূমিক রেখায় কোন ত্বরণ নাই। আবার অনুভূমিক ত্বরণের ফলে হাতটি আগাইয়া গিয়াছে। গুলিটাও সেই ত্বরণে না আগাইলে হাতে ফিরিতে পারিত না। ইহাতেই প্রমাণ হয় যে, গুলিটার উপর বলগুলি যার যার দিকে অন্যনিরপেক্ষভাবে ত্বরণ উৎপন্ন করিয়াছে।

2. একটি বাড়ীর ছাদ হইতে দুই ব্যক্তি একই সময়ে অনুভূমিক রেখায় কিন্তু বিভিন্ন বেগে যদি দুইটি ঢিল ছোঁড়ে, তবে দেখা যাইবে ঢিল-দুইটি প্রায় একই সময় পরে

মাটিতে পড়িবে। এখানে ঢিল-দুইটিতে ছুঁড়িবার জন্য প্রযুক্ত বল কম-বেশী হইয়াছে। কিন্তু দুইটি ঢিলই সমান উচ্চতায় অবস্থিত। কাজেই সেই উচ্চতা হইতে সমান পরিমাণ অভিকর্ষজ ত্বরণের ফলে সমান সময়েই নিচে পড়িবে। অবশ্য বাড়ীর পাদদেশ হইতে ভূমিতলে একটি একটু আগে এবং আর-একটি একটু কাছে পড়িবে। যদি অনুভূমিক রেখায় উৎপন্ন বিভিন্ন পরিমাণ ত্বরণ, নিচের দিকে উৎপন্ন অভিকর্ষজ ত্বরণের উপর কিছুমাত্র প্রভাব বিস্তার করিতে পারিত, তবে কখনই ঢিল-দুইটি একই সময়ে মাটিতে পড়িত না। ইহা হইতেও প্রমাণ হয় যে, অভিকর্ষজ বল ও ছুঁড়িবার বল পরস্পর-নিরপেক্ষ। অর্থাৎ বল-মাত্রই অন্যতর বল-নিরপেক্ষভাবে নিজ দিকে ত্বরণ উৎপন্ন করে।

তাহা হইলে, উপরের উদাহরণ-দুইটি হইতে প্রমাণিত হয় যে, (i) অন্যতর বল বা ঘটনা-নিরপেক্ষভাবে প্রত্যেক বল নিজ দিকে ত্বরণ উৎপন্ন করে এবং (ii) অন্য কোন অভিমুখে উহা কিছুমাত্র কাজ করে না। এই তত্ত্বই বলের প্রাকৃতিক স্বাধীনতা নামে পরিচিত।

### সূত্রাবলীর প্রয়োগ :

(*a*) **ভরবেগ = m × v**

(i) $v=u+ft$, (ii) $v^2=u^2+2fs$.

'$v$'-র মান বাহির করিবার জন্য (i) বা (ii) সূত্র ব্যবহার করিতে হয়। তাহার পর অতি সহজেই $mv$ বা ভরবেগ নির্ণয় করা যায়। এইরূপে ভরবেগ, ভর, সময়, ত্বরণ প্রভৃতির যে-কোন তিনটি জানিলে চতুর্থটি বাহির করা যায়।

**উদাহরণ 1.** স্থিরাবস্থা হইতে মুক্তভাবে পতনশীল 11 আউন্স ভর 3 সেকেণ্ড পর কত ভরবেগ লাভ করিবে?

এখানে, $m=11$ আউন্স $=\frac{11}{16}$ পাউণ্ড,

$$v=gt=32\times 3=96 \text{ ফু./সে.};$$

$$\therefore \text{ নির্ণেয় ভরবেগ} = \frac{11}{16}\times \overset{6}{96} = 66 \text{ পাউণ্ড-ফুট/সেকেণ্ড।}$$

**উদাহরণ 2.** 3 ফু./সে. প্রারম্ভিক বেগ ও 2 ফু./সে.$^2$ ত্বরণ সহ চলমান 10 পাউণ্ড ভর 2 সেকেণ্ড পর কত ভরবেগ লাভ করিবে?

এখানে, $m=10$ পাউণ্ড এবং $v=u+ft=3+2\times 2=7$ ফু./সে.।

$\therefore$ নির্ণেয় ভরবেগ $=mv=10\times 7=70$ পা.-ফু./সে.।

**উদাহরণ 3.** 4 পাউণ্ড ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু (i) স্থিরাবস্থা হইতে মুক্তভাবে 16 ফুট পতনের পর এবং (ii) 6 ফু./সে. প্রারম্ভিক বেগ ও 2 ফু./সে.$^2$ ত্বরণ সহ 16 ফুট অতিক্রমণের পর কত ভরবেগ লাভ করিবে?

(i) $m=4$, $v=\sqrt{2gs}=\sqrt{2.32.16}=32$ ফু./সে.।

$\therefore$ ভরবেগ $=mv=4\times 32=128$ পা.-ফু./সে. একক।

(ii) $m=4$, $v=\sqrt{u^2+2fs}=\sqrt{6^2+2.2.16}=\sqrt{2^2(3^2+4^2)}$

$=\sqrt{2^2.5^2}=10$ ফু./সে.।

$\therefore$ ভরবেগ $=mv=4\times 10=40$ পা.-ফু./সে. একক।

**উদাহরণ 4.** স্থিরাবস্থা হইতে চলমান একটি 8 পাউণ্ড ভর 3 সেকেণ্ডে 72 পাউণ্ড-ফুট/সেকেণ্ড ভরবেগ লাভ করিলে, (i) বস্তুটির ত্বরণ কত? (ii) অপর একটি বস্তু একই ত্বরণে 4 সেকেণ্ডে একই ভরবেগ লাভ করিলে উহার ভর কত?

(i) ভরবেগ $mv=72$, সময় $t=3$ সেকেণ্ড,

ভর $m=8$.

$\therefore\ 8v=72$; $\therefore\ v=9$.

$\because\ v=ft$, এখানে $9=3f$. $\therefore\ f=3$ ফু./সে.$^2$।

(ii) দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, $f=3$ ফু./সে.$^2$, $t=4$ সেকেণ্ড এবং $mv=72$.

$v=ft=3\times 4=12$ ফু./সে.;

$\therefore\ mv=12m=72$. $\therefore\ m=6$ পাউণ্ড।

(b) $\boldsymbol{F=mf}$.

এই সূত্রটি প্রয়োগের সময় সর্বদা **F-র মান পাউণ্ডাল বা ডাইনে** ধরিতে হইবে। যদি কোন বলের মান পাউণ্ড-ভার বা গ্রাম-ভারে দেওয়া থাকে, তবে তাহাকে পাউণ্ডাল বা ডাইনে পরিণত করিয়া তবে এই সূত্র প্রয়োগ করিতে হইবে।

দ্বিতীয়ত, '$f$' এর মান বাহির করিবার জন্য প্রয়োজনমতো (i) $v=u+ft$, (ii) $v^2=u^2+2fs$ এবং (iii) $s=ut+\frac{1}{2}ft^2$ ইহাদের যে-কোন একটি সূত্রের সাহায্য লইতে হইতে পারে।

**উদাহরণ 5.** 100 পাউণ্ড ভরের উপর কত পাউণ্ড-ভার বল 22 সেকেণ্ডে ঘণ্টায় 30 মাইল বেগ সঞ্চার করিবে?

ঘণ্টায় 30 মাইল $=$ সেকেণ্ডে $\dfrac{30\times 1760\times 3}{3600}$ ফুট $=$ সেকেণ্ডে 44 ফুট।

$v=ft$ সূত্র অনুসারে, এখানে, $44=f.22$;

$\therefore\ f=2$ ফু./সে.$^2$।

$\therefore\ F=mf=100\times 2$ পাউণ্ডাল

$=\dfrac{200}{32}$ পাউণ্ড-ভার $=6\frac{1}{4}$ পাউণ্ড-ভার।

**উদাহরণ 6.** 1000 গ্রাম-ভার পরিমাণ একটি বল 200 গ্রাম ভরের উপর আধ মিনিট কাজ করে। ঐ সময় পর ভরটি কত বেগ লাভ করে ?

[ C. U. I.Sc. 1932 ]

এখানে, $F = 1000$ গ্রাম-ভার $= 1000 \times 980$ ডাইন। ( $\because g = 980$ )

$F = mf$ সূত্র হইতে

$1000 \times 980 = 200f$ ;

$\therefore \; f = 4900$ সে.মি./সে.$^2$ ;

$\therefore \; v = ft = 4900 \times 30 = 147000$ সে.মি./সে.।

**উদাহরণ 7.** 100 টন ভরের একটি রেলগাড়ী সরল রেখায় ঘণ্টায় 60 মাইল বেগে ধাবমান। কোন সমহার বলের প্রয়োগে গাড়ীখানিকে 10 সেকেণ্ডে থামাইয়া ফেলা হয়। এই বলের ক্রিয়াকালে গাড়ীটি কতদূর যাইবে এবং বলটির মান কত ?

[ C. U. I.Sc. 1940 ]

গাড়ীর ভর $m = 100$ টন $= 100 \times 2240$ পাউণ্ড।

বেগ $u =$ ঘণ্টায় 60 মাইল $= \dfrac{60 \times 1760 \times 3}{3600}$ বা 88 ফু./সে.।

বলপ্রয়োগের মুহূর্তে এই 88 ফু./সে. বেগকে প্রারম্ভিক বেগ এবং গাড়ী থামার মুহূর্তে বেগ-শূন্য ধরিলে পাওয়া যায়,

$$0 = u + ft;$$

অথবা $-88 = 10f$ ; $\therefore \; f = \frac{-88}{10} = \frac{-44}{5}$ ফু./সে.$^2$ ।

আবার, $v^2 = u^2 + 2fs$ সূত্রানুসারে

$$0 = 88^2 - 2.\tfrac{44}{5}s;$$

অথবা $s = \dfrac{88 \times 88 \times 5}{2 \times 44} = 440$ ফুট।

$\therefore$ বলপ্রয়োগকালে গাড়ীটি 440 ফুট অতিক্রম করিবে।

দ্বিতীয়ত, $F = mf$ সূত্রে ত্বরণ সর্বদা বলের গতিমুখে বলিয়া ধনাত্মক।

$\therefore \; F = 100 \times 2240 \times \dfrac{44}{5}$ পাউণ্ডাল

$$= \frac{\overset{5}{\cancel{100}} \times \cancel{2240} \times \overset{11}{\cancel{44}}}{\cancel{5} \times \underset{\underset{2}{\cancel{8}}}{\cancel{32}} \times \cancel{2240}} \text{ টন-ভার}$$

$= \dfrac{55}{2} = 27\frac{1}{2}$ টন-ভার।

**উদাহরণ 8.** 12 পাউণ্ডের একটি ভর 36 ফুট নিচে কাদায় পড়ে এবং $\frac{1}{2}$ ফুট প্রবেশ করিয়া স্থিতিলাভ করে। কাদার গড় বাধা নির্ণয় কর।

$$v^2 = 2gs$$

বা $v = \sqrt{2gs}$ সূত্র অনুসারে,

36 ফুট পতনের পর বেগ $= \sqrt{2.32.36}$ বা 48 ফুট/সে.।

$\therefore$ কাদায় প্রবেশ করিবার সময় ইহাই প্রারম্ভিক বেগ

অর্থাৎ $u = 48$ ফু./সে. এবং প্রান্তিক বেগ $= 0$ ;

$$0 = 48^2 - 2f \cdot \frac{1}{2};$$

$$\therefore \; f = 48^2.$$

এখন কাদার গড় বাধা যেন $R$। বস্তুটির ভার $12 \times 32$ পাউণ্ডাল। কাদার বাধা $R$ উপরদিকে এবং বস্তুটির ভার নিচের দিকে সক্রিয় বলিয়া বস্তুটির উপর মোট বল $R - 12.32$ পাউণ্ডাল এবং ইহাই বস্তুটির $48^2$ ফু./সে.$^2$ মন্দন উৎপন্ন করে।

$$\therefore \; R - 12.32 = 12.48^2 \; ;$$

$$\therefore \; R = 12(48 \times 48 + 32)$$
$$= 12 \times 16(144 + 2)$$
$$= 12 \times 16 \times 146 \text{ পাউণ্ডাল}$$
$$= \frac{\overset{6}{\cancel{12}} \times \cancel{16} \times 146}{\underset{2}{\cancel{32}}} \text{ পাউণ্ড-ভার}$$
$$= 876 \text{ পাউণ্ড-ভার।}$$

**উদাহরণ 9.** রেল-লাইনের বাধা যদি টন-প্রতি 4·48 পাউণ্ড হয়, তবে ঘণ্টায় 60 মাইল বেগ-সহকারে যাত্রা করিয়া একটি রেলগাড়ী কতদূর যাইবে ?

রেলগাড়ীটির প্রান্তিক বেগ যখন শূন্যে পরিণত হইবে তখন উহা থামিয়া যাইবে। সেই পর্যন্ত অতিক্রান্ত দূরত্বই নির্ণেয়। এই দূরত্ব যেন $s$।

এখানে, প্রারম্ভিক বেগ = ঘণ্টায় 60 মাইল

$$= \text{সেকেণ্ডে } \frac{60 \times 1760 \times 3}{3600} \text{ ফুট} = \text{সেকেণ্ডে } 88 \text{ ফুট।}$$

প্রান্তিক বেগ $= 0$

গাড়ীটির ভর যদি $m$ টন হয়, তবে মোট বাধা $= 4{\cdot}48m$ পাউণ্ড

$$= 4{\cdot}48 \times 32m \text{ পাউণ্ডাল।}$$

$F=mf$ সূত্র অনুসারে

$$4{\cdot}48\times 32m=2240mf\ ;$$

$$\therefore\quad f=\frac{\overset{2}{\cancel{448}}\times \overset{8}{\cancel{32}}m}{\underset{25}{\cancel{100}}\times \underset{\underset{5}{\cancel{10}}}{\cancel{2240}}m}=\frac{8}{125}\text{ ফু./সে.}^2 \qquad\cdots\qquad \text{(i)}$$

এখন, $v^2=u^2-2fs$, [ '$f$' গাড়ীর গতিমুখে বিপরীতমুখী বলিয়া ঋণাত্মক ]

$$\therefore\qquad 0=88^2-\frac{2\cdot 8}{125}\cdot s\ ;$$

$$\therefore\qquad s=\frac{\overset{11}{\cancel{88}}\times \overset{44}{\cancel{88}}\times 125}{\cancel{2}\cdot\cancel{8}}=11\times 44\times 125\text{ ফুট}$$

$$=\frac{11\times \cancel{44}\times \overset{25}{\cancel{125}}}{3\times \underset{\underset{8}{\cancel{40}}}{\cancel{1760}}}\text{ মাইল}$$

$$=\frac{11\times 25}{24}=\frac{275}{24}=11\frac{11}{24}\text{ মাইল।}$$

## প্রশ্নমালা 7

[ উল্লেখ না থাকিলে অভিকর্ষজ ত্বরণ $=32$ ফু./সে.$^2$ অথবা 980 সে. মি./সে.$^2$ ধরিবে। ]

1. (i) 12 আউন্স ভরবিশিষ্ট বস্তু $\frac{1}{2}$ সেকেণ্ড স্থিরাবস্থা হইতে মুক্তভাবে পড়িবার পর কত ভরবেগ লাভ করিবে ?

(ii) 2 হন্দর ভরবিশিষ্ট বস্তু $\frac{3}{4}$ সেকেণ্ড স্থিরাবস্থা হইতে মুক্তভাবে পড়িবার পর কত ভরবেগ লাভ করিবে ?

(iii) 1 টন ভরবিশিষ্ট বস্তু 2 মিনিট স্থিরাবস্থা হইতে মুক্তভাবে পড়িবার পর কত ভরবেগ লাভ করিবে ?

(iv) 5 গ্রাম ভরবিশিষ্ট বস্তু $\frac{1}{10}$ সেকেণ্ড স্থিরাবস্থা হইতে মুক্তভাবে পড়িবার পর কত ভরবেগ লাভ করিবে ?

2. (i) স্থিরাবস্থা হইতে 2 ফুট/সে.$^2$ সমত্বরণে চলমান 5 পা. ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু $2\frac{1}{2}$ সেকেণ্ড পর কত ভরবেগ লাভ করিবে ?

(ii) স্থিরাবস্থা হইতে 5 সে.মি./সে.$^2$ সমত্বরণে চলমান 5 গ্রাম ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু 4 সেকেণ্ড পর কত ভরবেগ লাভ করিবে ?

(iii) 2 ফু./সে. প্রারম্ভিক বেগ ও 4 ফু./সে.$^2$ সমত্বরণ সহ চলমান 8 পাউণ্ড ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু 2 সেকেণ্ড পর কত ভরবেগ লাভ করিবে ?

(iv) 100 সে.মি./সে. প্রারম্ভিক বেগ এবং 10 সে.মি./সে.$^2$ সমহার মন্দন সহকারে চলমান 1 কিলোগ্রাম ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু 9 সেকেণ্ড পর কত ভরবেগ লাভ করিবে ?

3. (i) স্থিরাবস্থা হইতে মুক্তভাবে 81 ফুট পতনের পর 10 পাউণ্ড ভরবিশিষ্ট বস্তু কত ভরবেগ লাভ করিবে ?

(ii) স্থিরাবস্থা হইতে মুক্তভাবে $\frac{3}{4}$ ইঞ্চি পতনের পর 12 হন্দর ভরবিশিষ্ট বস্তু কত ভরবেগ লাভ করিবে ?

(iii) স্থিরাবস্থা হইতে মুক্তভাবে 5 মিটার পতনের পর 8 সেন্টিগ্রাম ভরবিশিষ্ট বস্তু কত ভরবেগ লাভ করিবে ?

(iv) স্থিরাবস্থা হইতে মুক্তভাবে 2 ডেসিমিটার পতনের পর 5 গ্রাম ভরবিশিষ্ট বস্তু কত ভরবেগ লাভ করিবে ?

4. (i) স্থিরাবস্থা হইতে 2 ফু./সে.$^2$ সমত্বরণে 9 ফুট অতিক্রমণের পর $2\frac{2}{3}$ আউন্স ভরের কত ভরবেগ হয় ?

(ii) স্থিরাবস্থা হইতে 4 ফু./সে.$^2$ সমত্বরণে 8 ফুট অতিক্রমণের পর 6 পাউণ্ড ভরের কত ভরবেগ হয় ?

(iii) স্থিরাবস্থা হইতে 5 সে.মি./সে.$^2$ সমত্বরণে 10 সে. মি. অতিক্রমণের পর 1 কিলোগ্রাম ভরের কত ভরবেগ হয় ?

(iv) স্থিরাবস্থা হইতে 25 সে.মি./সে.$^2$ সমত্বরণে 5 ডেকামিটার অতিক্রমণের পর 1 সেন্টিগ্রাম ভরের কত ভরবেগ হয় ?

5. স্থিরাবস্থা হইতে সমত্বরণে চলমান 6 পাউণ্ড ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু 5 সেকেণ্ড পর 60 পাউণ্ড-ফুট/সেকেণ্ড ভরবেগ প্রাপ্ত হয়। বস্তুটির সমত্বরণ কত ?

6. স্থিরাবস্থা হইতে 2 ফু./সে.$^2$ সমত্বরণে চলমান একটি বস্তু 3 সেকেণ্ড পর 48 পাউণ্ড-ফুট/সেকেণ্ড ভরবেগ লাভ করে। বস্তুটির ভর কত ?

7. 4 সেকেণ্ড কাজ করিয়া (i) কত পাউণ্ডাল বা (ii) কত পাউণ্ড-ভার বল 8 পাউণ্ড ভরের উপর 20 ফু./সে. বেগ সঞ্চার করিবে ?

8. 20 ফু./সে. প্রারম্ভিক বেগ-সহকারে চলমান 10 পাউণ্ড ভরের উপর কত পাউণ্ডাল বল 5 সেকেণ্ডে 120 ফু./সে. বেগ সঞ্চার করিবে ? পাউণ্ড-ভারে ঐ বলের মান কত ?

9. (*a*) পাউণ্ডালে প্রকাশ কর :—

(i) 30 পাউণ্ড-ভার, (ii) 1 টন-ভার, (iii) 4 হন্দর 2 কোয়ার্টার-ভার,

(iv) 4 আউন্স-ভার, (v) 3 পাউণ্ড 2 আউন্স-ভার।

(*b*) ডাইনে প্রকাশ কর :—

(i) 5 কিলোগ্রাম-ভার, (ii) 3 সেন্টিগ্রাম-ভার,

(iii) 4° সে. তাপবিশিষ্ট 500 সি.সি. জলের ওজন।

(*c*) পাউণ্ড-ভারে প্রকাশ কর :—

(i) 1000 পাউণ্ডাল; (ii) 16 পাউণ্ড ভরে 8 ফু./সে.$^2$ ত্বরণ উৎপন্ন করে যে-বল তাহার মান।

(*d*) গ্রাম-ভারে প্রকাশ কর :—

(i) 49000 ডাইন; (ii) এক হেক্টোগ্রামের উপর যে-বল 47সে.মি./সে.$^2$ ত্বরণ উৎপন্ন করে তাহার মান।

10. 10 হন্দর ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুর উপর 10 সেকেণ্ডে যে-বল ঘণ্টায় 3 মাইল বেগ সঞ্চার করে তাহার মান নির্ণয় কর।

11. কত পাউণ্ডাল বলের ক্রিয়ায় 3 পাউণ্ড ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু 5 সেকেণ্ডে 10 ফু./সে. বেগ লাভ করিবে? 5 সেকেণ্ড পর ঐ বলের ক্রিয়া থামিয়া গেলে, কত পাউণ্ডাল বল 10 সেকেণ্ডে ঐ বস্তুকে স্থিরাবস্থায় আনিতে পারিবে?

12. যে-বলের ক্রিয়ার 30 গ্রাম ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু 3 সেকেণ্ডে স্থিরাবস্থা হইতে 10 মিটার দূরে নীত হয়, ঐ বলের মান ডাইনে প্রকাশ কর।

13. 20 পাউণ্ড ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুর উপর একটি বল 5 সেকেণ্ডে 15 ফু./সে. বেগ উৎপন্ন করে। বস্তুটি যদি স্থিরাবস্থা হইতে এই বেগ পাইয়া থাকে, তবে ঐ বলের মান কত?

14. 50 গ্রাম ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুর উপর এক মিনিটে যে-বল 45 সে.মি./সে. বেগ উৎপন্ন করিতে পারে তাহার মান কত?

15. 1600 পাউণ্ড ভরবিশিষ্ট একটি মোটর-গাড়ী ঘণ্টায় 30 মাইল বেগে ধাবমান। (i) 11 সেকেণ্ডে, (ii) 121 ফুট অতিক্রমণের পর গাড়ীটিকে থামাইতে হইলে কত পাউণ্ড-ভার বল প্রয়োগ করা প্রয়োজন?

16. 16 টন ভরবিশিষ্ট একটি ট্রাক মসৃণ ও সরল রেলের উপর স্থির রহিয়াছে। একটি ঘোড়া রেল-বরাবর ট্রাকখানিকে এক হন্দর-ভার বলের সহিত টানিতে আরম্ভ করিলে ঐ ট্রাকখানি 1 মিনিটে কত পথ অতিক্রম করিবে?

17. একটি মসৃণ অনুভূমিক তলের উপর দিয়া 1 টন ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু স্থিরাবস্থা হইতে 1 মিনিটে 48 ফুট অতিক্রম করে। ঐ বস্তুর গতি যদি কোন অনুভূমিক

বলের ক্রিয়াজনিত হয়, তবে পাউণ্ডাল ও পাউণ্ড-ভারে ঐ বলের মান নির্ণয় কর।

18. 27 গ্রাম ভরের উপর 10 গ্রাম-ভার পরিমাণ বল 1 সেকেণ্ড কাল ক্রিয়া করে। $g$-র মান যদি 982 সে.মি./সেকেণ্ড$^2$ হয়, তবে ঐ সময় পর উক্ত ভরের কত বেগ হইবে এবং উহা কত পথ অতিক্রম করিবে? 1 সেকেণ্ডের মাথায় ঐ বলের ক্রিয়া বন্ধ হইলে ঐ ভর পরবর্তী মিনিটে আর কতদূর যাইবে?

19. এক পাউণ্ড-ভার একটি বল একটি বস্তুর উপর 1 মিনিটে ঘণ্টায় 60 মাইল বেগ সঞ্চার করে। বস্তুটির ভর-পরিমাণ নির্ণয় কর।

20. 10 পাউণ্ড ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু একটি মসৃণ অনুভূমিক তলের উপর স্থাপিত হয় এবং তাহার পর 3 পাউণ্ড-ভার একটি বল উহার উপর ক্রিয়া করিতে থাকে। 10 সেকেণ্ডে বস্তুটি কতদূর যাইবে?

21. 200 ডাইনের একটি বল 25 গ্রাম ভরের উপর 5 সেকেণ্ড যাবৎ ক্রিয়া করিয়া কত বেগ সঞ্চার করিবে?

22. 1 আউন্স-ভারের সমান একটি বল এক পাউণ্ড ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুর উপর 10 সেকেণ্ড কাজ করে। বস্তুটি যদি স্থিরাবস্থা হইতে চলমান হয়, তবে ঐ সময় পর উহার বেগ ও উহা দ্বারা অতিক্রান্ত দূরত্ব নির্ণয় কর।

23. 10 পাউণ্ড-ভারের সমান একটি বল কত সময়ে 1 টন ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুকে 14 ফুট দূরে লইয়া যাইবে?

24. 10,000 পাউণ্ড ভরবিশিষ্ট একটি রেলগাড়ী সমতল রেল-লাইনের উপর স্থাপিত হয় এবং তাহার পর 250 পাউণ্ড-ভার বলের দ্বারা উহা লাইন বরাবর আকৃষ্ট হয়। কতক্ষণে গাড়ীটি ঘণ্টায় 15 মাইল বেগ অর্জন করিবে? এখানে ঘর্ষণ ও বাতাসের বাধা অগ্রাহ্য করা যাইবে।

25. 300 টন একটি রেলগাড়ী ঘণ্টায় 60 মাইল বেগে চলিতেছে; ইঞ্জিনের বাষ্প রুদ্ধ করার পর ব্রেকের সাহায্যে 50 গজ দূরে গাড়ীটি থামানো হয়। প্রযুক্ত বল যদি সমহার হয়, তবে তাহার মান নির্ণয় কর।

26. 20 পাউণ্ড ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু 25 ফুট উচ্চতা হইতে পড়িয়া মাটির ভিতর ঢুকিয়া যায়। যদি মাটিতে ঢোকার বিরুদ্ধে 1020 পাউণ্ড-ভার পরিমাণ সমহার একটি বাধা কাজ করিয়া থাকে, তবে বস্তুটি মাটির ভিতর কতটুকু ঢুকিবে?

27. স্থিরাবস্থা হইতে 200 ফুট পতনের পর 4 পাউণ্ড ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু কাদার ভিতর 2 ফুট ঢুকিয়া স্থিতিলাভ করে। বস্তুটির উপর কাদার গড় বাধা নির্ণয় কর।

28. 100 ফুট উপর হইতে পতিত $\frac{1}{8}$ পাউণ্ড ভরবিশিষ্ট একখণ্ড পাথর বালির ভিতর 1 ফুট ঢুকিয়া থামে। বালির গড় বাধা বাহির কর।

29. স্থিরাবস্থা হইতে 10 ফুট পতনের পর 20 পাউণ্ড ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু বালির ভিতর $\frac{1}{2}$ ফুট ঢুকিয়া স্থিতিলাভ করে। বস্তুটির উপর বালির গড় বাধা নির্ণয় কর।

30. 4 পাউণ্ড ভরবিশিষ্ট একটি গোলা যদি 10 ইঞ্চি পুরু একটি দেওয়াল ভেদ করিয়াই থামিয়া যায় এবং দেওয়ালের বাধা যদি 42 টন-ভারের সমান হয়, তবে গোলাটির বেগ কত ছিল ?

31. 1600 ফু./সে. বেগে ধাবমান 100 পাউণ্ড ভরের একটি গোলা অনড় একটি লক্ষ্যস্থলে আঘাত করে। লক্ষ্যস্থলের সমহার বাধা যদি 12000 টন-ভারের সমান হয়, তবে গোলাটি লক্ষ্যস্থলের কতদূর ভিতরে ঢুকিয়া যাইবে ?

32. অভিকর্ষাধীন 3 পাউণ্ড ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু সেকেণ্ডে 100 ফুট বেগে পড়িতেছে। যে সমহার বল বস্তুটিকে (*a*) 2 সেকেণ্ডে, (*b*) 2 ফুট দূরত্বের মাথায় থামাইতে পারে তাহার মান কত ?

33. সেকেণ্ডে 2000 সে.মি. বেগে ধাবমান যে গোলাটি $4 \times 10^6$ ডাইন বাধার বিরুদ্ধে লক্ষ্যস্থল ভেদ করিয়া 16 সে.মি. ঢুকিয়া যায় তাহার ভর নির্ণয় কর।
[ W. B. H. S. 1964 ]

34. 520 ডাইন বল $\frac{1}{2}$ মিনিট কালের মাথায় সরল রেখায় ধাবমান একটি বস্তুর বেগ সেকেণ্ডে 290 সে.মি. হইতে সেকেণ্ডে 3·5 মি. বেগে পরিবর্তিত করে। বস্তুটির ভর নির্ণয় কর। [ W. B. H. S. 1965 ]

35. একটি ইঞ্জিন 300 টন ভারী একটি রেলগাড়ীকে 150-এ 1 একটি নততলের উপর দিকে টানিয়া তুলিতেছে। বাধা সমহার এবং ভারের $\frac{1}{10}$ অংশ এবং ত্বরণ 3 ফু./সে.$^2$ হইলে, ইঞ্জিনের টান নির্ণয় কর।

36. 5 টন ভারী একটি ট্রাক 100-তে 1 একটি নততলে ঘণ্টায় 20 মাইল বেগে চলিতে শুরু করিয়া 2 মিনিটে থামিয়া গেল। উহা কত পথ অতিক্রম করিল এবং উহার গতিরোধ করিতে কত বল প্রযুক্ত হইল ? [ W. B. H. S. 1966 ]

37. 6 আউন্স ওজনের একটি ভরের উপর 2 সেকেণ্ড কাল ক্রিয়া করিয়া একটি বল 10 ফু./সে. বেগ উৎপন্ন করে। ডাইনে ঐ বলের পরিমাণ নির্ণয় 'কর। ( 1 ফুট = 30·5 সে. মি. ; 1 পা. = 453·6 গ্রা. ) [ W. B. H. S. 1967 ]

38. *m* ভরের একটি বস্তু *P* পাউণ্ডাল বলের অধীনে *t* সেকেণ্ড কাল থাকে এবং ঐ সময়ে উহা *x* ফুট অতিক্রম করে এবং *v* ফু./সে. বেগ লাভ করে। প্রমাণ কর যে—

$$x = \frac{1}{2}\frac{mv^2}{P}.$$ [ W. B. H. S. 1968, '70 ]

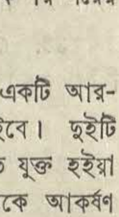
39. 10 গ্রাম ওজনের সমান একটি বল 27 গ্রাম পরিমাণ একটি ভরের উপর 1 সেকেণ্ড কাজ করে। $g = 981$ সে.মি./সে.$^2$ হইলে ঐ ভরের অর্জিত বেগ এবং উহা দ্বারা অতিক্রান্ত দূরত্ব নির্ণয় কর। [ W. B. H. S. 1969 ]

40. ইঞ্জিন বাদে একটি রেলগাড়ীর ওজন 435 টন। স্থিরাবস্থা হইতে সমতল লাইনে চলিতে শুরু করিয়া উহা 7 মিনিটে ঘণ্টায় 40 মাইল বেগ অর্জন করে। প্রতি টনে 15 পা. বাধা ধরিয়া, ইঞ্জিনটির টানের পরিমাণ নির্ণয় কর। ($g = 32$ ফু./সে.$^2$)
[ W. B. H. S. 1971 ]

**7·16. নিউটনের তৃতীয় সূত্রের ব্যাখ্যা ঃ** এই সূত্রে বলা হইয়াছে যে, **প্রত্যেক ক্রিয়ার একটি সমান ও বিপরীতমুখী প্রতিক্রিয়া থাকে।** এখানে ক্রিয়া কথাটির অর্থ হইল একটি বস্তু কর্তৃক অপর একটি বস্তুর উপর প্রযুক্ত বল। আর প্রতিক্রিয়া কথাটির অর্থ—দ্বিতীয়টি দ্বারা প্রথমটির উপর পাল্টা ও বিপরীতমুখে প্রযুক্ত বল। তৃতীয় সূত্র অনুসারে এই দুইটি বল পরিমাণে সমান কিন্তু দিকে পরস্পরের বিপরীত।

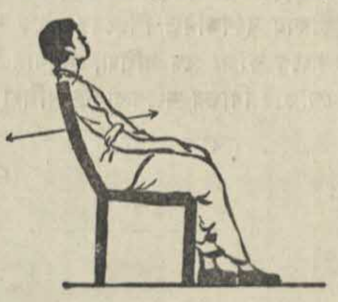
বস্তু-দুইটি স্থির বা গতিশীল যে-অবস্থাতেই থাকুক প্রত্যক্ষভাবে একটি আর-একটির উপর বল প্রয়োগ করিলে সেই বল-দুইটি সমান ও বিপরীত হইবে। দুইটি বস্তু যখন পরস্পরের গায়ে গায়ে লাগিয়া চাপ দেয় বা একে অন্যের সহিত যুক্ত হইয়া পরস্পরকে টানে অথবা চুম্বক ও লোহার মতো যখন সরাসরি পরস্পরকে আকর্ষণ করে—এক কথায়, ঐ দুই বস্তুর মধ্যে যখন তৃতীয় বস্তু এবং যখন তাহারা সরাসরি পরস্পরের উপর বল প্রয়োগ করে, তখনই নিউটনের তৃতীয় সূত্র খাটিবে। উদাহরণস্বরূপ ঃ

(i) কড়িকাঠের সহিত তারে বাঁধিয়া একটি আলো ঝুলাইয়া রাখিলে, আলোর ভার তারের উপর উল্লম্বভাবে নিচের দিকে টান দিবে। আবার কড়ি-কাঠটিও তারের উপর, উপরের দিকে নিশ্চয় সমান টান দিবে। নহিলে আলোটি স্থির থাকিত না ; হয় নিচে নামিত, নয় উপরে উঠিত। উভয়-দিকের টান তাহা হইলে সমান। ইহার অর্থ, আলোর নিচুদিকে টান বা ক্রিয়া কড়িকাঠের উপরের দিকে টান বা প্রতিক্রিয়ার সমান ও বিপরীত।


32নং চিত্র

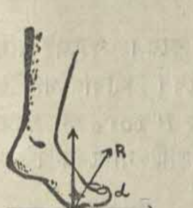
(ii) এক ব্যক্তি একটি চেয়ারে হেলান দিয়া বসিয়া আছে। তাহার পিঠ চেয়ারের পিছনটায় চাপ দিতেছে। চেয়ারের সেই পিছনটাও নিশ্চয় তাহার পিঠের উপর সমান ও বিপরীত চাপ দিতেছে। নহিলে লোকটি স্থির থাকিত

না। যদি চেয়ারের পিছনটার চাপ কম হইত তবে লোকটির পিঠের ঠেলায় উহা আল্‌গা হইয়া খসিয়া পড়িত, ফলে লোকটি পিছনদিকে উল্‌টাইয়া পড়িত। আর যদি চেয়ারের পিছনকার অংশটার চাপই বেশী হইত, তবে লোকটি হুড়মুড় করিয়া সামনে পড়িয়া যাইত। কিন্তু যেহেতু লোকটি সামনে বা পিছনে একটুও হেলিতেছে না, সেইহেতু স্বীকার করিতে হয় যে, দুই দিকের চাপ সমান। অর্থাৎ পিঠের চাপ বা ক্রিয়া আর চেয়ারের পিছনকার অংশের চাপ বা প্রতিক্রিয়া পরস্পর সমান ও বিপরীত।



33নং চিত্র

(iii) হাঁটিবার সময় মাটির উপর পায়ের চাপ পড়ে। আবার মাটিও পায়ের উপর সমান ও বিপরীত চাপ বা ঠেলা দেয়। ডানদিকের চিত্রে, $P$ যদি মাটির উপর $O$ বিন্দুতে পায়ের চাপ হয়, তবে $R$ যেন পায়ের উপর মাটির পাল্‌টা চাপ।



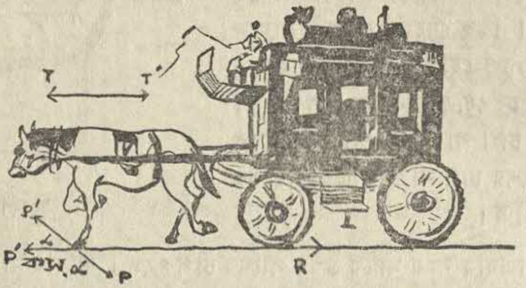

34নং চিত্র

তৃতীয় স্থত্র অনুসারে $P$ ও $R$ পরস্পর সমান ও বিপরীত। যদি তাহাই হয় তবে $P$ ও $R$-এর ফল বা লব্ধি শূন্য হইবার কথা। তাহা তো হয় না, পা-খানি আগাইয়া চলে। কারণ আছে; $R$ যদি অনুভূমিক রেখার সহিত $a$ কোণে নত হয়, তবে ঐ রেখায় সামনের দিকে উহার উপাংশ $R \cos a$। এই উপাংশের ক্রিয়াতেই মানুষের হাঁটিয়া চলা সম্ভব হয়। অবশ্য $P$ বলেরও অনুভূমিক রেখায় ঠিক সমান ও বিপরীত একটা উপাংশ আছে, কিন্তু পায়ের পেশীর সংযমে সেই উপাংশ নিষ্ক্রিয় হইয়া যায়। এইজন্যই হাঁটা সম্ভব হয় $R \cos a$ বলের চাপে।

(iv) একটি ঘোড়া যখন গাড়ী টানে, তখন গাড়ীটিও সমান জোরে ঘোড়াটিকে পিছনদিকে টানিয়া রাখে। ধরা যাক, ঘোড়াটি যেন $T$ বলে গাড়ীটিকে টানিতেছে এবং $T'$ বলে গাড়ীটি ঘোড়াটিকে টানিতেছে। তৃতীয় স্থত্র অনুসারে $T$ ও $T'$ সমান ও বিপরীত। এখন এখানে একটা প্রশ্ন উঠিতে পারে যে, দুই টানই যদি সমান ও বিপরীত হয়, তবে গাড়ীটি চলে কি করিয়া? লক্ষণীয় যে, মাটির উপর ঘোড়ার পায়ের চাপ বা একটা ঠেলা আছে এবং ঘোড়ার পায়ের উপরও মাটির ঠিক সমান ও বিপরীত আর-একটা ঠেলা আছে। এই ঠেলা $P$ এবং পাল্‌টা ঠেলা যেন $P'$। গাড়ীটি চলে এই $P'$ বলের ক্রিয়ায়। কেমন করিয়া, তাহার ব্যাখ্যা নিম্নরূপ :

$P'$ যদি অনুভূমিক রেখার সহিত $a$ কোণে নত হয়, তবে মাটি বরাবর

অনুভূমিক রেখায় $P'$-এর উপাংশ $P' \cos \alpha$. গাড়ীর ভর $m$ এবং ঘোড়ার ভর $m'$ এবং চাকার ঘর্ষণজনিত পিছনের দিকে বাধা যেন $R$. $T$ ও $R$ গাড়ী ও ঘোড়ার বিভিন্ন অংশে কাজ করে বলিয়া, অসমান হইতে পারে। এইরূপ $P' \cos \alpha$ ও $T'$ গাড়ী ও ঘোড়ার বিভিন্ন অংশে প্রযুক্ত বলিয়া অসমান হইতে পারে। ঘোড়া নিরপেক্ষভাবে শুধু




35নং চিত্র

গাড়ীর উপর সামনের দিকে $T$ এবং পিছনের দিকে $R$ বল কাজ করে। কাজেই যদি $T$ বল $R$ বলের চেয়ে বড় হয়, তবে গাড়ীটি সামনের দিকে চলিবে। আবার গাড়ীর কথা বাদ দিলে, ঘোড়ার উপর পিছনদিকে $T'$ এবং সামনের দিকে $P' \cos \alpha$ বল কাজ করে। কাজেই $P' \cos \alpha$ যদি $T'$ হইতে বড় হয়, তবে ঘোড়াটি সামনের দিকে চলিবে।

এখন গাড়ী তথা ঘোড়াটি যদি $f$ ত্বরণসহ চলে, তবে,

গাড়ীর গতি-বিচারে $T - R = mf$ ... (i)

এবং ঘোড়ার গতি-বিচারে $P' \cos \alpha - T' = m'f$ ... (ii)

(i) ও (ii) যোগ করিয়া পাই, $P' \cos \alpha - R = (m + m')f$. [ $\because \quad T = T'$ ]

আবার ঘোড়া ও গাড়ীর গতি একসঙ্গে বিচার করিলেও দেখা যায়, মোট ভর $(m + m')$-এর উপর সামনের দিকে $P' \cos \alpha$ এবং পিছনের দিকে $R$ বল কাজ করিতেছে এবং তাহার ফলে $f$ ত্বরণ উৎপন্ন হইয়াছে।

তাহা হইলে গতি যেহেতু সামনের দিকে, সেইহেতু,

$$P' \cos \alpha - R = (m + m')f.$$

ইহা হইতে স্পষ্টই বুঝা যায়, ঘোড়া ও গাড়ীর পরস্পরের টানাটানি শেষ পর্যন্ত ধর্তব্যের বিষয়ে থাকে না। ঘোড়ার পা ও মাটির ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়ার জন্য সামনের দিকে $P' \cos \alpha$ ও চাকার ঘর্ষণ-জনিত পিছনের দিকে $R$ বল—এই দুইয়ের ফলই গতি সঞ্চার করে।

**7·17. বিবিধ ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়া (Different actions and reactions) :**

ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়া নানান রকমের হইতে পারে। নিচে তাহাদের বিবরণ দেওয়া যাইতেছে :

(i) **চাপ বা ঠেলা (Thrust or Push) :** যখন ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়া সংশ্লিষ্ট বস্তু-দুইটিকে পরস্পর হইতে বিচ্ছিন্ন করিয়া দিতে চায় অথবা পরস্পরের সান্নিধ্যলাভের চেষ্টায় বাধা দেয় তখন ঐ ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়াকে চাপ বা ঠেলা বলা হয়।

**উদাহরণ।** টেবিলের উপর বই। বই টেবিলকে নিচে ঠেলে, তেমনি টেবিল বইকে সমান জোরে উপরে ঠেলে। ইহা চাপ বা ঠেলার দৃষ্টান্ত।

(ii) **টান (Pull or Tension) :** যখন দুইটি বস্তুর ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়া পরস্পরকে একত্র করিতে চায়, তখন তাহাদের ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়া টান সৃষ্টি করে।

**উদাহরণ।** ঝুলন্ত বস্তু। বস্তুটির ভার নিচের দিকে আর যাহার সহিত ঝুলানো তাহা বস্তুটিকে উপরের দিকে টানিতেছে।

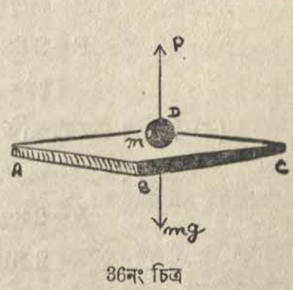
(iii) **আকর্ষণ ও বিকর্ষণ (Attraction and Repulsion) :** পরস্পর হইতে বিচ্ছিন্ন বা বিযুক্ত অবস্থায় দুই বস্তু যখন পরস্পরকে পরস্পরের দিকে টানে তখন তাহাদের ক্রিয়া-প্রতিক্রিয়াকে আকর্ষণ, এবং যখন তাহারা পরস্পর পরস্পরকে দূরে সরাইয়া দিতে চায় তখন তাহাদের ক্রিয়া-প্রতিক্রিয়াকে বিকর্ষণ বলা হয়।

**উদাহরণ।** চুম্বক ও লোহা। চুম্বক লোহাকে আর লোহা চুম্বককে আকর্ষণ করে। দুইটি ধন-তড়িৎযুক্ত ধাতুখণ্ড পরস্পরকে বিকর্ষণ করে বা দূরে সরাইয়া দেয়।

(iv) **ঘর্ষণ (Friction) :** যখন দুইটি বস্তু একে অপরের উপর দিয়া গড়াইয়া যাইতে বাধা দেবার চেষ্টা করে তখন তাহাদের ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়াকে ঘর্ষণ বলা হয়।

**উদাহরণ।** চলন্ত গাড়ীর চাকা ও মাটি ক্রিয়া-প্রতিক্রিয়া। মাটি চাকাটিকে তাহার উপর দিয়া গড়াইয়া যাইতে বাধা দেয় বা দিতে চেষ্টা করে। এক হিসাবে চাকাটিও তেমনি তাহার পরিধিপথে মাটিকে গড়াইতে দেয় না। ইহা ঘর্ষণের উদাহরণ।

**7·18. একটি গতিশীল তলের উপর স্থাপিত ভরের ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়া (The action and reaction of a mass placed on a moving plane) :** *ABCD* একটি অনুভূমিক তল, উহার উপর $m$ ভর-বিশিষ্ট একটি বস্তু স্থাপিত হইয়াছে। তলের উপর ঊর্ধ্বমুখে যেন $P$ বল সক্রিয়; ফলে ঐ বস্তুটি-সহ তলটি যেন চলমান।



36নং চিত্র

এখন, (i) বস্তুটি যদি $f$ ত্বরণসহ উর্ধ্বমুখে চলমান হয়, তবে বস্তুটির উপর সক্রিয় মোট বলও উর্ধ্বমুখী ধরিতে হইবে।

$\therefore$ উপরের দিকে সক্রিয় বল $= P$ এবং নিচুদিকে ভার $= mg$.

$\therefore$ মোট বল $P - mg = mf$,

অথবা $\mathbf{P} = mg + mf$

$= \mathbf{m(g+f)}$.

আবার, (ii) বস্তুটি যদি $f$ ত্বরণসহ নিম্নমুখে চলমান হয়, তবে বস্তুটির উপর সক্রিয় মোট বলও নিম্নমুখী।

$\therefore$ মোট বল $= mg - P = mf$,

অথবা, $\mathbf{P} = mg - mf$

$= \mathbf{m(g-f)}$.

আর, (iii) বস্তুটি যদি সমহার গতিতে অর্থাৎ সমবেগে উপরে ওঠে বা নিচে নামে, তবে 7·4 অনুচ্ছেদ অনুসারে মোট বল শূন্য ধরিতে হইবে।

$$\left.\begin{aligned} \therefore \quad & P - mg = 0 \\ \text{অথবা,} \quad & mg - P = 0 \end{aligned}\right\}$$

$\therefore$ উভয়ক্ষেত্রেই $\mathbf{P = mg}$.

**উদাহরণ।** একটি লিফ্‌ট-এর ছাদ হইতে 2 পাউণ্ড ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু খুব হালকা দড়ির সাহায্যে ঝুলানো আছে। লিফ্‌ট-টির উর্ধ্বগতি তিন দফায় যথাক্রমে, (i) 8 ফুট/সেকেণ্ড$^2$ ত্বরণ, (ii) সমবেগ এবং (iii) 8 ফুট/সেকেণ্ড$^2$ মন্দন হইলে, প্রত্যেক ক্ষেত্রে দড়ির উপর টান পাউণ্ড-ভারে প্রকাশ কর।

লিফ্‌ট-টির উর্ধ্বচাপ যেন $P$। স্পষ্টতই বস্তুটির নিম্নমুখী ভার $2g$ পাউণ্ডাল।

$\therefore$ (i) প্রথমক্ষেত্রে,

$P = m(g+f)$ সূত্রানুসারে,

$P = 2(32+8) = 80$ পাউণ্ডাল

$= \frac{80}{32} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$ পাউণ্ড-ভার।

(ii) দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, গতি সমহার বলিয়া, মোট বল শূন্য।

$\therefore$ $P = mg$ সূত্রানুসারে,

$P = 2 \times g$ পাউণ্ডাল

$= 2$ পাউণ্ড-ভার।

(iii) তৃতীয়ক্ষেত্রে, মন্দন শুরু হওয়ায় বস্তুটির ভার লিফ্‌ট-এর উর্ধ্বচাপ হইতে বড়।

$\therefore \quad P = m(g-f)$ সূত্রানুসারে,

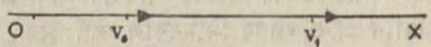
$P = 2(32-8) = 48$ পাউণ্ডাল

$= \frac{48}{32} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ পাউণ্ড-ভার।

### 7·19. ঘাত ও ঘাতজ বল (Impulse and impulsive forces) :

**বলের ঘাত** (*Impulse of a force*) : $m$ ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুকণা যদি $F$ বলের ক্রিয়ায় $\overrightarrow{OX}$ সরলরেখা বরাবর চলমান হয়, তবে $t$ সময় পরে বেগ $v$ হইলে বস্তুকণাটির ভরবেগ হইবে $mv$.

নিউটনের দ্বিতীয় সূত্র অনুসারে,




37 নং চিত্র

$$F = \frac{d}{dt}(mv) = m\frac{dv}{dt}$$

আরও $t_0$ সময়ে বস্তুকণাটির বেগ যদি $v_0$ এবং $t_1$ সময়ে $(t_1 > t_0)$ বস্তুকণাটির বেগ যদি $v_1$ হয়, তবে

উপরোক্ত সমীকরণে $t_0$ হইতে $t_1$ সীমার মধ্যে সমাকল লইলে দেখা যায়,

$$\int_{t_0}^{t_1} F dt = \int_{t_0}^{t_1} m\frac{dv}{dt}\cdot dt = m\int_{t_0}^{t_1} dv$$

$$= m\Big[v\Big]_{t_0}^{t_1} = m(v_{t_1} - v_{t_0}) = m(v_1 - v_0)$$

$$= mv_1 - mv_0.$$

**$\int_{t_0}^{t_1} Fdt$-কে $t_0$ হইতে $t_1$ এই সময়ের অবকাশের মধ্যে বলের ঘাত বলা হয়।**

আবার, $(mv_1 - mv_0)$ হইল এই সময়ের অবকাশে বস্তুকণাটির ভরবেগের পরিবর্তন।

সুতরাং, **কোন সময়ের অবকাশে কোন বলের ঘাত ঐ সময়ের অবকাশে ভরবেগের পরিবর্তনের সমান।**

$F$ বলটি স্থির মানের হইলে $\int_{t_0}^{t_1} Fdt = F(t_1 - t_0)$ হইবে।

সুতরাং স্থির মানের বলের ক্ষেত্রে, বলের ঘাত = প্রযুক্ত বল × বলের ক্রিয়াকাল।

### 7·20. ঘাতজ বল (Impulsive force) :

একটি বস্তুর উপর সক্রিয় অত্যন্ত অল্পস্থায়ী ও অতিবৃহৎ যে-বল নির্দিষ্ট পরিমাণ ঘাত উৎপন্ন করে ( অর্থাৎ নির্দিষ্ট পরিমাণ ভরবেগের পরিবর্তন ঘটায় ), অথচ উহার ক্ষণিকের ক্রিয়ায় বস্তুটির সরণ হয়

নগণ্য, সেই বলকে **ঘাতজ বল** বলা হয়। এইরূপ বলের ঘাতই উহার মান সূচিত করে।

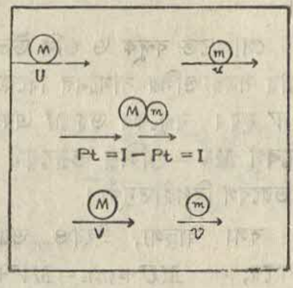
ঘাতজ বল নামেই অনেকটা নিজের পরিচয় দেয়। ঘাত বা আঘাত করিলে এইরূপ বলের উৎপত্তি হয়। একটি ব্যাট দ্বারা একটি বলকে আঘাত করিতে নিমেষ-মাত্র সময় লাগে। কিন্তু আঘাতটা বেশ জোরালো বলিয়া ক্রিকেট-বলটা প্রচণ্ড বেগে আঘাতের মুখেই ছুটিয়া চলে। এখানে ঘাতজ বল যে বেশ জোরালো, এই পর্যন্ত বুঝিলেও কিন্তু উহার পরিমাণ-নির্ণয় সহজ নয়। $P=mf$ সূত্র অনুসারে নির্দিষ্ট ভরের উপর যে-পরিমাণ ত্বরণ উৎপন্ন হয়, তাহা দ্বারাই বলের পরিমাপ হয়। কিন্তু ঘাতজ বলের বেলায় উৎপন্ন ত্বরণের পরিমাণ জানা প্রায় অসম্ভব। ক্রিকেট-বলের গায়ে ব্যাটখানি প্রচণ্ড বলসহ নিমেষকাল স্পর্শ করে ; তাহার পরই ব্যাট ও বল আলাদা হইয়া যায়। ঐ নিমেষকাল ক্রিয়ার সময়ে আহত বস্তুর সরণ হয় না বলিলেই চলে। কারণ বস্তুটি যে-মূহূর্তে ধাইয়া চলিতে সুরু করে সেই মূহূর্তের আগেই ঘাতজ বলের কাজ শেষ হইয়াছে। যেহেতু ঘাতজ বলের ক্রিয়াকালে উহা দ্বারা আহত বস্তুর সরণ হয় নগণ্য, সেইহেতু ঐ সময়ে উৎপন্ন ত্বরণের পরিমাপ করা কার্যত অসম্ভব। অতএব ঘাতজ বলের পরিমাপও সাধারণ নিয়মে জানার উপায় নাই। সেইজন্য ঘাত দিয়াই ঘাতজ বলের মান সূচিত হয়। কাজের বেলায় এই মান জানিলেই চলে। কেন? তাহাই বলিতেছি।

বলের প্রয়োগে মোট কাজটা কি হয়? প্রথমত, উহার ক্রিয়ায় বস্তুবিশেষের খানিকটা সরণ হয়। দ্বিতীয়ত, বস্তুটির বেগেরও খানিকটা পরিবর্তন হয়। আমরা দেখিলাম, ঘাতজ বলের ক্রিয়ার নিমেষকালে সরণ একেবারেই নগণ্য। কাজেই জানিবার বাকী রহিল বেগের পরিবর্তন মাত্র। এখন ঘাত মানে ভরবেগ-পরিবর্তন। এইরূপ ক্ষেত্রে ভরের পরিবর্তন নাই, উহার পরিমাণ জানা। কাজেই বেগের পরিবর্তনের জন্যই ভরবেগের পরিবর্তন ঘটে। অতএব ঘাত হইতে বেগ-পরিবর্তন জানা যায়, আর তাহা জানিলেই নির্দিষ্ট সময়ে বস্তুর গতিপ্রকৃতি ও অবস্থান সম্পূর্ণরূপে জানা যায়। সুতরাং ঘাত দ্বারাই ঘাতজ বল সূচিত করা হয়।

**7·21. সরল রেখায় ভরবেগ-সংরক্ষণতত্ত্ব (Principle of conservation of linear momentum) :** সকলপ্রকার বাহ্য বলের ক্রিয়া হইতে মুক্ত ও একই সরল রেখায় ধাবমান দুই বা ততোধিক বস্তু যদি কেবল পরস্পরের আঘাত ও প্রত্যাঘাত-জনিত বলের অধীন হয়, তবে সেই রেখায় তাহাদের ভরবেগের সমষ্টি নিত্য বা অপরিবর্তিত থাকে।

$M$ ও $m$ ভরবিশিষ্ট দুইটি বস্তু, যথাক্রমে যেন $U$ ও $u$ বেগে একই রেখায় ধাবমান। প্রথমটি দ্বিতীয়টির উপর আঘাত করিলে উহাদের বেগ যেন যথাক্রমে $V$ ও $v$-তে পরিবর্তিত হয়।

নিউটনের তৃতীয় সূত্র অনুসারে, প্রথম বস্তুর আঘাত ও দ্বিতীয় বস্তুর প্রত্যাঘাত সমান ও বিপরীত হইবে। দ্বিতীয়ত, আঘাত ও প্রত্যাঘাতের সময় এক ও অভিন্ন। কাজেই $P$ যদি আঘাত এবং $t$ যদি আঘাত তথা প্রত্যাঘাতের সময় হয়, তবে $P$ বলের ঘাত হইল $Pt$. অনুরূপভাবে প্রত্যাঘাতজনিত বলের ঘাত হইবে $(-Pt)$. সুতরাং ঘাত-দুইটি সমান ও বিপরীত।




38নং চিত্র

এখন, $Pt = M(U-V)$

$= MU - MV$

এবং $-Pt = m(u-v) = mu - mv$;

$\therefore \quad MU - MV + mu - mv = 0$

বা $MU + mu = MV + mv$.

কিন্তু $MU + mu$ হইল সংঘর্ষের পূর্বে বস্তু-দুইটির ভরবেগের সমষ্টি, এবং $MV + mv$ হইল সংঘর্ষের পরে উহাদের ভরবেগের সমষ্টি। সুতরাং সংঘর্ষের পূর্বে ও পরে ভরবেগের সমষ্টি সমান ও অপরিবর্তিত থাকে।

এইরূপে একই সরল রেখায় ধাবমান দুইয়ের অধিক যে-কোন সংখ্যক বস্তুর সংঘর্ষ বিচার করিলেও দেখা যায় যে, বস্তুগুলির ভরবেগের সমষ্টি ঐ রেখায় সর্বদা নিত্য থাকে। এই সত্যকেই সরল রেখায় **ভরবেগের সংরক্ষণতত্ত্ব** বলে।

**7·22. বন্দুক ও গুলির গতি (Motion of a shot and a gun) :** বন্দুকের ঘোড়াটি টিপিবামাত্র উহার নলের ভিতর বারুদের বিস্ফোরণ হয়। তাহার ফলে যে-গ্যাসের সৃষ্টি হয়, তাহা প্রচণ্ড চাপে নলের ভিতরকার গুলিটিকে সামনের দিকে ঠেলিয়া বাহির করিতে চেষ্টা করে। বলা বাহুল্য, গুলিটিও বন্দুকের উপর পিছনদিকে সমান পরিমাণ ঠেলা দেয়। কিন্তু এই ঠেলাঠেলি ব্যাপারটা মুহূর্তে ঘটিয়া যায়। কাজেই এইরূপ ক্ষেত্রে যে-বল মুহূর্তকাল ক্রিয়া করে, তাহা ঘাতজ বল।

দ্বিতীয়ত, বিস্ফোরণের ফলে নলের ভিতর যে-গ্যাস উৎপন্ন হয়, তাহা ঐ মুহূর্তকালের মধ্যেই অতি দ্রুত ও ক্রমাগত সম্প্রসারিত হইতে থাকে। কাজেই উহার চাপও ঐ মুহূর্তের পলে পলে ক্রমাগত বাড়িতে থাকে। এইজন্যই গুলির প্রতিক্রিয়াও চাপের বিপরীত মুখে ততই বাড়িতে থাকে। এইভাবে গুলি নলের শেষ মাথায় আসিয়া উপস্থিত হয়। নল হইতে বাহির হওয়ামাত্র গ্যাস ও গুলি বিচ্ছিন্ন হইয়া যায়। তখন আর ক্রিয়া-প্রতিক্রিয়ার খেলা চলে না। নলের ভিতর গ্যাসের সম্প্রসারণ যতক্ষণ চলে, ততক্ষণ উভয়দিকে ঘাতজ বলের পরিমাণও ক্রমাগত বাড়িয়া চলে। কাজেই বন্দুকের

ভরবেগের মোট পরিবর্তন, গুলির ভরবেগের মোট পরিবর্তনের সমান ও বিপরীত হয়।

গোড়াতে বন্দুক ও গুলি উভয়েই স্থির থাকে। নলের মুখ হইতে গুলিটি বাহির হইবার সময় গুলির সামনের দিকের বেগ $v$ এবং বন্দুকের পিছনদিকে ধাক্কার বেগ যেন $V$ হয়। বন্দুকের ভর $M$ এবং গুলির ভর যদি $m$ হয়, তবে সেই সময় **বন্দুকের ভরবেগ MV = গুলির ভরবেগ mv** হইবে। স্পষ্টতই মানে সমান হইলেও এই দুই ভরবেগ বিপরীতমুখী।

বলা বাহুল্য, ইহাও ভরবেগ-সংরক্ষণতত্ত্বের অন্যতম উদাহরণ। ঐ তত্ত্ব অনুসারে, $MU + mu = MV + mv.$

এখানে $U = 0 = u$ বলিয়া,

$$0 = MV + mv;$$

$$\therefore \quad -MV = mv.$$

অর্থাৎ গুলির মুখে ভরবেগের যাহা মান, বিপরীত মুখে বন্দুকের ভরবেগের মানও তাহাই।

## 7·23. ভরবেগ-সংরক্ষণতত্ত্বের বিচিত্র প্রয়োগ :

(*a*) **দুই বা ততোধিক (অস্থিতিস্থাপক) বস্তুর সংঘর্ষ** (*Inelastic collision of two or more bodies*) :

**উদাহরণ 1.** 11 পাউণ্ড ভরের একটি বস্তু 40 ফুট/সেকেণ্ড বেগে চলিতে চলিতে সম্মুখবর্তী একই সরল রেখায় 24 ফু./সে. বেগে চলমান 5 পাউণ্ড ভরের অপর একটি বস্তুকে আঘাত করে এবং আঘাতের পর উভয়ে যুক্তভাবে একই দিকে একই বেগে চলিতে থাকে। বস্তু-দুইটি প্রথমে (i) এক মুখে বা (ii) বিপরীত মুখে চলমান থাকিলে, সংঘর্ষের পর তাহাদের সাধারণ বেগ কত হইবে?

(i) সংঘর্ষের পূর্বে, প্রথম বস্তুর ভরবেগ + দ্বিতীয় বস্তুর ভরবেগ

$= (11 \times 40 + 5 \times 24)$ একক, [ বেগ-দুইটি একই অভিমুখী বলিয়া ]

$= 560$ একক।

সংঘর্ষের পর মোট ভর $= 5 + 11 = 16$ পাউণ্ড। নির্ণেয় বেগ যেন $v$ ফু./সে.।

$\therefore$ $MU + mu = MV + mv$ সূত্র অনুসারে, সংঘর্ষের পূর্বে ও পরে ভরবেগ সমান।

$\therefore \quad 16v = 560;$

$\therefore \quad v = 35$ ফু./সে.।

(ii) সংঘর্ষের পূর্বে, প্রথম বস্তুর ভরবেগ + দ্বিতীয় বস্তুর ভরবেগ

$= 11 \times 40$ একক $+ 5 \times -24$ একক, [ বেগ-দুইটি বিপরীতমুখী বলিয়া ]

$= (440 - 120)$ একক

$= 320$ একক।

সংঘর্ষের পর মোট ভর = 11 + 5 = 16 পাউণ্ড। স্পষ্টতই এই যুক্ত ভর 11 পাউণ্ড ভরের গতিমুখে চলিতে থাকিবে। তখন যদি সাধারণ বেগ $v'$ হয়, তবে

$$16v' = 320\,;$$

$$\therefore \quad v' = \tfrac{320}{16} = 20 \text{ ফু./সে.।}$$

**উদাহরণ 2.** 20 ফু./সে. বেগে চলমান 4 পাউণ্ড ভরের একটি বস্তু একই দিকে 2 ফু./সে. বেগে ধাবমান 18 পাউণ্ড ভরের অপর একটি বস্তুকে পিছন হইতে গিয়া আঘাত করে। সংঘর্ষের পর 18 পাউণ্ড বস্তুটি যদি 7 ফু./সে. বেগে চলিতে থাকে, তবে 4 পাউণ্ড বস্তুটি কোন্ দিকে কত বেগে চলিতে থাকিবে ?

সংঘর্ষের পর 4 পাউণ্ড ভরটি যেন $v$ ফু./সে. বেগে চলিতে থাকে।

$\therefore \quad MU + mu = MV + mv$ সূত্র অনুসারে,

$$18 \times 2 + 4 \times 20 = 18 \times 7 + 4v\,;$$

$$\therefore \quad 116 = 126 + 4v\,;$$

$$\therefore \quad 4v = -10\,;$$

$$\therefore \quad v = -2\tfrac{1}{2} \text{ ফু./সে.।}$$

$\therefore$ সংঘর্ষের পর 4 পাউণ্ড ভরের বস্তুটি $2\frac{1}{2}$ ফু./সে. বেগে পূর্বের গতিমুখের ঠিক বিপরীত মুখে চলিতে থাকিবে।

(*b*) **গুলিগোলা ও আগ্নেয়াস্ত্রের গতি :**

7·22 অনুচ্ছেদের আলোচনা হইতে আমরা জানি যে এইরূপ প্রশ্নে

$$-\mathbf{MV} = \mathbf{mv}.$$

এই সূত্রের প্রয়োগেই বন্দুক ও গুলির গতি-সংক্রান্ত প্রশ্নের সমাধান করা যায়।

**উদাহরণ 3.** একটি 50 টন ভারী কামান হইতে 500 পাউণ্ডের একটি গোলা ছোঁড়া হইলে, গোলাটি সেকেণ্ডে 1120 ফুট বেগে ধাবিত হয়। কামানটি কত বেগে পিছনদিকে ধাক্কা খায় ?

কামানের ধাক্কার বেগ যেন $v$.

$\because$ কামানের ভরবেগ = বিপরীত মুখে গোলার ভরবেগ ;

$$\therefore \quad 50 \times 2240v = 500 \times 1120\,;$$

$$v = \frac{\overset{10}{\cancel{500}} \times \overset{5}{\cancel{1120}}}{\cancel{50} \times \underset{2}{\cancel{2240}}} = 5.$$

$\therefore$ 5 ফু./সে. বেগে কামানটি ধাক্কা খায়।

**উদাহরণ 4.** একটি অর্ধ-টন কামান হইতে 1920 ফু./সে. বেগে অনুভূমিক রেখায় 7 পাউণ্ডের একটি গোলা ছোঁড়া হয় এবং $\frac{1}{2}$ টন পরিমাণ বলপ্রয়োগে কামানের ধাক্কা রোধ করা হয়। পিছনদিকে কতদূর গিয়া কখন কামানটি স্থির হয়?

[ W. B. H. S. 1971 ]

কামানের বেগ যদি $u$ হয়, তবে

$\frac{1}{2} \times 2240 \times u = 7 \times 1920$;

$$\therefore \quad u = \frac{7 \times 1920 \times 2}{2240} = 12.$$

আবার, $P = mf$ সূত্র অনুসারে, কামানের উপর প্রযুক্ত বল

$\frac{1}{2} \times 2240 \times 32 = \frac{1}{2} \times 2240 f$;

$\therefore \quad f = 32.$

$u$ বেগ এই মন্দনের ফলে $s$ দূরত্ব যাইবার পর যেন শূন্যে পরিণত হয়। তাহা হইলে,

$v^2 = u^2 - 2fs$ সূত্রানুসারে,

$0 = u^2 - 2fs$,

বা, $u^2 = 2fs$;

$\therefore \quad 12 \times 12 = 2 \times 32s$;

$$\therefore \quad s = \frac{12 \times 12}{64} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4} \text{ ফুট।}$$

$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব $2\frac{1}{4}$ ফুট।

আবার, নির্ণেয় সময় যদি $t$ হয়, তবে $v = u - ft$ সূত্রানুসারে,

$0 = 12 - 32t$,

অথবা, $32t = 12$; $\therefore \quad t = \frac{3}{8}$ সেকেণ্ড।

### (c) খুঁটি, পেরেক প্রভৃতি পুঁতিবার জন্য প্রযুক্ত ঘাতজ বল :

ঘাতজ বল-সংক্রান্ত প্রশ্নের সমাধান করিবার সময় কয়েকটি কথা সযত্নে মনে রাখিতে হইবে। এই ধরনের প্রশ্নে মাটি বা অনুরূপ কোন মাধ্যমে নিচের দিকে কোন বস্তু পুঁতিবার সময় ঐ মাটি বা অন্য মাধ্যম উপরের দিকে বাধা দেয়। উপর হইতে নিচুদিকে আঘাতের প্রতিক্রিয়া এবং যাহা আঘাত করে তাহার ওজন-পরিমাণ বলের

প্রতিক্রিয়া—এই দুই-এর সমষ্টিই ঐ বাধা। কাজেই **আঘাতকারী বস্তুর ভর m এবং ঘাতজ বল যদি P হয়, তবে প্রতিক্রিয়া R+P=mg হইবে।**

কিন্তু এই আঘাত যদি অনুভূমিক রেখায় হয়, তবে বাধা কেবল ঘাতজ বলকেই প্রতিহত করে, ওজনকে প্রতিহত করে না। কাজেই অনুভূমিক ঘাতজ বল ও তাহার প্রতিক্রিয়া বা বাধা সমান ধরিতে হইবে। দুই-একটি উদাহরণ দ্বারা বিষয়টি পরিষ্কার করার চেষ্টা করা যাক।

**উদাহরণ 5.** 9 ফুট উচ্চতা হইতে পতিত ·25 টনের একটি ভর 112 পাউণ্ড ভরবিশিষ্ট একটি স্তবককে মাটির 4 ইঞ্চি তলায় প্রোথিত করে। এখানে আঘাত যদি স্থিতিস্থাপক না হয়, তবে (i) কত বেগে প্রথমোক্ত ভরটি স্তবকের উপর আঘাত করে, (ii) আঘাতের পর উভয়ে কত বেগে নিচে প্রবেশ করিতে থাকিবে এবং (iii) যে গড় বাধায় ঐ ভর ও স্তবক রুদ্ধ হয় তাহা নির্ণয় কর।

(i) $v^2=2gh$ অর্থাৎ $v=\sqrt{2gh}$ সূত্র অনুসারে,

9 ফুট পতনের ফলে বেগ $=\sqrt{2.32.9}$ বা 24 ফু./সে.।

(ii) আঘাতের পর সমবেত ভর-দুইটির বেগ যেন $v'$ হয়। ভরবেগ-সংরক্ষণতত্ত্ব অনুসারে আঘাতের পূর্বে ও পরে ভরবেগ একই থাকিবে। অতএব,

আঘাতের পূর্বে ভরবেগ = আঘাতের পরে ভরবেগ

অর্থাৎ $\cdot25\times2240\times24=(\cdot25\times2240+112)v'$ ;

অথবা $560\times24=672v'$ ;

অথবা $\dfrac{\overset{20}{\cancel{560}}\times\cancel{24}}{\underset{\underset{\cancel{28}}{}}{\cancel{672}}}=v'.$

$\therefore\quad v'=20$ ফু./সে.।

(iii) এখানে গড় বাধা $R$, ঘাতজ বলের বিরুদ্ধে বাধা $P$ এবং ভর যেন $m$।

তাহা হইলে $R=P+mg.$

$R$ বল $m$ ভরের উপর যে-মন্দন উৎপন্ন করে তাহার ফলে 4 ইঞ্চি বা $\frac{1}{3}$ ফুট অতিক্রমকালে প্রারম্ভিক বেগ শূন্যে পরিণত হয়।

$\therefore\quad v^2=u^2-2fs$ সূত্র অনুসারে, এখানে $u^2=v'^2-2.f.s.$

$\therefore\quad 20\times20=2.f.\frac{1}{3}$ ; $\therefore\quad f=600$ ফু./সে.$^2$'

অর্থাৎ মন্দন $=600$ ফু./সে.$^2$।

আবার $P=mf=672\times600$

এবং $mg=672\times32$

$$\therefore \quad R = P + mg = 672 \times 600 + 672 \times 32$$
$$= 672 \times (600 + 32)$$
$$= 672 \times 632 \text{ পাউণ্ডাল}$$
$$= \frac{672 \times 632}{32} \text{ পাউণ্ড-ভার}$$
$$= 13272 \text{ পাউণ্ড-ভার।}$$

**উদাহরণ 6.** 5 হন্দরের একটি ভার অবাধে কত ফুট পতনের পর 640 পাউণ্ড ভরবিশিষ্ট একটি স্তম্ভকে 5 টন পরিমাণ গড় বাধা ভেদ করিয়া মাটির তলায় 3 ইঞ্চি প্রোথিত করিবে ?

নির্ণেয় উচ্চতা যেন $h$ ফুট।

$v^2 = 2gh$ বা $v = \sqrt{2gh}$ সূত্র অনুসারে, $h$ ফুট পতনের পর

বেগ $v = \sqrt{2.32.h} = 8\sqrt{h}$ ফু./সে.।

আঘাতের পর সমবেত ভর-দুইটির বেগ যদি $v'$ হয়, তবে ভরবেগ-সংরক্ষণতত্ত্ব অনুসারে,

আঘাতের পূর্বে ভরবেগ = আঘাতের পরে ভরবেগ

অর্থাৎ $\quad 5 \times 4 \times 28v = (5 \times 4 \times 28 + 640)v'$

বা $\quad 560 \times 8\sqrt{h} = 1200v'$;

$$\therefore \quad v' = \frac{560 \times 8}{1200}\sqrt{h} = \frac{56\sqrt{h}}{15}.$$

এখানে গড় বাধা, $R = 5$ টন $= 5 \times 2240$ পাউণ্ড $= 11200$ পাউণ্ড

$= 11200 \times 32$ পাউণ্ডাল।

মোট ভর $m = (560 + 640) = 1200$ পাউণ্ড।

ঘাতজ বল $P$ এবং উহার বাধার ফলে উৎপন্ন মন্দন যদি $f$ হয়, তবে

$$R = P + mg$$

অর্থাৎ $\quad R = mf + mg, \quad (\because \quad P = mf)$

$= m(f + g)$ সূত্রানুসারে,

$$11200 \times 32 = 1200\,(f + 32);$$

অথবা, $\quad 11200 \times 32 = 1200f + 1200 \times 32,$

বা $\quad 1200f = (11200 - 1200) \times 32 = 10000 \times 32$;

$$\therefore \quad f = \frac{100 \times 3200}{1200} = \frac{800}{3} \text{ ফু./সে.}^2 \text{।}$$

যেহেতু এই মন্দনের ফলে $v'$ বেগ 3 ইঞ্চি বা $\frac{1}{4}$ ফুট অতিক্রম করিবার পর শূন্যে পরিণত হয়, সেইহেতু $v^2 = u^2 - 2fs$ সূত্র অনুসারে,

$$u^2 = 2fs$$

এক্ষেত্রে, $v'^2 = \frac{2 \times \overset{200}{\cancel{800}}}{3} \times \frac{1}{\cancel{4}}$ অর্থাৎ $\left(\frac{56\sqrt{h}}{15}\right)^2 = \frac{400}{3}$ ;

বা $\frac{56 \times 56 \times h}{15 \times 15} = \frac{400}{3}$ ;

বা, $h = \frac{\overset{\overset{25}{\cancel{50}}}{\cancel{400}} \times \overset{5}{\cancel{15}} \times 15}{\underset{7}{\cancel{56}} \times \underset{28}{\cancel{56}} \times \cancel{3}} = \frac{1875}{196}$ ফুট $= 9\frac{111}{196}$ ফুট।

(*d*) **আঘাত ও প্রত্যাঘাত :**

গুলি, বল প্রভৃতি আঘাতের পর বিপরীত দিকে চালিত হয় অর্থাৎ rebound করে। ফলে, আঘাতের পূর্বে যে-বেগ থাকে আঘাতের পরে বিপরীত দিকে অন্য বেগ হয়। কাজেই ভরবেগের পরিবর্তন ঘটে। এইরূপ ক্ষেত্রে—

$Pt = m(v - u)$ এই সূত্র প্রয়োগ করিতে হয়।

**উদাহরণ 7.** 4 আউন্স ভরবিশিষ্ট একটি পাথরের গুলি 16 ফুট উচ্চতা হইতে মেঝের উপর পড়ে এবং প্রতিহত হইয়া 9 ফুট উপরে ওঠে। গুলি ও মেঝের স্পর্শকাল যদি $\frac{1}{30}$ সেকেণ্ড হয়, তবে উহাদের মধ্যে ঐ সময়ে সক্রিয় বলের গড় নির্ণয় কর।

$u = 0$ হইলে, $v^2 = 2gh$ বা $v = \sqrt{2gh}$ সূত্রানুসারে,

মেঝেতে আঘাতকালে গুলির বেগ $= \sqrt{64 \times 16} = 32$ ফু./সে.

আবার, $v = 0$ হইলে, $u^2 = 2gh$ বা $u = \sqrt{2gh}$ সূত্রানুসারে,

আঘাতের পর গুলির বেগ $= \sqrt{64 \times 9} = 24$ ফু./সে.।

কিন্তু এই বেগ যেহেতু 32 ফু./সে. বেগের বিপরীতমুখী, সেইহেতু ইহাকে $-24$ ফু./সে. ধরিতে হইবে।

এখন নির্ণেয় বল যদি $P$ হয়, তবে উর্ধ্বমুখে সক্রিয় বলের লব্ধি

$$P - \text{গুলির ভার} = P - \frac{4}{\cancel{16}} \times \overset{2}{\cancel{32}} = (P - 8) \text{ পাউণ্ডাল।}$$

এখন, ঘাত = ভরবেগের পরিবর্তন।

$$\therefore \ (P - 8) \times \frac{1}{30} = \frac{4}{\cancel{16}} \times \overset{2}{\cancel{32}} - \frac{\cancel{4}}{\underset{\cancel{4}}{\cancel{16}}} \times -\overset{-6}{\cancel{24}} = 8 + 6 ;$$

$$\therefore \ P - 8 = 14 \times 30 ; \ \therefore \ P = 420 + 8 = 428 \text{ পাউণ্ডাল।}$$

### (e) জেট বা ধারাসারের ঘাতজ বল ঃ

নলের মুখ হইতে নিঃসৃত ধারাসারে জল বাহির হইয়া সম্মুখের যে-কোন বাধার উপর বল প্রয়োগ করে। বড় বড় সহরের রাস্তা ধুইবার সময় যে-নলের ফোয়ারা ব্যবহৃত হয় তাহার জলস্রোতে রাস্তার সব ময়লা অপসারিত হয়। এই ফোয়ারাতে যে বল আছে—ইহা তাহাই প্রমাণ করে। এইপ্রকার বল ঘাতজ, কেননা প্রতিমুহূর্তে প্রতিটি বিন্দু জল বাধার উপর সবেগে আঘাত করে এবং আঘাতের সঙ্গে সঙ্গে উহার বেগ নষ্ট হয়। কাজেই এইরূপ ধারাসারের মোট ভরবেগ যতটা নষ্ট হয় ততটাই উহার ঘাতজ বল।

বৃষ্টিধারা মাটিতে যে-বল সহকারে আঘাত করে তাহাও ঘাতজ বল। উপর হইতে অবাধে পতনের ফলে বৃষ্টিধারা বেগ সঞ্চয় করে। এই বেগ ও বৃষ্টির জলের ভর গুণ করিলে ভরবেগ পাওয়া যায়। মাটিতে আহত হইবামাত্র বৃষ্টির বেগ শূন্যে পরিণত হয়। কাজেই তখন উহার ভরবেগও শূন্য হইয়া যায়। এইভাবে বিনষ্ট ভরবেগের পরিমাণ দ্বারা এক্ষেত্রেও ঘাতজ বলের পরিমাণ নির্ণয় করা হয়।

**উদাহরণ 8.** $1\frac{3}{4}$ ইঞ্চি ব্যাসযুক্ত একটি নলের মুখ হইতে সেকেণ্ডে 48 ফুট বেগে নিঃসৃত জলধারা একটি প্রাচীরের উপর লম্বভাবে নিরবচ্ছিন্ন আঘাত করিতেছে। এক ঘনফুট জলের ওজন যদি 62·5 পাউণ্ড হয়, তবে ঐ প্রাচীরের উপর আঘাত নির্ণয় কর।



39নং চিত্র

নলের মুখের ক্ষেত্রফল $=\pi$ ( ব্যাসার্ধ )$^2 = \frac{22}{7}\times\left(\frac{7}{8\times 12}\right)^2$ বর্গফুট।

জলধারার বেগ 48 ফু./সে. বলিয়া প্রতি সেকেণ্ডে নলের 48 ফুট দীর্ঘ স্থানে যতটা জল ধরে, ততটা নির্গত হইবে। ঐ জলের আয়তন,

$$=\frac{\overset{11}{\cancel{22}}}{\cancel{7}}\times\frac{\cancel{7}\times 7}{\underset{2}{\cancel{8}}\times\cancel{12}\times 8\times 12}\times\overset{4}{\cancel{48}} \text{ ঘনফুট } = \frac{77}{8\times 12} \text{ ঘনফুট।}$$

কিন্তু এক ঘনফুট জলের ওজন $62{\cdot}5 = 62\frac{1}{2} = \frac{125}{2}$ পাউণ্ড।

কাজেই $\frac{77}{8\times 12}$ ঘনফুট জলের ওজন $=\frac{77}{96}\times\frac{125}{2}$ পাউণ্ড;

$\therefore\ \frac{77}{96}\times\frac{125}{2}$ পাউণ্ড জলের ভরবেগ $=\frac{77\times 125}{\underset{2}{\cancel{96}}\times 2}\times\cancel{48}$ একক $= 2406\frac{1}{4}$ একক।

এই ভরবেগই প্রাচীরের উপর আঘাতের পরিমাণ।

$\therefore$ নির্ণেয় আঘাত $= 2406\frac{1}{4}$ পাউণ্ডাল।

**উদাহরণ 9.** 1600 ফুট উচ্চ হইতে 4 ঘণ্টায় 1 ইঞ্চি পরিমাণ বৃষ্টিপাত হয়। 1 ঘনফুট জলের ওজন 62·5 পাউণ্ড হইলে, প্রতি বর্গফুট ভূমিতলে বৃষ্টির গড় আঘাত নির্ণয় কর।

1600ফু. পতন-জনিত বেগ = $\sqrt{2.32.1600} = 8 \times 40$ ফু., $[\because \ v^2 = 2gh]$

4 ঘণ্টায় 1 বর্গফুট স্থানে পতিত জলের আয়তন $= 1 \times 1 \times \frac{1}{12}$ ঘনফুট

$= \frac{1}{12}$ ঘনফুট।

1 ঘনফুট জলের ওজন $62\frac{1}{2}$ পাউণ্ড বলিয়া,

$\frac{1}{12}$ ঘনফুট জলের ওজন $\frac{1}{12} \times \frac{125}{2}$ পাউণ্ড।

$\therefore$ 4 ঘণ্টায় প্রতি বর্গফুট ভূমিতলে আঘাত $= \frac{125}{24}$ পাউণ্ড জলের ভরবেগ

$= \frac{125}{24} \times 8 \times 40$ পাউণ্ডাল।

$\therefore$ প্রতি সেকেণ্ডে প্রতি বর্গফুট ভূমিতলে আঘাত $= \frac{125 \times 40}{3 \times 4 \times 60 \times 60}$

$= \frac{25}{216}$ পাউণ্ডাল।

### (*f*) রকেট ও জেট-বিমানের গতি ও ঘাতজ বল :

রকেট যখন ধাবিত হয় তখন উহার ভিতর হইতে একটা কিছু বস্তু রকেটের গতিমুখের ঠিক বিপরীত দিকে সবেগে ও নিরবচ্ছিন্নভাবে নির্গত হয়। জেট-বিমানও সেইরূপভাবে পিছনদিকে বায়ুস্রোত নিঃসৃত করিতে করিতে সামনে ধাইয়া চলে। তফাত এই যে, **রকেটের বেলায় গতিদায়ক বস্তুটি উহার অভ্যন্তরেই বাহিত হয় ; ফলে, রকেটের বেগই ঐ বস্তুর প্রাথমিক বেগ ধরিতে হয়।** জেট-বিমানের বেলায় গতিদায়ক বস্তুটি হইল বায়ু, আর সেই বায়ু বিমানের চারিপাশ হইতে আকৃষ্ট হইয়া বিমানের ভিতর দিয়া দ্রুত নিঃসৃত হয়। কাজেই বিমানে প্রবেশ করার পূর্বে বায়ু স্থির এবং সেই কারণে বায়ুর **প্রাথমিক বেগ শূন্য ধরিতে হয়।**

**উদাহরণ 10.** একটি ধাবমান রকেট হইতে প্রতি সেকেণ্ডে 2 পাউণ্ড হারে এবং 800 ফু./সে. বেগে বস্তুবিশেষের একটি নিরবচ্ছিন্ন ধারা নিঃসারিত হয়। (i) রকেটখানি কত বলে চালিত হইতেছে? (ii) রকেটখানির ওজন যদি 20 পাউণ্ড হয় এবং উহা যদি ঊর্ধ্বমুখে চালিত হয়, তবে উহার ত্বরণ কত হইবে?

(i) রকেটখানির বেগ যদি $v$ ফু./সে. হয়, তবে রকেট হইতে নির্গমনশীল বস্তুর প্রাথমিক বেগও $v$ ফু./সে. এবং ঐ নির্গমনশীল বস্তু 800 ফু./সে. বেগে বাহির হয় বলিয়া উহার প্রান্তিক বা প্রকৃত বেগ হইবে $(800 - v)$ ফু./সে.।

এখন, নির্গমনশীল বস্তুর গতিমুখকে ধনাত্মক ধরিলে উহার বিপরীত দিক্‌ অর্থাৎ

রকেটের গতিমুখকে ঋণাত্মক ধরিতে হইবে। কাজেই বলা চলে যে, নির্গমনশীল বস্তুটির বেগ $-v$ ফু./সে. হইতে $(800-v)$ ফু./সে. বেগে পরিবর্তিত হইয়াছে।

∴ ঘাতজ বল = ভরবেগের পরিবর্তন

$= 2(800-v) - 2(-v) = 1600$ পাউণ্ডাল।

(ii) এইবার, রকেটের নির্ণেয় ত্বরণ যেন $f$ ফু./সে.² এবং উহা ঊর্ধ্বগামী।

∴ ঊর্ধ্বমুখে বল = 1600 পাউণ্ডাল,

নিম্নমুখে বল = রকেটের ওজন = $20g$.

∴ $1600 - 20g = 20f$,

বা $80 - g = f$,

বা $80 - 32 = f$.

$f = 48$ ফু./সে.²।

**উদাহরণ 11.** একটি জেট-বিমান প্রতি সেকেণ্ডে 100 পাউণ্ড বায়ু 960 ফু./সে. বেগে নিঃসারিত করে। (i) স্থিতিশীল অবস্থায় এবং (ii) ঘণ্টায় 300 মাইল বেগে ধাবমান অবস্থায় বিমানটির উপর সম্মুখ-চাপ কত?

(i) প্রতি সেকেণ্ডে নিঃসারিত 100 পাউণ্ড বায়ুর ভরবেগ

$= 100 \times 960$ একক।

∴ সম্মুখ-চাপ $= 960 \times 100 = 96000$ পাউণ্ডাল।

(ii) বিমানটি যখন 300 মা./ঘ. অর্থাৎ $\frac{300 \times 1760 \times 3}{3600}$ বা 440 ফু./সে. বেগে ধাবমান, তখন বিমানের গতিসাপেক্ষে বায়ুর বেগ

$= (960 - 440) = 520$ ফু./সে.।

∴ এক্ষেত্রে সম্মুখ-চাপ $= 100 \times 520 = 52000$ পাউণ্ডাল।

## (g) বিবিধ উদাহরণ :

**উদাহরণ 12.** 4 ফু./সে. সমবেগে চলমান 100 পা. ওজনের একটি ট্রাকে 150 পা. ওজনের একজন পূর্ণবয়স্ক ব্যক্তি ও 90 পা. ওজনের একটি বালক দাঁড়াইয়া আছে। তাহার পর বালকটি ট্রাকের বিপরীত মুখে 10 ফুট./সে. বেগে লাফাইয়া পড়িল। ট্রাকের পরিবর্তিত বেগ নির্ণয় কর।

এখানে প্রথম অবস্থায় মোট ভর $= 150 + 90 + 100 = 340$ পাউণ্ড।

∴ মোট ভরবেগ $= 340 \times 4$ একক।

এখন, বালকটি যখন লাফ দেয় তখন সে যে-ভরবেগ সহকারে সামনে পড়ে, তাহার পায়ের চাপে ট্রাকখানির উপর ঠিক সেই পরিমাণ ভরবেগ বিপরীতমুখে সঞ্চারিত

হয়। ফলে খণ্ড খণ্ড ভাবে মানুষ-সহ ট্রাকখানি ও বালকের ভরবেগের পরিবর্তন হইলেও মোট ভরবেগের কোন পরিবর্তন হইবে না। ভরবেগ-সংরক্ষণতত্ত্বের ইহাই সিদ্ধান্ত। মানুষটি-সহ ট্রাকের পরিবর্তিত বেগ যদি $v$ ফু./সে. হয়, তবে তাহাদের পরিবর্তিত ভরবেগ হইল $(150+100)v = 250v$.

গতিশীল ট্রাকের তুলনায় বালকের পরিবর্তিত বেগ $= (10-4) = 6$ ফু./সে.।

$\therefore$ ট্রাকের বিপরীতমুখে বালকের ভরবেগ $= 90 \times 6 = 540$ একক।

$\therefore$ ট্রাকের গতিমুখে মোট ভরবেগ $= (250v - 540)$ একক। উহা পূর্বেকার ভরবেগ অর্থাৎ $340 \times 4$ এককের সমান।

$$\therefore \quad 250v - 540 = 340 \times 4;$$

$$\therefore \quad 250v = 1360 + 540 = 1900;$$

$$\therefore \quad v = \frac{1900}{250} = 7\tfrac{3}{5} \text{ ফু./সে.।}$$

## প্রশ্নমালা 8

1. 4 ফু./সে. বেগে চলমান একটি 2 পাউণ্ডের বস্তু ব্যাটের আঘাতে 7 ফু./সে. বেগে চলিতে লাগিল। ঘাত যদি (i) প্রাথমিক ও প্রান্তিক বেগের মুখে এবং (ii) প্রাথমিক বেগের বিপরীত দিকে, কিন্তু প্রান্তিক বেগের মুখে হয়, তবে প্রত্যেক ক্ষেত্রে উহার মান কত?

2. $5\frac{1}{2}$ আউন্স ওজনের এবং 20 ফু./সে. বেগে ধাবমান একটি ক্রিকেট-বলকে ব্যাটের আঘাতে পূর্ববেগের বিপরীতমুখে সোজা 60 ফু./সে. বেগে চালিত করা হয়। বলের উপর প্রযুক্ত ঘাতজ বল নির্ণয় কর। ব্যাটে-বলে সংযোগকাল $\frac{1}{10}$ সে. হইলে, পাউণ্ডে প্রযুক্ত বলের গড় মান কত হয়? [ London University ]

3. 10 ফু./সে. বেগে ধাবমান 10 পাউণ্ডের একটি বস্তুকে এক আঘাতে বিপরীতমুখে 5 ফু./সে. বেগে চালিত করা হইলে ভরবেগের পরিবর্তন কত হয়? ঐ আঘাত যদি $\frac{1}{100}$ সে. স্থায়ী হইয়া থাকে, তবে প্রযুক্ত বলের মান কত? [ W. B. S. F. 1961 ]

4. 1 পাউণ্ডের একটি স্থির ভরের উপর 1 আউন্সের একটি বল 10 সেকেণ্ড কাল ক্রিয়া করে। 10 সেকেণ্ডের মাথায় বস্তুটির বেগ এবং ঐ সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব কত হয়? [ W. B. S. F. 1959 ]

5. পাশাপাশি স্থাপিত দুইটি ভরের একটি স্থিরাবস্থা হইতে $F$ বলের ক্রিয়ায় চলিতে থাকে এবং অপরটি একই দিকে $I$ ঘাত লাভ করিয়া চলমান হয়। যে-সময়ে ভর-দুইটি আবার পাশাপাশি হইবে, সেই সময় নির্ণয় কর। [ C. U. Mat. 1932 ]

6. 10 ফু./সে. বেগে ধাবমান 7 পাউণ্ডের একটি ভর, একই দিকে 5 ফু./সে. বেগে চলমান 14 পাউণ্ডের একটি ভরকে আঘাত করে এবং আঘাতের পর উভয়ে একযোগে চলিতে থাকে। ভর-দুইটির মোট ভরবেগ এবং আঘাতের পর তাহাদের বেগ নির্ণয় কর।

7. 8 ফু./সে. বেগে ধাবমান 5 পাউণ্ডের একটি বস্তু বিপরীতমুখে 10 ফু./সে. বেগে চলমান 10 পাউণ্ডের একটি বস্তুর সহিত মিলিত হয়। আঘাতের পর উহারা যদি একত্রে মিশিয়া একটি বস্তুতে রূপান্তরিত হয়, তবে প্রমাণ কর যে, শেষোক্ত রূপান্তরিত বস্তুর বেগ হইবে 4 ফু./সে.। [ C. U. I.Sc. 1957 ]

8. 4 মি./সে. বেগে চলমান 3 কে.জি.-র একটি ভর 60 সে.মি./সে. বেগে একই দিকে চলমান 800 গ্রামের আরেকটি ভরের সহিত মিলিত হয়। ইহার পর ভর-দুইটি যদি একই বেগে চলিতে থাকে, তবে সে.মি./সেকেণ্ডে সেই বেগের মান নির্ণয় কর। [ London University ]

9. ঘণ্টায় 3 মাইল বেগে ধাবমান 6 টন ওজনের একটি মালবাহী ট্রাক আরেকটি দাঁড়াইয়া থাকা ট্রাকের উপর গিয়া ধাক্কা খায় এবং তাহার পর ট্রাক-দুইটি একত্রে ঘণ্টায় 2 মাইল বেগে চলিতে থাকে। দ্বিতীয় ট্রাকটির ভর-পরিমাণ নির্ণয় কর।

10. 6 মা./ঘ. বেগে ধাবমান 50 টনের একটি রেল-ইঞ্জিন, বিপরীতমুখে 3 মা./ঘ. বেগে চলমান একটি 10 টনের ট্রাকের সহিত ধাক্কা খায়। ইহার পর ইঞ্জিন ও ট্রাকখানি একত্রে চলিতে থাকে। তখন তাহাদের বেগ কত হয়?

[ Oxford and Cambridge Jt. Board ]

11. 5 ফু./সে. বেগে চলমান 10 পাউণ্ডের একটি ভর বিপরীতমুখে 6 ফু./সে. বেগে ধাবমান 12 পাউণ্ডের একটি ভরের সহিত মিলিত হইয়া এক হইয়া যায়। তখন এইভাবে রূপান্তরিত ভরটির বেগের মান ও দিক্ নির্ণয় কর।

12. 12 ফু./সে. বেগে ধাবমান 3,000 পাউণ্ডের একটি ট্রাক একই দিকে 2 ফু./সে. বেগে চলমান 2,000 পাউণ্ডের একটি ভরের সহিত মিলিত হইয়া একই বেগে চলিতে থাকে। এই পরবর্তী বেগ কত?

[ Oxford and Cambridge Jt. Board ]

13. 12 ফু./সে. বেগে চলমান 6 পাউণ্ডের একটি ভর, বিপরীত মুখে 15 ফু./সে. বেগে ধাবমান 4 পাউণ্ডের একটি ভরের সহিত সরাসরি ধাক্কা খাইয়া যুক্ত হইয়া যায়। এই সংঘর্ষে বস্তু-দুইটির সাধারণ বেগ কত হয় এবং কোন্ দিকে তাহারা চলিতে থাকে?

[ London University ]

14. 10 ফু./সে. বেগে 10 টনের একটি ট্রাক, 5 টনের অন্য একটি স্থির ট্রাককে ধাক্কা দেওয়ার পর 4 ফু./সে. বেগে চলিতে থাকে। ধাক্কা খাইবার পর দ্বিতীয় ট্রাকখানি কত বেগ লাভ করে?

15. একটি কামান উহার নলের ভিতর 2000 ফু./সে. বেগে 800 পাউণ্ডের একটি গোলা নিক্ষেপ করে। একটি বল কামানের উপর পিছনদিকে ধাক্কা $\frac{1}{5}$ সেকেণ্ডে প্রতিহত করে। বলটির মান কত ?

16. একটি বন্দুকের 4 আউন্সের একটি গুলি 1200 ফু./সে. বেগে ধাবিত হয়। কত পরিমাণ বল ঐ গুলিটিকে 1 সেকেণ্ডে প্রতিহত করিতে পারে ?

17. 12 পাউণ্ড ওজনের একটি বন্দুক হইতে 1 আউন্সের একটি গুলি 1500 ফু./সে. বেগে ছোঁড়া হয়। যে-বেগে বন্দুকটি পিছনদিকে ধাক্কা খায় তাহা নির্ণয় কর।

18. $\frac{1}{2}$ আউন্সের একটি গুলি একটি বন্দুকের 2 ফুট লম্বা নলের মুখ হইতে 2000 ফু./সে. বেগে নির্গত হয়। গুলিটির উপর প্রযুক্ত বলের মান এবং বন্দুকটির নলের একপ্রান্ত হইতে অন্যপ্রান্ত যাইতে গুলিটির কত সময় লাগে তাহা নির্ণয় কর।

19. 12 টনের একটি কামান হইতে 1260 ফু./সে. বেগে 180 পাউণ্ডের একটি গোলা ছোঁড়া হয়। যে-বল বা চাপে কামানের উপর পশ্চাদ্‌মুখী ধাক্কা 6 ফুট দূরত্বে প্রতিহত হয়, তাহার মান নির্ণয় কর।

20. একটি গুলি 200 ফু./সে. বেগে আঘাত করিয়া একটি গাছের গুঁড়ির মধ্যে 9 ইঞ্চি ঢুকিয়া যায়। গুলিটি যদি একই বেগে 6 ইঞ্চি পুরু একটি গুঁড়িতে আঘাত করিত এবং বাধা যদি পূর্বের মতই হইত, তবে গুলি কত বেগে ফুঁড়িয়া বাহির হইয়া যাইত ?

21. 1600 ফু./সে. বেগে ধাবমান একটি গুলি যখন তাহার লক্ষ্যস্থলের ভিতর 1 ইঞ্চি ঢুকিয়া যায়, তখন তাহার বেগ অর্ধেক হইয়া যায়। বাধা সমহার ধরিলে, গুলিটির বেগ সম্পূর্ণ রুদ্ধ হওয়া পর্যন্ত উহা আর কতদূর ঢুকিবে ?

22. 1 আউন্সের একটি গুলিকে 160 ফু./সে. বেগে একটি দেওয়ালের উপর ছোঁড়া হইল। দেওয়ালের ভিতর 6 ইঞ্চি প্রবেশ করার পর গুলির বেগ শূন্যে পরিণত হয়। সমহার ধরিয়া দেওয়ালের বাধা নির্ণয় কর।

23. 1000 ফু./সে. বেগে ধাবমান একটি 2000 টন ডুবোজাহাজ, 8000 টন একটি স্থির জাহাজের ভিতর ঢুকিয়া যায় এবং তাহার পর জাহাজ-দুইটি একসঙ্গে চলিতে থাকে। তখন তাহাদের বেগ কত হয় ?

24. 1000 ফু./সে. বেগে ধাবমান একটি গুলি পরপর দুই খণ্ড অসমান পুরু কাঠ ভেদ করিয়া যায় এবং প্রত্যেক খণ্ড ভেদ করিবার সময় 200 ফু./সে. পরিমাণ বেগ হারায়। কাঠের বাধা দুইক্ষেত্রেই সমান হইলে, খণ্ড-দুইটির পুরুত্বের তুলনা কর।

25. একটি কামান ও উহার বাহন গাড়ীটির সমবেত ওজন 200 পাউণ্ড। ঐ কামান হইতে 1000 ফু./সে. বেগে 8 আউন্সের একটি গোলা অনুভূমিক রেখায় ছোঁড়া হয়। যে-বরফের ক্ষেত্রে কামানটি স্থাপিত তাহার বাধা 4 পাউণ্ড। (i) কামানটির পিছনদিকে ধাক্কার বেগ, (ii) যে-দূরত্ব পর্যন্ত গিয়া উহা স্থির হয়, সেই দূরত্ব এবং (iii) স্থৈর্যলাভ করা পর্যন্ত অতিবাহিত সময় নির্ণয় কর।

26. বালি-ভর্তি 500 পাউণ্ডের একটি বাক্স অবাধে অনুভূমিক রেখায় সরিতে পারে। অনুভূমিক রেখায় ঐ বাক্সে 0·5 আউন্সের একটি গুলি ছুঁড়িলে বাক্সের ভিতর বালিতে উহা রুদ্ধ হয়। বাক্সে আঘাতের গুলিটির বেগ যদি 1000 ফু./সে. হইয়া থাকে, তবে কত বেগে বাক্সটি চলিতে শুরু করিবে? [ London University ]

27. 12000 পাউণ্ড ওজনের একটি কামান হইতে 30 পাউণ্ডের একটি গোলা ছোঁড়া হয়। ধাক্কার চোটে 600 পাউণ্ড একটি সমহার বাধার বিরুদ্ধে কামানটি 3 ফুট পিছনে সরিয়া যায়। গোলাটি যে-বেগে কামান হইতে নির্গত হয় তাহার মান বাহির কর। [ Welsh Jt. Edn. Com. ]

28. 2 পাউণ্ড ওজনের একটি হাতুড়ি 12 ফু./সে. বেগে একটি 1 পাউণ্ড ওজনের একটি খুঁটির উপর আঘাত করে এবং উল্লম্বভাবে উহাকে মাটির ভিতর ঢুকাইয়া দেয়। আঘাতের অব্যবহিত পরে হাতুড়িটি খুঁটিটির সংলগ্ন থাকিলে ঐ হাতুড়ি ও খুঁটির সমবেত বেগ কত হয়? আঘাতের ফলে কত পরিমাণ ঘাত উৎপন্ন হয়?

[ London University ]

29. 3 ফুট পতনের পর 2 হন্দরের একটি হাতুড়ি একটি লোহার ভরে আঘাত করে। আঘাতকাল যদি $\frac{1}{100}$ সেকেণ্ড হয়, তবে যে-বলে হাতুড়িটি লোহার উপর আঘাত করে তাহা নির্ণয় কর।

30. একটি হাতুড়ির 14 পাউণ্ড ওজনের মাথা 20 ফু./সে. বেগে আঘাত করিয়া একটি হালকা পেরেক-কে মাটিতে 1 ইঞ্চি প্রোথিত করে। (*a*) পাউণ্ডে মাটির গড় বাধা এবং (*b*) যে-সময়ে হাতুড়িটি স্থিরাবস্থা লাভ করে সেই সময় নির্ণয় কর।

[ London University ]

31. 200 পাউণ্ডের একটি ভর উল্লম্বভাবে 9 ফুট পড়িয়া 1000 পাউণ্ডের একটি কাঠের খুঁটিকে মাটির ভিতর 4 ইঞ্চি প্রোথিত করে। আঘাতের পর ঐ ভর ও খুঁটিটি যদি একত্রে চালিত হইয়া থাকে, তবে তাহাদের গতিরোধে সক্রিয় বলের মান নির্ণয় কর। [ London University ]

32. 600 পাউণ্ড গড় বাধার বিরুদ্ধে 300 পাউণ্ড ওজনের একটি খুঁটিকে মাটির ভিতর 6 ইঞ্চি পর্যন্ত প্রোথিত করিবার জন্য একটি 100 পাউণ্ড ভরকে কত উপর হইতে পড়িয়া আঘাত করিতে হইবে?

33. 4 ফুট উপর হইতে উল্লম্বভাবে অবাধে পড়িয়া 4 পাউণ্ডের একটি ভর নেহাই-এর উপর আঘাত করে এবং আঘাতের পর উহা 3 ইঞ্চি ঊর্ধ্বে উৎক্ষিপ্ত হয়। ঐ ভর ও নেহাই-এর সংযোগকাল যদি $\frac{1}{10}$ সেকেণ্ড হয়, তবে উহাদের মধ্যে সক্রিয় বলের গড় মান নির্ণয় কর।

34. 1 পাউণ্ডের একটি বল (ball) 9 ফুট উচ্চতা হইতে অবাধে মেঝেতে পড়িয়া

উপরদিকে 2 ফুট 3 ইঞ্চি উৎক্ষিপ্ত হয়। বল ও মেঝের সংযোগকাল $\frac{1}{20}$ সেকেণ্ড হইলে, তাহার মধ্যে সক্রিয় বলের (force) গড় মান পাউণ্ডে প্রকাশ কর।

[ Oxford and Cambridge Jt. Board ]

35. ঘণ্টায় 40 মাইল বেগে বহমান বাতাস 10 ফুট লম্বা ও 4 ফুট উঁচু একটি বেড়ার উপর যে-বল প্রয়োগ করে তাহা নির্ণয় কর। 1 ঘন-ফুট বাতাসের ওজন 1·25 আউন্স এবং বেড়াতে প্রতিহত বাতাসের বেগ থাকে না—এইরূপ ধর।

[ London University ]

36. একটি নলের $2\frac{1}{3}$ ইঞ্চি ব্যাসযুক্ত বৃত্তাকার মুখ হইতে নির্গত নিরবচ্ছিন্ন একটি জলধারা একটি দেওয়ালের উপর লম্বভাবে 36 ফু./সে. বেগে আঘাত করে এবং তাহার পর মাটিতে গড়াইয়া পড়ে। প্রতি ঘন-ফুট জলের ওজন যদি $62\frac{1}{2}$ পাউণ্ড হয়, তবে দেওয়ালের উপর জলধারার চাপ নির্ণয় কর।

37. একটি রকেট উল্লম্ব দিকে 500 ফু./সে. বেগে বায়বীয় পদার্থ নিঃসৃত করিয়া উপরে ওঠে। প্রতি $2\frac{1}{2}$ সেকেণ্ডে নিঃসৃত পদার্থের ওজন যদি 4 পাউণ্ড হয়, তবে রকেটের উপর ঊর্ধ্বমুখে প্রযুক্ত চাপের মান পাউণ্ডে প্রকাশ কর।

[ Oxford and Cambridge Jt. Board ]

38. 12 পাউণ্ড ওজনের একটি রকেট প্রতি সেকেণ্ডে $1\frac{1}{2}$ পাউণ্ড হারে বায়বীয় পদার্থ বিমানটির তুলনায় 800 ফু./সে. বেগে নিঃসৃত করে। যে-বলে রকেটখানি চালিত হয় এবং সেই বল যে-ত্বরণ উৎপন্ন করে, তাহাদের মান নির্ণয় কর।

39. একটি জেট-বিমান 800 ফু./সে. বেগে প্রতি সেকেণ্ডে 128 পাউণ্ড বাতাস ছাড়ে। (i) বিমানটি যখন স্থির এবং (ii) যখন উহা ঘণ্টায় 150 মাইল বেগে ধাবমান, তখন উহার উপর বাতাসের চাপ নির্ণয় কর।

40. একটি জেট-বিমান প্রতি সেকেণ্ডে 72 পাউণ্ড বাতাস 1000 ফু./সে. বেগে ছাড়িতেছে। বিমানটি যদি সম্মুখদিকে 930 পাউণ্ড চাপে $v$ বেগে চালিত হয়, তবে $v$-এর মান কত ?

41. মসৃণ অনুভূমিক তলে 4 ফু./সে. বেগে ধাবমান 800 পাউণ্ডের একটি ট্রাকের উপর 160 পাউণ্ড ওজনের এক ব্যক্তি দাঁড়াইয়া আছে। ট্রাকের গতির বিপরীত মুখে উহার তুলনায় 10 ফু./সে. বেগে ঐ ব্যক্তি লাফাইয়া পড়িলে ট্রাকখানির বেগ কত হইবে ?

42. 5 ফু./সে. বেগে 160 পাউণ্ড ওজনের এক ব্যক্তি একই মুখে 3 ফু./সে. বেগে চলমান 240 পাউণ্ডের একটি হালকা ট্রাকের উপর লাফাইয়া চড়ে। ঐ ব্যক্তি-সহ ট্রাকখানির বেগ নির্ণয় কর। যদি ঐ ব্যক্তির ওজন 60 পাউণ্ড কম হইত এবং ঐ ব্যক্তি-সহ ট্রাকখানির বেগ যদি $3\frac{4}{9}$ ফু./সে. হইত, তবে ট্রাকখানির ভর কত হইত ?

# অষ্টম অধ্যায়

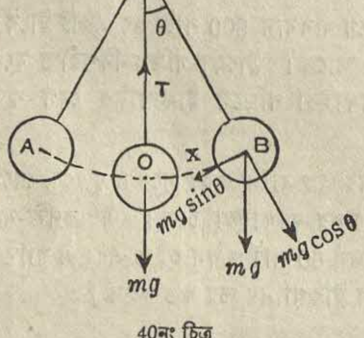
## সরল রেখায় সরল সমঞ্জস গতি

## ( Simple Harmonic Motion in a Straight line )

**8·1. পর্যাবৃত্ত গতি (Periodic motion) :** যখন কোন বস্তুকণা একই পথে পর্যায়ক্রমে একপ্রান্ত হইতে আরেক প্রান্তে যাতায়াত করে, তখন ঐ বস্তুকণার গতিকে **পর্যাবৃত্ত গতি** (*Periodic motion*) বলা হয়। পূর্বে যে-সকল রৈখিক গতির কথা আলোচনা করা হইয়াছে, সেইসকল ক্ষেত্রেই ত্বরণের মান ও অভিমুখ উভয়েই অপরিবর্তিত রহিয়াছে। কিন্তু পর্যাবৃত্ত গতির ক্ষেত্রে সরণ ও বেগের ন্যায় ত্বরণের মান ও দিক্, উভয়ই পর্যায়ক্রমে পরিবর্তিত হইতে থাকে। এরূপ গতির ক্ষেত্রে একটি বিশেষ অবস্থানে বস্তুকণাটির উপর কোন লব্ধি-বল ক্রিয়া করে না। বস্তুকণাটির ঐ অবস্থানকে **সাম্য-অবস্থান** বা **মধ্যক অবস্থান** বলা হয়। এই অবস্থান হইতে বস্তুকণাটিকে সামান্য স্থানচ্যুত করিলে বস্তুকণাটির উপর মধ্যক অবস্থান অভিমুখে একটি **প্রত্যানয়ক বল** (*Restoring force*) ক্রিয়া করে। এই বল বস্তুকণাটিকে উহার মধ্যক অবস্থানে ফিরাইয়া আনে। কিন্তু গতিজাড্যের দরুন বস্তুকণাটি মধ্যক অবস্থান অতিক্রম করিয়া বিপরীতদিকে গতিশীল হয়। পর্যায়ক্রমে এই গতির পুনরাবৃত্তি ঘটিতে থাকে।

সরল দোলকের দোলন পর্যাবৃত্ত গতির উদাহরণ। $O$ হইল মধ্যক অবস্থান। এই অবস্থান হইতে স্থানচ্যুত করিলে দোলকপিণ্ডটি $AOB$ পথে আন্দোলিত হয়।

$\theta$ যেন কোন মুহূর্তে পিণ্ডটির কৌণিক সরণ। ঐ পিণ্ডের উপর সক্রিয় বলগুলি হইল যথাক্রমে উল্লম্বরেখায় নিম্নাভিমুখে $mg$ বল এবং ঊর্ধ্বমুখে তারের টান $T$। $O$ অবস্থানে, এই বল-দুইটি পরস্পরকে প্রশমিত করে। ফলে এই অবস্থানে দোলকপিণ্ডের উপর কোন লব্ধি-বল ক্রিয়া করে না। কিন্তু $B$ অবস্থানে উহার ভারের উপাংশ $mg \cos \theta$ তারের টান $T$ দ্বারা প্রশমিত হয় এবং $mg \sin \theta$ উপাংশ উহাকে $O$ অবস্থানে ফিরাইয়া আনিতে চায়। সুতরাং $mg \sin \theta$ উপাংশই দোলকপিণ্ডের উপর সক্রিয় প্রত্যানয়ক বল।



40নং চিত্র

**পর্যাবৃত্ত গতির ক্ষেত্রে কয়েকটি প্রয়োজনীয় সংজ্ঞা** (*Important definitions regarding periodic motion*) **:**

(*a*) পর্যাবৃত্ত গতিসম্পন্ন কোন বস্তুকণার যে-কোন মুহূর্তে **সরণ** বলিতে মধ্যক অবস্থান হইতে ঐ মুহূর্তে বস্তুকণাটির দূরত্ব বুঝায়। **মধ্যক অবস্থান হইতে সর্বাধিক সরণকে বলা হয় বিস্তার** (*Amplitude*)। উপরে আলোচিত সরল দোলকের বিস্তার হইল $\overline{OA}$ বা $\overline{OB}$।

(*b*) পর্যাবৃত্ত গতিসম্পন্ন কোন বস্তুকণা উহার গতিপথের কোন এক অবস্থান অতিক্রম করার পর আবার একই অবস্থানে একই অভিমুখে ফিরিয়া আসিলে বলা হয় যে, বস্তুকণাটি একটি **সম্পূর্ণ দোলন** (*Complete oscillation*) সম্পন্ন করিয়াছে। সরল দোলকের ক্ষেত্রে দোলকের পিণ্ডটি *A* হইতে *B*-তে গিয়া আবার *A*-তে ফিরিয়া আসিলে বা *O* হইতে *B*-তে গিয়া, *B* হইতে *A*-তে আসিয়া আবার *O*-তে ফিরিয়া আসিলে একটি সম্পূর্ণ দোলন সম্পন্ন হইয়াছে বলা হইবে।

(*c*) একটি সম্পূর্ণ দোলনের সময়কে বলা হয় **দোলন কাল** (*Time-period*) এবং তাহাকে *T* দ্বারা সূচিত করা হয়।

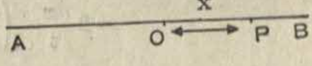
(*d*) পর্যাবৃত্ত গতিসম্পন্ন কোন বস্তুকণা একক সময়ে যতবার সম্পূর্ণ দোলন সম্পাদন করে, সেই সংখ্যাকে উহার **কম্পাংক** (*Frequency*) বলে। *n* দ্বারা কম্পাঙ্ক সূচিত করা হয়।

স্পষ্টতই, $n = \frac{1}{T}$.

**8·2. সরল সমঞ্জস গতি (Simple harmonic motion) :** সরল সমঞ্জস গতি বলিতে সরলতম ও গুরুত্বপূর্ণ একপ্রকার পর্যাবৃত্ত গতিকে বুঝায়। এই গতির ইংরেজী নাম Simple Harmonic Motion বলিয়া উহাকে সংক্ষেপে S.H.M. সংকেতে প্রকাশ করা হয়। ইহার সংজ্ঞা নিম্নরূপ :

একটি সরল রেখার দুইটি নির্দিষ্ট প্রান্তের মধ্যে ইতস্তত দোলায়মান কোন বস্তুকণার ত্বরণ যদি সর্বদা ঐ রেখার একটি স্থির মধ্যক অবস্থানের অভিমুখী হয় এবং যে-কোন মুহূর্তে ঐ ত্বরণের মান যদি মধ্যক অবস্থানটি হইতে কণাটির সরণের সমানুপাতিক হয়, তবে ঐ বস্তুকণার গতিকে **সরল সমঞ্জস গতি** বলে।

এইরূপ সরল সমঞ্জস গতির ক্ষেত্রে মধ্যক অবস্থানটি হইতে ঐ গতিপথের প্রত্যেকটি প্রান্তের দূরত্ব সমান হয় এবং ঐ দূরত্বকে উল্লিখিত সরল সমঞ্জস গতির **বিস্তার** বলে। চিত্রে প্রদর্শিত *P* বস্তুকণাটি যেন একটি সরল রেখায় *A* ও *B* বিন্দুর মধ্যে দোলাচল গতিতে এমনভাবে ইতস্তত সঞ্চরমাণ যে, উহার গতিমুখ সর্বদা ঐ রেখার উপরিস্থ একটি স্থির মধ্যক অবস্থান *O* বিন্দুর অভিমুখে উদ্দিষ্ট এবং যে-কোন মুহূর্তে উহার ত্বরণ যেন *O* হইতে




41নং চিত্র

উহার সরণের সমানুপাতিক। তাহা হইলে সংজ্ঞা অনুসারে $P$-এর গতি একটি সরল সমঞ্জস গতির উদাহরণ। এক্ষেত্রে,

বিস্তার $= \overline{OB} = \overline{OA}$ ;

সংক্ষেপে এই বিস্তার যেন $= a$.

এখন, যে-কোন সময় $t$-এর মাথায় $O$ হইতে $P$-এর সরণ যদি $x$ হয়, তবে, $\overrightarrow{OB}$-মুখে $x$ পরিমাণ সরণের সময়, ত্বরণ $f$ হইবে $\overrightarrow{BO}$-মুখী। সুতরাং $\overrightarrow{BO}$-মুখে $f$-কে ধনাত্মক ধরিলে $\overrightarrow{OB}$-মুখে $x$ সরণকে ঋণাত্মক ধরিতে হইবে এবং সেই কারণে, সংজ্ঞা অনুসারে লেখা যাইবে,

$$f \propto -x$$

বা, $\mathbf{f} = -\mu \mathbf{x}$, যেখানে $\mu$ একটি ধ্রুবকসংখ্যা ... (1)

এখন, বস্তুকণাটির ভর যদি $m$ হয়, তবে নিউটনের দ্বিতীয় সূত্র অনুসারে,

বস্তুকণাটির উপর সক্রিয় বল $F = mf = m(-\mu x) = -\mu m x$

$= -Kx$, [ যেখানে $K = \mu m$ ] ... (2)

(2) হইতে দেখা যায়, সরল সমঞ্জস গতিসম্পন্ন বস্তুকণার উপর সক্রিয় বল সরণের সমানুপাতিক এবং তাহা ত্বরণের মতো সর্বদা মধ্যক অবস্থানের প্রতি উদ্দিষ্ট। এই বল **প্রত্যানয়ক বল** নামে অভিহিত হয়।

সংজ্ঞানুসারে, মধ্যক অবস্থান $O$ হইতে $B$ পর্যন্ত ডানদিকে $P$-এর সর্বাধিক সরণ যদি $a$ হয়, তবে বামদিকে $O$ হইতে $A$ পর্যন্ত $P$-এর সর্বাধিক সরণ হইবে $-a$ ; কেননা এক্ষেত্রে $\overline{OB}$ বা $\overline{OA}$-এর দৈর্ঘ্যমান $a$ হইল $P$ বস্তুকণাটির সরল সমঞ্জস গতির **বিস্তার**।

**8·3. সরল সমঞ্জস গতি-সংক্রান্ত সমীকরণ (Equations involving S.H.M.) :** একটি বস্তুকণা যদি সরল সমঞ্জস গতিতে সঞ্চরমাণ হয়, তবে যেহেতু সরল সমঞ্জস গতির ক্ষেত্রে,

ত্বরণ $f = \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\mu x$, ... ... ... (1)

সেইহেতু $\dfrac{dx}{dt} = y$ ধরিলে, $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 = y^2$

$$\therefore \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2y \cdot \frac{dy}{dt}$$

$= 2\dfrac{dx}{dt} \cdot \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dx}{dt}\right)$, [ $y$-এর মান পুনরায় বসাইয়া ]

$$= 2\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$= 2\frac{dx}{dt} \times -\mu x, \quad \left[ (1) \text{ হইতে } \frac{d^2x}{dt^2}\text{-এর মান বসাইয়া} \right]$$

$$= -\mu . 2x \frac{dx}{dt}$$

$$= -\mu \frac{d(x)^2}{dt}, \quad \left[ \because \frac{d(x)^2}{dt} = 2x \cdot \frac{dx}{dt} \right]$$

$$= \frac{d}{dt}\left(-\mu x^2\right)$$

$\therefore$ উভয়পক্ষের সমাকলন দ্বারা,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -\mu x^2 + c \text{ [ যেখানে } c \text{ একটি সমাকল ধ্রুবক ]} \quad \cdots \quad (2)$$

এখন আলোচ্য ক্ষেত্রে সরল সমঞ্জস গতির বিস্তার $a$ এবং কণাটি যেন মধ্যক অবস্থান হইতে $a$ একক দূরস্থিত বিন্দু হইতে যাত্রা শুরু করে। তাহা হইলে যাত্রা-মুহূর্তে $t = 0$, $x = a$, এবং $\frac{dx}{dt} = 0$.

অতএব (2) হইতে দেখা যায়, $0 = -\mu a^2 + c$ বা $c = \mu a^2$ $\cdots$ (3)

$\therefore$ (2) ও (3) হইতে $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -\mu x^2 + \mu a^2 = \mu(a^2 - x^2)$ $\cdots$ (4)

$\therefore$ $\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\mu(a^2 - x^2)}$ $\cdots$ $\cdots$ (5)

আবার (5) হইতে দেখা যায়, $\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \pm\sqrt{\mu}\, dt.$

$\therefore$ উভয়পক্ষের $t$-সাপেক্ষে সমাকল লইলে,

$\cos^{-1}\frac{x}{a} = \pm\sqrt{\mu}\, t + c'$, যেখানে $c'$ একটি ধ্রুবক।

কিন্তু যখন $t = 0$, তখন $x = a$ বলিয়া

$\cos^{-1}\frac{a}{a} = \pm\sqrt{\mu}.0 + c'$ বা $\cos^{-1}1 = c'$

অর্থাৎ $c' = \cos^{-1}1 = 0$

$\therefore$ $\cos^{-1}\frac{x}{a} = \pm\sqrt{\mu}\, t$

বা $\frac{x}{a} = \cos(\pm\sqrt{\mu}\, t) = \cos(\sqrt{\mu}\, t)$

$\therefore$ $\mathbf{x = a \cos \sqrt{\mu}\, t}$ $\cdots$ $\cdots$ (6)

স্পষ্টত, **(6) নং সমীকরণ সরল সমঞ্জস গতির অধীন বস্তুকণার সঞ্চার-পথের সমীকরণ।**

আবার, $x=a\cos\sqrt{\mu}\,t$-এর উভয়পক্ষকে $t$-সাপেক্ষে অবকলন করিলে দেখা যায়,

$$\frac{dx}{dt}=-a\sqrt{\mu}\sin\sqrt{\mu}\,t \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (7)$$

অর্থাৎ $t$ সময়ের মাথায় বেগ $\frac{dx}{dt}=-a\sqrt{\mu}\sin\sqrt{\mu}\,t.$

এইবার উল্লিখিত সমীকরণগুলি বিশ্লেষণ করিলে নিম্নলিখিত সিদ্ধান্তগুলি পাওয়া যায়ঃ

(i) $t$-এর মান যাহাই হউক না কেন $\cos\sqrt{\mu}\,t$-এর মান সর্বদা $-1$ ও 1-এর মধ্যবর্তী থাকিবেই। সুতরাং (6)-নং সমীকরণে $\cos\sqrt{\mu}\,t$-এর সর্বাধিক মান $=1$ বসাইলে সর্বাধিক সরণ হয়, $x=a\cos\sqrt{\mu}\,t=a.1=a$

(ii) যখন $x=a$, অর্থাৎ সরল সমঞ্জস গতির অধীন কণাটি যখন মধ্যক অবস্থান হইতে ডানদিকের প্রান্তে সর্বাধিক দূরত্বে অবস্থিত হয়, তখন

(1) নং সমীকরণ অনুসারে কণাটির ত্বরণ $\frac{d^2x}{dt^2}=-\mu a$ ;

(4) নং সমীকরণ অনুসারে উহার বেগ $\frac{dx}{dt}=+\sqrt{\mu(a^2-a^2)}=0$

(iii) $x=0$ বিন্দুতে অর্থাৎ মধ্যক অবস্থানে কণাটির

ত্বরণ $\frac{d^2x}{dt^2}=-\mu x=-\mu.0=0$ ;

বেগ $\frac{dx}{dt}=\pm\sqrt{\mu(a^2-0)}=\pm a\sqrt{\mu}$ এবং সরণ $x=0.$

(iv) $x=-a$ বিন্দুতে, অর্থাৎ মধ্যক অবস্থান হইতে বামদিকের প্রান্তে সর্বাধিক দূরস্থিত অবস্থানে কণাটির

ত্বরণ $\frac{d^2x}{dt^2}=-\mu x=-\mu(-a)=\mu a$ ;

বেগ $\frac{dx}{dt}=\pm\sqrt{\mu(a^2-x^2)}=\pm\sqrt{\mu\{a^2-(-a)^2\}}=\pm\sqrt{\mu(a^2-a^2)}$

$$=0;$$

এবং সরণ $x=-a.$

(v) পূর্ববর্তী তিনটি সিদ্ধান্ত হইতে দেখা যায়,

(a) $x=a$ বিন্দু হইতে ঋণাত্মক ত্বরণ বৃদ্ধি পাইতে পাইতে $x=0$ বিন্দুতে অর্থাৎ মধ্যক অবস্থানে আসিয়া শূন্যে পরিণত হয়।

ঐ মধ্যক অবস্থান অর্থাৎ $x=0$ হইতে, বামদিকে $x=-a$ বিন্দুর অভিমুখে কণাটি চলিতে শুরু করা মাত্র ত্বরণের অভিমুখ বদলাইয়া যায় অর্থাৎ উহা তখন ধনাত্মক হইয়া যায় এবং $x=-a$ বিন্দুতে এই ত্বরণের সর্বাধিক মান হয় $\mu a$. ইহা হইতে স্পষ্ট হয় যে, সরল সমঞ্জস গতির অধীন বস্তুকণার ত্বরণ সর্বদা মধ্যক অবস্থানের অভিমুখী থাকে। দ্বিতীয়ত কণাটির গতিপথের দক্ষিণ প্রান্তে এই ত্বরণের মান লঘিষ্ঠ ও ঋণাত্মক হয় এবং বামপ্রান্তে ঐ ত্বরণ হয় গরিষ্ঠ ও ধনাত্মক।

($b$) আবার গতিপথের দক্ষিণ ও বাম উভয় প্রান্তে অর্থাৎ যখন $x=\pm a$ হয়, তখন বেগ $=0$ হয়। লঘিষ্ঠ অর্থাৎ যে-দুইটি প্রান্তবিন্দুর মধ্যে সরল সমঞ্জস গতিসম্পন্ন একটি বস্তুকণা ইতস্তত সঞ্চরমাণ থাকে, সেই দুইটি প্রান্তবিন্দুতে ঐ কণার বেগ শূন্যে পরিণত হয়।

মধ্যক অবস্থানে কণাটির বেগ সর্বাধিক হইয়া $a\sqrt{\mu}$ পরিমাণ হয়। ডানদিকের প্রান্ত হইতে বেগ ক্রমাগত বাড়িতে বাড়িতে এই মধ্যক অবস্থানে সর্বাধিক হয়। আবার সেই অবস্থান হইতে কমিতে কমিতে ঐ বেগ বামপ্রান্তে গিয়া শূন্যে পরিণত হয়।

(vi) 6নং সমীকরণ অর্থাৎ $x=a\cos\sqrt{\mu}\,t$ হইতে দেখা যায়, গতিপথের দক্ষিণ প্রান্তে যখন $x=a$

তখন $\cos\sqrt{\mu}\,t=1=\cos 0$

$\therefore\quad \sqrt{\mu}\,t=0$ এবং সেই কারণে $t=0$

মধ্যক অবস্থানে, যখন $x=0$, তখন,

$$0=a\cos\sqrt{\mu}\,t \text{ বা } \cos\sqrt{\mu}\,t=0=\cos\frac{\pi}{2},$$

$$\therefore\quad \sqrt{\mu}\,t=\frac{\pi}{2} \text{ বা } t=\frac{\pi}{2\sqrt{\mu}}$$

বামপ্রান্তে যখন $x=-a$ তখন $x=a\cos\sqrt{\mu}\,t$ সূত্রে

$$\cos\sqrt{\mu}\,t=-1=\cos\pi$$

$$\therefore\quad t=\frac{\pi}{\sqrt{\mu}}.$$

তাহা হইলে, যেহেতু ডানদিকের প্রান্ত হইতে মধ্যক অবস্থানে আসিতে $\frac{\pi}{2\sqrt{\mu}}$ সময় লাগে এবং মধ্যক অবস্থান হইতে বামপ্রান্তে যাইতে লাগে $\frac{\pi}{\sqrt{\mu}}-\frac{\pi}{2\sqrt{\mu}}$ $=\frac{\pi}{2\sqrt{\mu}}$ সময়, সেইহেতু ডানদিকের প্রান্ত হইতে বামপ্রান্তে যাইতে মোট সময় লাগিবে $\frac{\pi}{2\sqrt{\mu}}+\frac{\pi}{2\sqrt{\mu}}=\frac{\pi}{\sqrt{\mu}}$ সময়।

অনুরূপে, বামপ্রান্ত হইতে আবার ডানপ্রান্তে যাইতে লাগিবে $\frac{\pi}{\sqrt{\mu}}$ সময়।

∴ ডান হইতে বামপ্রান্ত ঘুরিয়া আবার ডানদিকের প্রান্তে ফিরিয়া আসিতে মোট সময় লাগিবে $\frac{\pi}{\sqrt{\mu}}+\frac{\pi}{\sqrt{\mu}}=\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$ সময়, এইভাবে একটি প্রান্ত হইতে অপরপ্রান্ত ঘুরিয়া প্রথমোক্ত প্রান্তে ঘুরিয়া আসার সময়কে **দোলন কাল** বা **পর্যায় কাল** বলে এবং তাহা T দ্বারা সূচিত হয়।

$$\therefore \text{ পর্যায় কাল } T=\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}.$$

আবার, একক সময়ে সরল সমঞ্জস গতির অধীন কোন বস্তুকণা যদি $n$-সংখ্যক বার সম্পূর্ণ দোলন সম্পন্ন করে, অর্থাৎ একক সময়ে যদি তাহা $n$-সংখ্যক বার উহার গতি-পথের একপ্রান্ত হইতে অপরপ্রান্ত ঘুরিয়া প্রথমোক্ত প্রান্তে ফিরিয়া আসে তবে,

$$nT=1 \text{ বা } n=\frac{1}{T} \text{ হইবে।}$$

এই সূত্রে $n$ সংখ্যাটিকে **কম্পাঙ্ক** বলে।

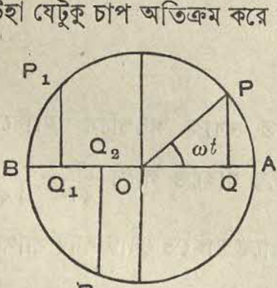
**বিশেষ দ্রষ্টব্য** : (i) সরল সমঞ্জস গতির অবকল-সমীকরণের সাধারণ সমাধান $x=a\cos\sqrt{\mu}\,t$-কে $x=a\cos(\sqrt{\mu}\,t+\alpha)$ আকারে লেখা হয়।

(i) হইতে অবকলন দ্বারা পাওয়া যায়

$$\frac{dx}{dt}=-a\sqrt{\mu}\sin(\sqrt{\mu}\,t+\alpha)$$

## 8·4. সরল সমঞ্জস গতি ও বৃত্তপথে সমহার গতি (S.H.M. and uniform circular motion) :

$APP_1BP_2$ বৃত্তপথে একটি বস্তুকণা যেন সমহারে চলমান। প্রতি সেকেণ্ডে উহা যেটুকু চাপ অতিক্রম করে তাহা যেন বৃত্তটির কেন্দ্রে $\omega$ কোণ উৎপন্ন করে। তাহা হইলে বলা চলে যে, কণাটি $\omega$ কৌণিক সমবেগে সঞ্চরমাণ। $t$ সেকেণ্ডে উহা বৃত্তটির কেন্দ্রে $\omega t$ কোণ উৎপন্ন করিবে।



42নং চিত্র

ধরা যাক, বৃত্তটির ব্যাসার্ধ $=a$. বৃত্তপথে সঞ্চরমাণ কণাটি $A$ হইতে যাত্রা করিয়া $t$ সেকেণ্ডে যেন $P$ বিন্দুতে আসিয়া পৌঁছিয়াছে। তাহা হইলে,

$$\angle AOP=\omega t.$$

এখন, $\overline{AB}$ স্থির ব্যাসটির উপর $P$ হইতে অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দু $Q$-এর গতি বিচার করিলে দেখা যায়, $A$ হইতে বস্তুকণাটি $P, P_1$

প্রভৃতি বিন্দু পরিক্রমণ করিয়া যখন $B$ বিন্দুতে পৌছায়, ঠিক তখন $A$ হইতে যাত্রা শুরু করিয়া $\overrightarrow{AB}$ সরল রেখায় $Q$ বিন্দুটি $B$ বিন্দুতে আসিয়া উপনীত হয়। আবার $B$ হইতে বস্তুকণাটি বৃত্তপথে $P_2$ বিন্দু হইয়া যখন $A$ বিন্দুতে প্রত্যাবর্তন করে তখন $Q$ বিন্দুটিও $B$ হইতে $\overrightarrow{BA}$ পথে চলিতে চলিতে $A$ বিন্দুতে ফিরিয়া আসে। এইভাবে $A$ হইতে $B$ এবং $B$ হইতে $A$ পর্যন্ত সরল রেখায় $Q$ বিন্দু একটি পর্যাবৃত্ত গতি সম্পাদন করে।

এখন বৃত্তটির কেন্দ্র $O$ বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরিলে $OQ=x$ হইবে।

কিন্তু $x=OQ=OP\cos AOP=a\cos\omega t$

অর্থাৎ $x=a\cos\omega t \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dt}=\frac{d}{dx}(a\cos\omega t)=-a\,\omega\sin\omega t \quad \cdots \quad (2)$$

এবং $$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d}{dx}(-a\,\omega\sin\omega t)=-a\,\omega.\omega\cos\omega t$$

$$=-\omega^2 a\cos\omega t=-\omega^2 x,\ [\because (1) \text{ হইতে } a\cos\omega t=x] \cdots (3)$$

(2) হইতে দেখা যায়,

**Q-এর বেগ** $$\frac{dx}{dt}=-a\,\omega\sin\omega t=-a\,\omega\sin AOP$$

$$=-a\,\omega\frac{PQ}{OP}=-a.\,\omega\frac{PQ}{a}=-\omega\sqrt{OP^2-OQ^2}$$

$$=-\omega\sqrt{a^2-x^2}, \qquad [\because \ OP=a]$$

আবার (3) হইতে দেখা যায়,

$Q$-এর ত্বরণ $$f=\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2 x$$

তাহা হইলে যেহেতু $\omega^2$ একটি ধ্রুবকসংখ্যা সূচিত করে সেইহেতু $Q$-এর ত্বরণ $f$ ও সরণ $x$ সমানুপাতিক ; কিন্তু $f$ ও $x$ বিপরীতমুখী বলিয়া মূলবিন্দু $O$ হইতে $A$ অভিমুখে সরণ $x$ যখন ধনাত্মক, তখন ত্বরণ $f$ ঋণাত্মক অর্থাৎ ডানদিক হইতে $O$ অভিমুখে উদ্দিষ্ট। অনুরূপে, $O$ হইতে $B$ অভিমুখে সরণ যখন ঋণাত্মক, তখন $f$ ধনাত্মক অর্থাৎ বামদিক হইতে $O$ অভিমুখে উদ্দিষ্ট।

অতএব সংজ্ঞা অনুসারে $Q$ সরল সমঞ্জস গতিতে সঞ্চরমাণ। আবার যেহেতু $P$ বিন্দু $A$ হইতে $B$ বিন্দু ঘুরিয়া পুনরায় $A$ বিন্দুতে আসিতে $2\pi$ পরিমাণ কোণ $\frac{2\pi}{\omega}$ সেকেণ্ডে অতিক্রম করে, সেইহেতু $Q$ বিন্দুও $\frac{2\pi}{\omega}$ সেকেণ্ডে $A$ হইতে $B$-তে গিয়া আবার $B$ হইতে $A$ বিন্দুতে ফিরিয়া আসে।

$\therefore$ $Q$-এর গতির **পর্যায় কাল** $=\frac{2\pi}{\omega}$.

**বিশেষ দ্রষ্টব্য :** $\frac{d^2x}{dt^2}=-\mu x$-এর সহিত $\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2x$ তুলনা করিলে দেখা যায় $\sqrt{\mu}$-এর স্থলে $\omega$ বসিয়াছে। অনুরূপে, $\sqrt{\mu}$-এর স্থলে $\omega$ বসাইয়া,

$\frac{dx}{dt}=\pm\sqrt{\mu(a^2-x^2)}$ হইতে $\frac{dx}{dt}=\pm\sqrt{\mu}\sqrt{a^2-x^2}=\pm\omega\sqrt{a^2-x^2}$ এবং $T=\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$ হইতে, পর্যায় কাল $T=\frac{2\pi}{\omega}$ পাওয়া যায়। সেই কারণে সরল সমঞ্জস গতির সমীকরণে অনেক সময় $\sqrt{\mu}$-এর বদলে $\omega$ বসানো হয়।

**8·5. সরল দোলক (Simple pendulum) :** সরল সমঞ্জস গতির একটি সুবিদিত উদাহরণ হইল সরল দোলকের গতি।

$C$ বিন্দু হইতে একটি দোলক যেন $l$ একক দীর্ঘ অপ্রসার্য $CQ$ রজ্জু দ্বারা ধৃত। $CO$ উল্লম্বরেখা হইতে $A$-র দিকে সরিয়া অথবা $A$ হইতে $O$-র দিকে অগ্রসর হইবার সময় দোলকটি যেন $Q$ বিন্দুতে অবস্থিত হইয়াছে। এখন $\angle ACQ=\theta$ এবং দোলকটির ভর $m$ হইলে, নিচুদিকে উল্লম্বরেখায় সক্রিয় $mg$ ভারের $CQ$ বরাবর বিশ্লেষিতাংশ $mg\cos\theta$ এবং $Q$ বিন্দুতে $CQ$-র লম্বদিকে বিশ্লেষিতাংশ $mg\sin\theta$.



43নং চিত্র

রজ্জুটির $QC$ বরাবর টান $mg\cos\theta$-র সমান ও বিপরীত। বাকী $mg\sin\theta$ বল দোলকের ত্বরণ উৎপন্ন করিতেছে।

এখন $\theta$ কোণ অত্যন্ত ক্ষুদ্র হইলে $\sin\theta=\theta=\frac{OQ}{l}$ (বৃত্তীয় মান)।

দ্বিতীয়ত, এই ক্ষেত্রে $AQOB$ চাপকে কার্যত একটি সরল রেখা বলিয়া ধরা যাইতে পারে। অতএব, $O$ হইতে $Q$-এর দূরত্ব অর্থাৎ $OQ$ যদি $x$ হয়, তবে $mg\sin\theta=mg\frac{x}{l}=\frac{mg}{l}\cdot x$। তাহা হইলে, $Q$-র উপর সক্রিয় বল তথা উহার ত্বরণ সর্বদা $O$-র দিকে উদ্দিষ্ট এবং ঐ ত্বরণ $O$ হইতে $Q$-র দূরত্ব $x$-এর সমানুপাতিক, কারণ $\frac{mg}{l}$ এইক্ষেত্রে ধ্রুবক। সুতরাং, সংজ্ঞা অনুসারে $Q$ দোলকটির গতি সরল সমঞ্জস গতির পর্যায়ভুক্ত।

এখানে দেখা যায়, $m$ ভরের উপর $\frac{gx}{l}$ ত্বরণ উৎপন্ন হয়। কিন্তু এই ত্বরণ $\overrightarrow{OA}$-এর বিপরীতমুখী অর্থাৎ $\overrightarrow{AO}$ মুখী। অতএব $\overrightarrow{OA}$ মুখে $OQ=x$ বলিয়া,

$\overrightarrow{AO}$-র মুখে $QO=-x$

$\therefore$ $Q$-এর ত্বরণ $\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{gx}{l}=-\omega^2x.$

$\therefore$ $\omega^2=\frac{g}{l}.$

সরল দোলকের দোলন কাল বা পর্যায় কাল $=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$

## উদাহরণমালা

**উদাহরণ 1.** একটি সরল সমঞ্জস গতিসম্পন্ন কণার বেগ প্রতি সেকেণ্ডে 48 ফুট যখন কেন্দ্র হইতে কণাটির সরণ 7 ফুট এবং বেগ প্রতি সেকেণ্ডে 40 ফুট যখন কেন্দ্র হইতে কণাটির সরণ 15 ফুট। ঐ সরল সমঞ্জস গতির বিস্তার ও পর্যায় কাল নির্ণয় কর।

বস্তুকণাটির বেগ $=\omega\sqrt{a^2-x^2}.$

এখানে $48=\omega\sqrt{a^2-7^2}$ বা, $(48)^2=\omega^2(a^2-49)$

এবং $40=\omega\sqrt{a^2-15^2}$ বা, $(40)^2=\omega^2(a^2-225).$

$\therefore$ $\frac{a^2-49}{a^2-225}=\frac{48^2}{40^2}=\frac{36}{25}.$

$\therefore$ $a=25$

$\therefore$ $\omega^2=\frac{48^2}{a^2-49}=\frac{48^2}{25^2-7^2}=\frac{48^2}{32\times18}=4$

$\therefore$ $\omega=2.$

$\therefore$ $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{2}=\pi$

$\therefore$ বিস্তার 25 ফুট এবং পর্যায় কাল $\pi$ সেকেণ্ড।

**উদাহরণ 2.** একটি বস্তুকণা 6 সে.মি. দীর্ঘ একটি সরল রেখা বরাবর একপ্রান্ত হইতে আরেকপ্রান্তে সরল সমঞ্জস গতিতে চলাচল করে। ঐ সরল রেখার মধ্যবিন্দু অতিক্রমণ কালে বস্তুকণাটির বেগ হয় সেকেণ্ডে 12 সে.মি.। বস্তুকণাটির দোলনের পর্যায় কাল নির্ণয় কর।

বস্তুকণাটির দোলনের বিস্তার $=\frac{6}{2}=3$ সে.মি.।

মধ্যক অবস্থানে বস্তুকণাটির বেগ $v = \omega\sqrt{a^2 - x^2}$

$= \omega\sqrt{3^2 - 0}$

$= 3\omega.$

$\therefore \quad 12 = 3\omega \ \therefore \quad \omega = 4.$

স্থতরাং, পর্যায় কাল $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4} = \frac{2 \times 3{\cdot}14}{4} = 1{\cdot}57$ সেকেণ্ড।

**উদাহরণ 3.** সরল সমঞ্জস গতিতে সঞ্চরমাণ একটি বস্তুকণার সর্বাধিক বেগ $= 6$ সে.মি./সে. এবং উহার সরল গতিপথের বামপ্রান্তে ত্বরণ $= 2$ সে.মি./সে.$^2$। কণাটির গতির বিস্তার ও মধ্যক অবস্থান হইতে 9 সে.মি. দূরস্থিত বিন্দুতে বেগ নির্ণয় কর।

বস্তুকণাটির গতির বিস্তার যেন $a$ সে.মি.

এখন, সরল সমঞ্জস গতির অধীন বস্তুকণার সর্বাধিক বেগ $= \omega a$ বলিয়া,

এক্ষেত্রে, $\omega a = 6 \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$

আবার, সরল সমঞ্জস গতির বেলায় গতিপথের বামপ্রান্তেই ত্বরণ সর্বাধিক এবং তাহা $\omega^2 a$ হয় বলিয়া, এখানে,

$$\omega^2 a = 2 \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

$\therefore$ (1) ও (2) হইতে, $\omega = \frac{\omega^2 a}{\omega a} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$\therefore \quad \omega a = \frac{1}{3}.a = 6$

বা $\quad a = 18$

$\therefore$ নির্ণেয় বিস্তার $= 18$ সে.মি.।

আবার, বেগ $= \omega\sqrt{a^2 - x^2}$ স্থত্রে, $\omega = \frac{1}{3}$, $a = 18$ এবং $x = 9$ বসাইলে মধ্যক অবস্থান হইতে 9 সে.মি. দূরস্থিত বিন্দুতে বেগ হইবে

$$= \tfrac{1}{3}\sqrt{18^2 - 9^2} = \tfrac{1}{3}\sqrt{27.9} = \tfrac{1}{3}.9\sqrt{3} = 3\sqrt{3}.$$

$\therefore$ নির্ণেয় বেগ $= 3\sqrt{3}$ সে.মি./সে.।

**উদাহরণ 4.** সরল সমঞ্জস গতিতে একটি বস্তুকণা মূলবিন্দু হইতে 1 সে.মি. দূর হইতে 1 সে.মি./সে. বেগে যাত্রা শুরু করে। উহার পর্যায় কাল যদি $4\frac{5}{7}$ সে. হয়, তবে কণাটির গতির বিস্তার, সর্বাধিক বেগ ও গরিষ্ঠ ত্বরণ নির্ণয় কর।

এখানে মূলবিন্দুকে মধ্যক অবস্থান ধরা হইল।

তাহা হইলে, $x = a\cos(\sqrt{\mu}\, t + \alpha). \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$

(1) হইতে অবকলন দ্বারা পাওয়া যায়,

$$\frac{dx}{dt} = -a\sqrt{\mu}\sin(\sqrt{\mu}\,t+\alpha). \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

প্রশ্নানুসারে, পর্যায় কাল $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} = 4\frac{5}{7} = \frac{33}{7}$ বলিয়া,

$$\sqrt{\mu} = \frac{2\pi}{\frac{33}{7}} = \frac{2.22}{\frac{7\times 33}{7}} = \frac{4}{3} \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$$

যখন $x=1$, তখন $t=0$ এবং বেগ $\frac{dx}{dt}=1$ বলিয়া,

(1) হইতে, $1 = a\cos(\sqrt{\mu}.0+\alpha) = a\cos\alpha \quad \cdots \quad \cdots \quad (4)$

এবং (2) হইতে, $1 = -a\sqrt{\mu}\sin(\sqrt{\mu}.0+\alpha) = -a\sqrt{\mu}\sin\alpha$

বা $\frac{1}{\sqrt{\mu}} = -a\sin\alpha \quad \cdots \quad \cdots \quad (5)$

$\therefore$ (4) ও (5)-এর বর্গের সমষ্টি লইয়া

$$a^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha = 1^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{\mu}}\right)^2$$

বা, $a^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{\frac{4}{3}}\right)^2 = 1^2 + \frac{3^2}{4^2} = \frac{16+9}{16} = \frac{25}{16}.$

$\therefore \quad a = \frac{5}{4}.$

$\therefore$ নির্ণেয় (i) বিস্তার $= \frac{5}{4}$ সে.মি.

(ii) সর্বাধিক বেগ $= a\sqrt{\mu} = \frac{5}{4}\times\frac{4}{3} = \frac{5}{3}$ সে.মি./সে.

এবং (iii) গরিষ্ঠ ত্বরণ $= \mu a = \frac{4^2}{3^2}\cdot\frac{5}{4} = \frac{20}{9}$ সে.মি./সে.$^2$।



**উদাহরণ 5.** সরল রেখায় চলমান একটি বস্তুকণার বেগ $v$ ও সরণ $x$ যদি এমন হয় যে, $v^2 = -x^2+x+12$, তবে দেখাও যে, কণাটি সরল সমঞ্জস গতির অধীন। উহার গতির (i) মধ্যক অবস্থান, (ii) বিস্তার ও (iii) পর্যায় কাল নির্ণয় কর।

$v^2 = -x^2+x+12$ হইতে অবকলন দ্বারা পাওয়া যায়,

$$2v\frac{dv}{dx} = -2x+1$$

বা $2\frac{d^2x}{dt^2} = -2x+1, \quad \left[\because \; v\frac{dv}{dx} = \frac{d^2x}{dt^2}\right]$

বা $\frac{d^2x}{dt^2} = -(x-\frac{1}{2}) \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$

এখন $x-\frac{1}{2}=y$ ধরিলে,

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dt};$$

এবং $\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d^2y}{dt^2}$.

$\therefore$ (1) হইতে দেখা যায়,

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-y \qquad \cdots \qquad \cdots \quad (2)$$

স্পষ্টত, $\frac{d^2y}{dt^2}$ দ্বারা সূচিত ত্বরণ $=-y$. এখানে ত্বরণ সরণ $y$-এর সমানুপাতিক ও বিপরীতমুখী বলিয়া বস্তুকণাটি সরল সমঞ্জস গতির অধীন।

আবার, (i) সরল সমঞ্জস গতির বেলায় ত্বরণ মধ্যক অবস্থানে শূন্য হয়।

এখন ত্বরণ $\frac{d^2y}{dt^2}=0$ হইলে, $y=0$ হইবে।

অর্থাৎ $y=x-\frac{1}{2}=0$,

বা $x=\frac{1}{2}$. অর্থাৎ $x=\frac{1}{2}$ অবস্থানে কণাটির ত্বরণ শূন্য হইবে।

$\therefore$ কণাটির গতির মধ্যক অবস্থান $x=\frac{1}{2}$ বিন্দুতে স্থাপিত।

(ii) সরল সমঞ্জস গতির বেলায় গতিপথের দুইপ্রান্তে বেগ শূন্য হয় বলিয়া, প্রান্তবিন্দু-দুইটির বেগ বিচারে,

$$-x^2+x+12=v^2=0$$

বা $$x^2-x-12=(x-4)(x+3)=0$$

$\therefore$ $x=4$ বা $-3$.

$\therefore$ মূলবিন্দু হইতে দক্ষিণ প্রান্তের দূরত্ব $=4$ একক, অতএব মধ্যক অবস্থান হইতে ঐ প্রান্তের দূরত্ব $=(4-\frac{1}{2})=3{\cdot}5$ একক।

সুতরাং কণাটির গতির বিস্তার $=3{\cdot}5$.

(iii) যেহেতু (2)-এর সমীকরণটি $\frac{d^2y}{dt^2}=-\mu y$ আকারের, উহাতে $\mu=1$.

$\therefore$ কণাটির গতির পর্যায় কাল $T=\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}=\frac{2\pi}{\sqrt{1}}=2\pi$.

**উদাহরণ 6.** 80 সে.মি. দীর্ঘ একটি সরল দোলক 4 সে.মি. বিস্তার-সহ দোলায়মান। দোলকের পিণ্ডটি যখন মধ্যক অবস্থান অতিক্রম করে, তখন উহার বেগ কত?

সরল দোলকের দোলন কাল $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$,

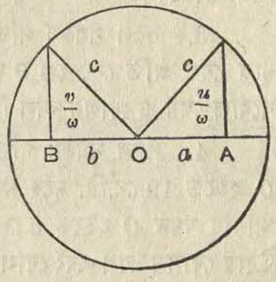
$$\therefore\quad \omega=\frac{2\pi}{T}=\sqrt{\frac{g}{l}}$$

$g=980$ সে.মি. প্রতি সেকেণ্ড$^2$ এবং $l=80$ সে.মি. বসাইয়া পাওয়া যায়, $\omega=\frac{7}{2}$.

মধ্যক অবস্থানে দোলকের পিণ্ডের সরণ শূন্য। সুতরাং তখন পিণ্ডের বেগ

$$v=\sqrt{a^2-x^2}=a\omega=4\times\tfrac{7}{2}=14 \text{ সে.মি. প্রতি সেকেণ্ড।}$$

**উদাহরণ 7.** একটি বস্তুকণা সরল সমঞ্জস গতিসম্পন্ন। যে-অবস্থানে বস্তুকণাটির ত্বরণ শূন্য, সেই অবস্থান হইতে বস্তুকণাটির দূরত্ব যখন $a$ ও $b$, তখন উহার বেগ যথাক্রমে $u$ ও $v$ ; ঐ সরল সমঞ্জস গতির বিস্তার ও সর্বোচ্চ বেগ নির্ণয় কর।




44নং চিত্র

গতিপথের কেন্দ্র $O$ বিন্দুতেই বস্তুকণাটির ত্বরণ হইবে শূন্য। ধরা যাক, $c$ হইল বিস্তার এবং $\omega$, কৌণিক বেগ। তাহা হইলে, সরল সমঞ্জস গতিসম্পন্ন বস্তুকণার গতিকে $O$ কেন্দ্র এবং $c$ ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তপথে সমহার কৌণিক বেগ $\omega$ সহ গতির লম্ব-অভিক্ষেপ হিসাবে মনে করা যাইতে পারে এবং যে-কোন বিন্দুতে বেগ ঐ বিন্দুর কোটির $\omega$ গুণ হইবে। ধরা গেল, $OA=a$ এবং $OB=b$ ; তাহা হইলে $A$ ও $B$ বিন্দুর কোটি যথাক্রমে $\frac{u}{\omega}$ এবং $\frac{v}{\omega}$. সুতরাং,

$$c^2=a^2+\left(\frac{u}{\omega}\right)^2=b^2+\left(\frac{v}{\omega}\right)^2$$

$$\therefore\quad \frac{u^2-v^2}{\omega^2}=b^2-a^2$$

বা $$\frac{1}{\omega^2}=\frac{b^2-a^2}{u^2-v^2};$$

$$\therefore\quad c^2=a^2+\frac{u^2}{\omega^2}=a^2+\frac{u^2(b^2-a^2)}{u^2-v^2}$$

$$=\frac{a^2u^2-a^2v^2+b^2u^2-a^2u^2}{u^2-v^2}$$

$$=\frac{b^2u^2-a^2v^2}{u^2-v^2}$$

সর্বোচ্চ বেগ $V=c\omega$

$$\therefore\quad V^2=c^2\omega^2=\frac{b^2u^2-a^2v^2}{b^2-a^2}.$$

## প্রশ্নমালা 9

1. সরল সমঞ্জস গতিসম্পন্ন একটি বস্তুকণা উহার দোলনকেন্দ্র হইতে 20 ফুট দূরত্বে স্থির অবস্থান হইতে যাত্রা শুরু করে। উহার পর্যায় কাল $4\pi$ সেকেণ্ডে হইলে, প্রথম অবস্থানে উহার ত্বরণ এবং কেন্দ্র হইতে 12 ফুট দূরত্বে উহার বেগ কত ?

2. সরল সমঞ্জস গতি সম্পাদনকারী 4 পাউণ্ড ভরের একটি বস্তুকণা যখন দোলনকেন্দ্র হইতে 3 ফুট ও 4 ফুট দূরে থাকে, তখন উহার গতিবেগ হয় যথাক্রমে সেকেণ্ডে 8 ফুট এবং সেকেণ্ডে 6 ফুট। উহার দোলন কাল এবং বিস্তার নির্ণয় কর।

কেন্দ্র হইতে বস্তুকণাটি যখন 1 ফুট দূরে থাকিবে, তখন উহার উপর কত বল ক্রিয়া করিবে ?

3. সরল সমঞ্জস গতিতে চলমান একটি বস্তুকণার দোলনকেন্দ্র হইতে 3 ফুট দূরে বেগ প্রতি সেকেণ্ডে 8 ফুট এবং 4 ফুট দূরত্বে বেগ প্রতি সেকেণ্ডে 6 ফুট। উহার সর্বোচ্চ বেগ ও দোলন কাল নির্ণয় কর।

4. সরল সমঞ্জস গতিসম্পন্ন একটি বস্তুকণার দোলনকেন্দ্র $O$. বকস্তুণাটি যখন $O$ হইতে 12 সে.মি. দূরে থাকে তখন উহার গতিবেগ হয় প্রতি সেকেণ্ডে 10 সে.মি.। আবার যখন $O$ হইতে 5 সে.মি. দূরে থাকে তখন বেগ হয় প্রতি সেকেণ্ডে 24 সে.মি.। উহার দোলন কাল এবং দোলনের বিস্তার নির্ণয় কর।

5. সরল সমঞ্জস গতি সম্পাদনকারী একটি বস্তুকণা দোলনকেন্দ্র হইতে 14 ফুট দূরবর্তী একটি বিন্দু হইতে যাত্রা শুরু করে। বস্তুকণাটির সর্বাধিক বেগ প্রতি সেকেণ্ডে 22 ফুট হইলে বস্তুকণাটির পর্যায় কাল নির্ণয় কর।

6. সরল সমঞ্জস গতিসম্পন্ন একটি বস্তুকণার বিস্তার 12 সে.মি. এবং পর্যায় কাল 2 সেকেণ্ড। স্থির অবস্থান হইতে 6 সে.মি. যাইতে বস্তুকণাটির কতটা সময় লাগিবে ?

7. 250 গ্রাম ভরবিশিষ্ট সরল সমঞ্জস গতিবিশিষ্ট একটি বস্তুকণার অবস্থান যখন দোলনকেন্দ্র হইতে যথাক্রমে 75 সে.মি. এবং 90 সে.মি., তখন উহার বেগ যথাক্রমে সেকেণ্ডে 150 সে.মি. এবং সেকেণ্ডে 120 সে.মি.। উহার পর্যায় কাল এবং বিস্তার নির্ণয় কর।

8. সরল সমঞ্জস গতি সম্পাদনকারী একটি বস্তুকণার বিস্তার 20 সে.মি. এবং পর্যায় কাল 25 সেকেণ্ডে। 30 সেকেণ্ড পরে বস্তুকণাটির সরণ এবং বেগ কত হইবে ?

9. সরল সমঞ্জস গতিসম্পন্ন 2 কিলোগ্রাম ভরের একটি বস্তুর বিস্তার 10 সে.মি. এবং পর্যায় কাল 3·14 সেকেণ্ড। মধ্যক অবস্থানে, চরম অবস্থানে এবং মধ্যক অবস্থান হইতে 8 সে.মি. দূরবর্তী কোন এক অবস্থানে বস্তুটির ত্বরণ এবং বেগ নির্ণয় কর।

10. একটি বস্তুকণা সরল রেখায় সরল সমঞ্জস গতি সম্পাদন করে। উহার সর্বোচ্চ বেগ $V$ এবং দোলন কাল $T$ হইলে উহার দোলনের বিস্তার এবং সর্বোচ্চ ত্বরণ কত

নির্ণয় কর। বস্তুকণাটি যখন সর্বোচ্চ ত্বরণের অবস্থানে থাকিবে, তখন উহার বেগ কত হইবে?

11. সরল রেখায় সঞ্চরমাণ একটি বস্তুকণার বেগ $v$ ও সরণ $x$-এর সম্পর্ক যদি $v^2 = 45 - 6x - 3x^2$ হয়, তবে (i) প্রমাণ কর যে, কণাটি সরল সমঞ্জস গতির অধীন। কণাটির গতির (ii) মধ্যক অবস্থান (iii) বিস্তার ও (iv) পর্যায় কাল নির্ণয় কর।

12. সরল রেখায় সঞ্চরমাণ কোন বস্তুকণার বেগ ও সরণের সম্পর্ক $v^2 = 72 - 12x - 4x^2$ হইলে, (i) দেখাও যে, কণাটি সরল সমঞ্জস গতির অধীন। ঐ কণার (ii) গতিপথের মধ্যক অবস্থান, (iii) গতির বিস্তার ও (iv) পর্যায় কাল কত?

13. সরল সমঞ্জস গতি-সম্পাদনকারী একটি বস্তুকণার দোলনকেন্দ্র হইতে $l_1$ ও $l_2$ দূরত্বে বেগ যথাক্রমে $v_1$ ও $v_2$. দেখাও যে, উহার দোলন কাল $T$ হইলে,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l_1^2 - l_2^2}{v_2^2 - v_1^2}}.$$

14. সরল রেখায় সরল সমঞ্জস গতি-সম্পাদনকারী একটি বস্তুকণার দুইটি অবস্থানে বেগ যথাক্রমে $v_1$ ও $v_2$ এবং ত্বরণ যথাক্রমে $f_1$ ও $f_2$. ঐ দুই অবস্থানের দূরত্ব $d$ হইলে, দেখাও যে,

$$d = \frac{v_1^2 - v_2^2}{f_1 + f_2}.$$

# বলবিদ্যা (Mechanics)

## দ্বিতীয়াংশ : স্থিতিবিদ্যা (Statics)

# নবম অধ্যায়

## বল (Force)

**9·1. স্থিতিবিদ্যা (Statics) :** বলবিদ্যার যে-শাখায় বলাক্রান্ত বস্তুর স্থির অবস্থার আলোচনা হয়, সেই শাখাকে **স্থিতিবিদ্যা** বলে।

**9·2. বলের প্রকার (Different kinds of forces) :** বল মোটামুটি-ভাবে দুই শ্রেণীর। এক ধরনের বল আছে যাহাদের কাজ হইল গতি সঞ্চার করা। উহারা **সক্রিয় বল**। সচল বস্তুর টান বা ঠেলা, পতনশীল বস্তুর ভার, চুম্বক প্রভৃতির আকর্ষণ বা বিকর্ষণ—এই শ্রেণীর বল। গতিশীল বস্তুর মধ্যেই ইহাদের অস্তিত্ব। অথবা ইহারাই স্থিরবস্তুতে গতি সঞ্চার করে বা গতিশীল বস্তুর গতি পরিবর্তন করিয়া থাকে। আর এক শ্রেণীর বল আছে যাহারা কখনও এমন প্রত্যক্ষভাবে গতি উৎপাদন করে না। তাহারা কেবল গতিকে রোধ বা পরিবর্তন করিতে সমর্থ। বাধা, ঘর্ষণ প্রভৃতি এই শ্রেণীর বল। টেবিলের উপর একখানা বই রাখিলে, বইয়ের ভার বইটিকে নিচুদিকে গতি দিতে চায়, কিন্তু টেবিলের বাধা তাহাকে রুদ্ধ করিয়া রাখে। তেমনি ছাদ হইতে ঝুলানো আলোটির ভার নিচুদিকে গতি উৎপাদন করিতে সচেষ্ট, কিন্তু উপরদিকে একটা তারের টান তাহাকে বাধা দিতেছে। তৃতীয়ত, মাটির উপর একটি বস্তু গড়াইয়া দিলে মাটির ঘর্ষণ প্রথমে বস্তুটির গতি হ্রাস করিবে, শেষপর্যন্ত ঘর্ষণ-জনিত বাধা সেই গতিকে একেবারে রোধ করিয়া দিবে। তাহা হইলে এই ধরনের বাধা, টান বা ঘর্ষণ প্রভৃতি ক্রিয়ার প্রতিক্রিয়া হিসাবেই দেখা দেয়। এমনিতে তাহাদের কোন সক্রিয় অস্তিত্ব নাই। উহাদিগকে **নিষ্ক্রিয় শ্রেণীর বল**রূপে অভিহিত করা যায়। প্রধানত এই শ্রেণীর বলের আলোচনাই স্থিতিবিদ্যার বিষয়।

**9·3. বলের মাপ (Measurement of forces) :** এপর্যন্ত $P=mf$ সূত্রের সাহায্যেই বলের মাপ নির্ণয় করা হইয়াছে। এই সূত্র কেবল গতিশীল বস্তুর উপর সক্রিয় বলের ক্ষেত্রেই খাটে। যেখানে নির্দিষ্ট একটা ভরে, নির্দিষ্ট একটা ত্বরণ উৎপন্ন হইতেছে, সেইখানেই মাত্র এইভাবে কত বল কাজ করিতেছে তাহা বাহির করা যায়। কিন্তু ত্বরণই যেখানে নাই সেখানে তো এই উপায়ে বলের মান নির্ণয় করা চলিবে না। অথচ বলাক্রান্ত স্থিরবস্তুর বেলায়—বিশেষ করিয়া নিষ্ক্রিয় বলের ক্ষেত্রে—এমন সমস্যা সর্বত্রই রহিয়াছে। সেখানে বল মাপিবার একমাত্র উপায় হইল ভার-নির্ণয়। স্থিতিবিদ্যায় ভারের দ্বারাই বলের পরিমাপ হইয়া থাকে।

**স্থিতীয় বা মহাকর্ষজ মান (Statical or gravitational measure) :** ভাবিয়া দেখ, টেবিলের উপর বইখানিতে কত বলে টেবিলের বাধা রুদ্ধ করিয়া দিতেছে

তাহা আমরা বলিতে পারি। কেমন করিয়া? বইখানির ভার দিয়া। এখন ভার মাপিবার ব্যবস্থাটাই বিচার কর-না কেন। দাঁড়িপাল্লার একদিকে জানা একটা ভার রাখিয়া অপরদিকে অজানা একটা ভরের ওজন নির্ণয় করা হয়। একদিকের ভার যেই নিচের দিকে গতিসঞ্চার করিতে উদ্যত, অন্যদিকের ভার অমনি তাহাকে রুদ্ধ করিয়া দিতেছে। ফলে ভারসাম্য স্থাপিত হইল। দুইটি স্থিরবস্তুর একটির ওজন দ্বারা অপরটির ওজন জানা গেল। আবার টানের বেলাতেও স্প্রিং-তুলার উদাহরণটি বিচার কর। ইহার নিচেকার কড়াটি ধরিয়া টানিলেও সূচকটি বলের পরিমাণ নির্দেশ করিবে। জানা ভার দিয়াই স্প্রিং-তুলার স্কেল তৈয়ারি। তাহা হইলে এক্ষেত্রেও অর্থাৎ টানের বেলাতেও ভারের তুলনায় বল মাপা যাইতে পারে। বাকি রহিল ঠেলার বেলায় বল। একরকম যন্ত্র আছে যাহার উপর উঠিয়া দাঁড়াইলে ওজন মাপা যায়। এই ধরনের যন্ত্রে চাপ বা ঠেলাও মাপা যাইতে পারে। এখানেও কিন্তু ভারের তুলনাতেই মান বাহির হয়।

সুতরাং ভারের তুলনাতেও বলের মাপ হইতে পারে এবং স্থিতিবিদ্যায়, যেখানে ত্বরণের সংস্রব নাই, সেখানে ইহাই মাপের একমাত্র উপায়। সেইজন্য এই পদ্ধতিকে **স্থিতীয় মাপ** (*Statical measure*) বলা হয়।

**মহাকর্ষ ও মহাকর্ষজ মান:** ভার বস্তুটি আবার মহাকর্ষের সহিত সম্পর্কিত। অভিকর্ষ মহাকর্ষের বিশেষ উদাহরণ। মহাকর্ষের সাধারণ নিয়মটি হইল এই যে, বস্তুমাত্রই অপর বস্তুকে আকর্ষণ করে। দুইটি বস্তু তাহাদের ভরের গুণফলের সমানুপাতে এবং দূরত্বের বর্গের ব্যস্ত-অনুপাতে পরস্পর পরস্পরকে আকর্ষণ করে। $m_1$ ও $m_2$ উহাদের ভর এবং $d$ যদি উহাদের দূরত্ব হয়, তবে তাহারা $\frac{Gm_1m_2}{d^2}$ বলে পরস্পরকে আকর্ষণ করে; $G$ এখানে ধ্রুবক। ছোটখাটো বস্তুদ্বয়ের মধ্যে এই বল নেহাতই সামান্য, কাজেই তাহা ধর্তব্যের মধ্যে আসে না। উদাহরণস্বরূপ, পাশাপাশি রেলগাড়ীর বেশ বড় দুইটি ইঞ্জিনের মধ্যে এই মহাকর্ষজ বলের পরিমাণ হয় এক আউন্স-ভারের কাছাকাছি, কিন্তু পৃথিবী ও ক্ষুদ্র একটি বস্তুর মধ্যে মহাকর্ষজ বল এত ক্ষুদ্র নয়। কারণ পৃথিবীর ভর বিপুল। আবার একই বল যদি খুব বড় ও বেশ ছোট—এই দুইটি ভরের উপর স্বতন্ত্রভাবে কাজ করে, তবে বড় ভরটিতে ত্বরণ হইবে কম, কিন্তু ছোট ভরটির ত্বরণ তুলনায় অনেক বেশী হইবে। এই কারণে পৃথিবী ও অন্য যে-কোন বস্তুর মধ্যে মহাকর্ষের বলে বস্তুটি পৃথিবীর দিকেই আকৃষ্ট হয়। বস্তুটি যে-বলে এইভাবে আকৃষ্ট হয়, তাহাই **অভিকর্ষজ বল**। সুতরাং **অভিকর্ষজ বল মহাকর্ষজ বলের বিশেষ উদাহরণ, আর বস্তুর ভার যেহেতু অভিকর্ষজ অর্থাৎ মহাকর্ষজ বলের উপর নির্ভরশীল, সেইহেতু ভারকে ভিত্তি করিয়া মাপের যে-পদ্ধতি তাহাকে অন্তিম বিচারে মহাকর্ষজ পদ্ধতিও বলা চলে।** এই কারণে স্থিতীয় মানকে **মহাকর্ষজ** (*Gravitational*) **মান** বলা হয়। **এফ.-পি.-এস্. পদ্ধতিতে**

**এক পাউণ্ড-ভার এবং সি.-জি.-এস্. পদ্ধতিতে এক গ্রাম-ভার দ্বিতীয় মানের বলের একক।** সাধারণত, এই এককগুলির উল্লেখের সময় 'এক পাউণ্ড' ও 'এক গ্রাম', এইরূপই বলা হয়। ভার কথাটির উল্লেখ থাকে না।

**9·4. সমান বল ও বলসাম্য (Equal forces and equilibrium of forces) :** গতিবিদ্যার বিচারে দুইটি সমান বল বলিতে এমন দুইটি বল বুঝায় যাহাদের প্রত্যেকে সমান সমান ভরের উপর সক্রিয় থাকিলে সমান সমান ত্বরণ উৎপন্ন হয়। স্থিতিবিদ্যার বিচারে,—**বিপরীতমুখী দুইটি বলের ক্রিয়া সত্ত্বেও যদি একটি বস্তুকণা স্থির থাকে, তবে ঐ বল-দুইটিকে সমান বলা হয়।**

বলা বাহুল্য, উল্লিখিত সংজ্ঞা-দুইটির মধ্যে বিরোধ কিছুই নাই। একই বস্তুকণার উপর বিপরীতমুখে যখন দুইটি বল ক্রিয়া করে, তখন প্রত্যেকে নিজ নিজ দিকে ত্বরণ-উৎপাদনের চেষ্টা করিতেছে। কিন্তু এই চেষ্টা বিপরীতমুখী বলিয়া, একে অন্যকে রোধ করিয়া দিতেছে। কাজেই বস্তুকণাটির মধ্যে কোন গতির সঞ্চার হইতেছে না। বিপরীতমুখী সমান বলের ক্রিয়ায় বস্তুকণাটি এইজন্যই স্থির রহিয়াছে।

এখন, দুইটি সমান বলের বিপরীতমুখী ক্রিয়ায় তো বটেই, দুইয়ের অধিক বলের ক্রিয়াতেও বস্তুবিশেষ স্থির থাকিতে পারে। এইরূপে,

দুই বা ততোধিক বলের অধীন একটি বস্তু যদি স্থির থাকে, তবে **বলসাম্য** (*equilibrium*) প্রতিষ্ঠিত হয়। এইরূপ ক্ষেত্রে বলগুলিকে **সাম্যাবস্থাপন্ন** বলা হয়।

দুই বা ততোধিক বলের অধীন বস্তু সমবেগে থাকিলেও বলসাম্য হয়। কারণ, এইরূপ ক্ষেত্রেও বলগুলি পরস্পরকে রোধ করিয়া রাখে। কিন্তু স্থিতিবিদ্যায় এইরূপ বলসাম্যের আলোচনা হয় না।

**9·5. ভেক্টর রাশি হিসাবে বল (Force as a vector quantity) :** (*a*) বলের প্রকৃতি বা ধর্ম বিশ্লেষণ করিলে দেখা যায় যে, উহার (i) দিক্, (ii) মান ও (iii) প্রয়োগ-বিন্দু—এই তিনটি বিশেষত্ব রহিয়াছে। এখন, যে-রাশির দিক্ ও মান উভয়ই আছে তাহাই **ভেক্টর।** বলেরও দিক্ এবং মান আছে, কাজেই উহা একটি ভেক্টর রাশি।

**ক্রিয়ারেখা (Line of action) :** অন্যান্য ভেক্টরের তুলনায় ইহার আবার একটা উল্লেখযোগ্য বিশেষত্বও আছে। বেগ বা ত্বরণের ন্যায় ভেক্টরের কেবল দিক্ ও মানই আছে, বলের কিন্তু দিক্ ও মানের সঙ্গে নির্দিষ্ট একটা ক্রিয়ারেখা আছে। কোন বস্তুর উপর একটি বল ক্রিয়া করে বলিলে এইটাই বুঝায় যে, ঐ বস্তুর একটা নির্দিষ্ট কণার উপর নির্দিষ্ট রেখায় ঐ বল প্রযুক্ত হইয়াছে। ঐ কণা হইতে বলটির ক্রিয়ামুখ যে-নির্দিষ্ট

সরল রেখায় বিস্তারিত, তাহাকেই উহার **ক্রিয়ারেখা** (*line of action*) বলে। বেগ বা ত্বরণের বেলায় দিক্‌টাই নির্দিষ্ট, কিন্তু রেখাটা এমন নির্দিষ্ট বলিয়া ধরা হয় না। একই দিকে অর্থাৎ সমান্তরাল ও সমান মানের যে-কোন রেখা একটা বেগকে সূচিত করিতে পারে। বলের বেলায় শুধু নির্দিষ্ট মান ও দিক্‌ই নয়, নির্দিষ্ট ক্রিয়ারেখাও সূচিত করিতে হয়। কাজেই বল শুধু ভেক্টরই নয়, **বল নির্দিষ্ট সরল রেখায় ঐকদেশিক** (*localised in a straight line*) **ভেক্টর।**

(*b*) বল যেহেতু ভেক্টর রাশি, সেইহেতু ভেক্টরের নিয়ম অনুসারে দুই বা তাহার চেয়ে বেশীসংখ্যক বলকে একটিমাত্র বলে পরিণত করা যায়। এইরূপ ক্ষেত্রে প্রথমোক্ত বলগুলিকে **উপ-বল** বা **উপাংশ** এবং শেষোক্ত বলটিকে **লব্ধি** বা **ফল** বলা হয়।

এখন, যদি একই বিন্দুতে ঐ লব্ধির সমান ও বিপরীতমুখী অপর একটি বল প্রয়োগ করা যায়, তবে নিশ্চয় বলসাম্য স্থাপিত হইবে।

সুতরাং স্থিতিবিদ্যার দৃষ্টিকোণ হইতে দেখিলে, এইরূপ বলা যায়—

(i) কতকগুলি বলকে যদি একটিমাত্র বলপ্রয়োগে সাম্যাবস্থাপন্ন করা যায়, তবে ঐ একটিমাত্র বলের সমান ও বিপরীতমুখী একটি বলই প্রথমোক্ত বলগুলির **লব্ধি।**

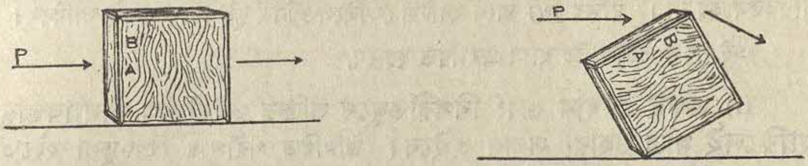
(ii) দ্বিতীয়ত, দুইয়ের অধিক কয়েকটি বল সাম্যাবস্থায় থাকিলে উহাদের যে-কোন একটি অপর বলগুলির লব্ধির সমান ও বিপরীতমুখী।

**9·6. বলের সূচন (Representation of a force) :** গণিতের ভাষায় বল বুঝাইতে হইলে একটা উপযুক্ত সূচক বা সংকেত প্রয়োজন। বলের বিশেষত্ব তিনটি, যথা—(i) দিক্‌, (ii) মান, (iii) প্রয়োগ-বিন্দু।

একটি সরল রেখা দ্বারা এই তিনটি বিশেষত্বকেই সূচিত করা যায়। প্রথমত, সরল রেখা যে-বিন্দু হইতে আরম্ভ হয় সেই বিন্দু অর্থাৎ উহার প্রারম্ভ-বিন্দু দ্বারা বলের প্রয়োগ-বিন্দু বুঝাইতে পারা যায়। দ্বিতীয়ত, উহার দৈর্ঘ্য দ্বারা বলের মান সূচিত হইতে পারে। তৃতীয়ত, প্রারম্ভ-বিন্দু হইতে যে-অভিমুখে রেখাটি বিস্তারিত সেই নির্দিষ্ট অভিমুখ দিয়া বলের দিক্‌ও সূচিত করা চলে। কাজেই অন্যান্য ভেক্টরের ন্যায় বলও একই প্রথায় সরল রেখার দ্বারাই সূচিত হইয়া থাকে।

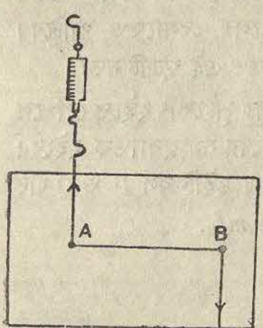
**9·7. প্রয়োগ-বিন্দু (Point of application) :** (i) কোন বস্তুর উপর একটি বল প্রয়োগ করিলে উহা কোথায় ক্রিয়া করে? উহা নিশ্চল বস্তুটির ব্যাপ্ত স্থান জুড়িয়া কাজ করে না। কারণ এইরূপ ধারণা বলের স্বরূপ-কল্পনার বিরোধী। বল সূক্ষ্ম রেখা বরাবর একটি বিন্দু হইতে সক্রিয় হয়। সেইজন্য কোন বস্তুর উপর বলের প্রয়োগ-বিন্দু বলিতে ঐ বস্তুর বিন্দু-পরিমাণ একটি বিশেষ কণাকেই বুঝায়।

(ii) বলের বিচারে এই প্রয়োগ-বিন্দুর গুরুত্ব বিশেষ। একটি উদাহরণ লওয়া যাক। চিত্রে প্রদর্শিত একটি সুষম ঘনকের একপাশে মাঝামাঝি $A$ বিন্দুতে যেন



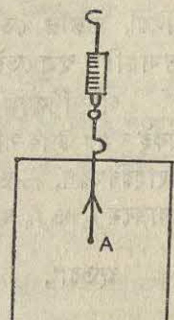

45নং চিত্র

একটি বল $P$ প্রয়োগ করা হইল। সহজেই অনুমান করা যায় যে, ঘনকটি অনুভূমিক তলে $P$ বলের মুখের দিকে সরিতে থাকিবে। আবার ঘনকটির মাথার কাছে $B$ বিন্দুতে যদি আগেকার দিকে $P$ বলটি প্রয়োগ করা যায়, তবে ঘনকটি উল্টাইয়া যাইতে উদ্যত হইবে। সুতরাং বলের মান ও দিক্ এক থাকিলেও, প্রয়োগ-বিন্দুর নড়চড় হইলে, বস্তুর গতি একেবারে বদলাইয়া যাইতে পারে। উল্লিখিত উদাহরণে প্রথম ক্ষেত্রের গতিকে বলা হয় সহজ **চলন,** দ্বিতীয় ক্ষেত্রের গতিকে বলা হয় **ঘূর্ণন**। প্রয়োগ-বিন্দুর উপর এইভাবে বলের ক্রিয়া বহুল পরিমাণে নির্ভর করে।




46($a$) নং চিত্র

**9·8. বলের ক্রিয়া-রেখায় প্রয়োগ-বিন্দুর অবস্থান (Position of the point of application on the line of action of a force) :** এইমাত্র দেখা গেল বলের প্রয়োগ-বিন্দু নড়িলে বলাক্রান্ত বস্তুর গতির ধরন বদলাইয়া যাইতে পারে। কিন্তু সকল সময়ই কি এইরকম হয়? আর একটি উদাহরণ লওয়া যাক।




46($b$) নং চিত্র

46($a$)-চিত্রে প্রদর্শিত একটি ফলকের $A$ বিন্দুতে একটি এবং $B$ বিন্দুতে আর-একটি স্প্রিং-তুলা দড়ির সাহায্যে আটকানো রহিয়াছে। এখন দুই দিক্ হইতে তুলা-দুইটি সমান বলে টানিলে ফলকখানি ঘুরিয়া যখন 46($b$)-চিত্রের অবস্থান গ্রহণ করিল, তখন দুই দিকের টান সমান হয়। দেখা যাইবে, $A$ ও $B$ বিন্দুর সহিত যুক্ত দড়ি-দুইটি একই

সরল রেখায় অবস্থিত। এইবার, $Q$ তুলার মাথার দড়িটিকে যদি $B$ বিন্দুর বদলে $C$ বিন্দুতে ফলকটির সঙ্গে আটকানো হয়, তখন দেখা যায়, দুই দিকের টানের কিছুমাত্র পরিবর্তন হয় না। দড়ির $\overline{BC}$ অংশ কাটিয়া ফেলিলেও টান দুই দিকে একই থাকিবে।

এই সহজ পরীক্ষাটির দ্বারা প্রমাণিত হয় যে,

(i) **একই রেখায় এবং বিপরীতমুখে সক্রিয় দুইটি বল সাম্যাবস্থায় থাকিলেই মাত্র উহারা সমান হইবে।** উল্লিখিত পরীক্ষায় স্প্রিং-তুলা হইতে টানের পরিমাণ নির্ণয় করা যাইবে। একই রেখায় বিপরীতমুখে টান পড়িলে বস্তুটি স্থির হয় তখনই, যখন দুই দিকের টান সর্বৈব সমান।

(ii) দ্বিতীয়ত, ক্রিয়ারেখায় বলের প্রয়োগ-বিন্দু যে-কোন দিকে ইচ্ছামতো সরানো যায়। এই সূত্রটি **বলের স্থানান্তরণ তত্ত্ব** (*Transmissibility of forces*) নামে পরিচিত।

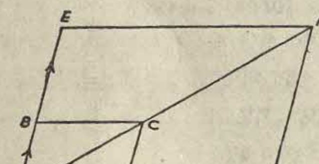
**9·9. বলের সংশ্লেষ (Resolution of forces) ঃ** বল একটি ভেক্টর বলিয়া, অন্যান্য ভেক্টরের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য সকল নিয়মই বলের বেলাতেও খাটিবে। সামান্তরিক সূত্র ভেক্টর-সংশ্লেষের প্রধান উপায়। বলের ক্ষেত্রেও এই সূত্রটি সত্য।

**গতিবিদ্যায় বল-সামান্তরিক প্রতিজ্ঞা ঃ** গতিবিদ্যার দৃষ্টিকোণ হইতে দেখিলে একই বস্তুর উপর সক্রিয় দুইটি বল উহাদের দ্বারা উৎপন্ন ত্বরণের সমানুপাতিক হইবে। উদাহরণস্বরূপ, $m$-ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুর একই বিন্দুতে সক্রিয় দুইটি বল $P$ ও $Q$ যদি যথাক্রমে $f_1$ ও $f_2$ ত্বরণ উৎপন্ন করে, তবে $P=mf_1$ এবং $Q=mf_2$.

সুতরাং, $\dfrac{P}{Q}=\dfrac{mf_1}{mf_2}=\dfrac{f_1}{f_2}$.

এখন $P$ ও $Q$-র লব্ধি নির্ণয় করিতে হইবে।

$O$ বস্তুকণার উপর যেন $P$ বল $\overrightarrow{OA}$ বরাবর $f_1$ এবং $Q$ বল $\overrightarrow{OB}$ বরাবর $f_2$ ত্বরণ উৎপন্ন করে, এখন $\overline{OA}$ যদি $f_1$ এবং $\overline{OB}$ যদি $f_2$ ত্বরণকে দিকে ও মানে সূচিত করে, তবে ত্বরণ-সামান্তরিক সূত্র অনুসারে $f_1$ ও $f_2$ ত্বরণের লব্ধি দিকে ও মানে $OACB$ সামান্তরিকের কর্ণ $\overline{OC}$ দ্বারা সূচিত হইবে।




47নং চিত্র

$\overline{OA}$ বরাবর $f_1$ ত্বরণ থাকায়, ঐ দিকে বস্তুটির উপর সক্রিয় বল $P=mf_1$ এবং $\overline{OB}$ বরাবর $f_2$ ত্বরণ থাকায়, $\overline{OB}$ মুখে সক্রিয় বল $Q=mf_2$. $\overline{OD}$ এবং $\overline{OE}$ যেন দিকে ও মানে যথাক্রমে $P$ ও $Q$ বল সূচিত করে। $ODFE$ সামান্তরিক পূর্ণ করা হইল। এখন,

$$\frac{\overline{OD}}{\overline{OA}}=\frac{P}{f_1}=\frac{mf_1}{f_1}=m \text{ এবং } \frac{\overline{OE}}{\overline{OB}}=\frac{Q}{f_2}=\frac{mf_2}{f_2}=m.$$

$$\therefore\quad \frac{\overline{OD}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{OE}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{DF}}{\overline{AC}}.$$

তাহা হইলে, $\triangle OAC$ ও $\triangle ODF$-এর মধ্যে $\overline{AC} \parallel \overline{DF}$ বলিয়া, $\angle OAC = \angle ODF$ এবং $\frac{\overline{OD}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{DF}}{\overline{AC}}$.

$\therefore$ ত্রিভুজ-দুইটি সদৃশ, কাজে-কাজেই $\angle AOC = \angle DOF$ ; অর্থাৎ $\overrightarrow{OC}$ ও $\overrightarrow{OF}$ একই রেখা।

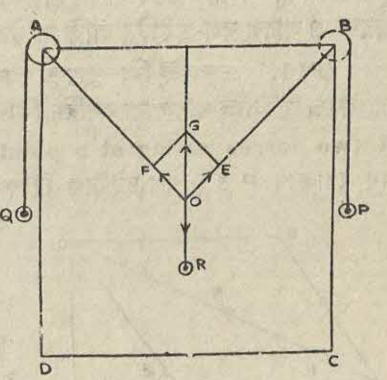
দ্বিতীয়ত, $\frac{\overline{OF}}{\overline{OC}}=\frac{\overline{OD}}{\overline{OA}}=m$ অর্থাৎ $\overline{OF}=m.\ \overline{OC}$.

কিন্তু $\overline{OC}$, $f_1$ ও $f_2$-র লব্ধি সূচিত করে। কাজেই $m$ ভরের উপর যে-বল $\overline{OC}$ দ্বারা সূচিত ত্বরণ উৎপন্ন করে, তাহার মানই $m.\ \overline{OC}$.

স্পষ্টতই এই বল $O$ বিন্দুতে সক্রিয় $P$ ও $Q$ বলের লব্ধি এবং উক্ত লব্ধি $\overline{OF}$ দ্বারা দিকে ও মানে সূচিত।

অতএব, **একটি বস্তুকণার উপর সক্রিয় দুইটি বলকে যদি তাহাদের প্রয়োগ-বিন্দু হইতে অঙ্কিত একটি সামান্তরিকের সন্নিহিত দুইটি বাহু দ্বারা দিকে ও মানে সূচিত করা যায়, তবে সামান্তরিকটির ঐ বিন্দু হইতে অঙ্কিত কর্ণ দ্বারা দিকে ও মানে বল-দুইটির লব্ধি সূচিত হইবে।**

**9·10. স্থিতিবিদ্যায় বল-সামান্তরিক প্রতিজ্ঞা :** স্থিতিবিদ্যায় ত্বরণকে ভিত্তি করা চলে না, কেননা ত্বরণ সেখানে রুদ্ধ বলিয়াই কল্পিত। কাজেই স্থিতিবিদ্যার ক্ষেত্রে বল-সামান্তরিক প্রতিজ্ঞার ভিন্ন প্রমাণ চাই। জ্যামিতিক প্রমাণ একটা নিশ্চয় আছে, কিন্তু তাহা অত্যন্ত জটিল। প্রথম-শিক্ষার্থীর পক্ষে তাহা দুর্বোধ্য বলিয়া পরীক্ষামূলক একটি প্রমাণ দেওয়া যাইতেছে। প্রতিজ্ঞাটির সত্যতা বিচারের জন্য উহাই যথেষ্ট।



48নং চিত্র

**পরীক্ষা।** $ABCD$ একটি ব্ল্যাক-বোর্ড। উহার মাথায় $A$ এবং $B$ কোণে দুইটি মসৃণ কপিকল আঁটা আছে। $P$, $Q$, $R$ এমন তিনটি ভর যে, উহাদের যে-কোন দুইটির সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বড়। তিনগাছা স্থিতিস্থাপকতা-বিহীন রেশমী সূতাকে একটি বিন্দুতে গিঁট দিয়া

প্রত্যেকটির অপর মাথায় এক-একটি ভর ঝুলাইয়া দেওয়া হইল। এইবার ব্ল্যাকবোর্ডটি উল্লম্বভাবে স্থাপন করিয়া দুইগাছা সুতা $A$ ও $B$ কপিকলের উপর দিয়া এমনভাবে গলাইয়া দেওয়া হইল যে, দুইপাশে $P$ ও $Q$ ভর-দুইটি ঝুলিতে থাকে আর তৃতীয় ভর $R$, $\overrightarrow{OR}$ সুতায় নিচুদিকে বোর্ডের উপর ঝুলিয়া পড়ে। এইভাবে ভর-তিনটি যখন স্থির অবস্থায় ঝুলিতে থাকে, তখন বোর্ডের উপর সুতাগুলি বরাবর $\overleftrightarrow{OA}$, $\overleftrightarrow{OB}$, ও $\overleftrightarrow{OR}$ রেখা অঙ্কন করা হয়।

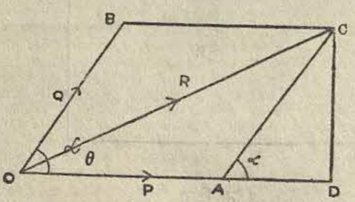
এখন যে-কোন সুবিধামতো স্কেল ( বা মাপের একক ) অনুসারে $\overrightarrow{OB}$ রেখা হইতে $P$ একক দৈর্ঘ্য $\overline{OE}$, এবং $\overrightarrow{OA}$ রেখা হইতে $Q$ একক দৈর্ঘ্য $\overline{OF}$ চিহ্নিত করা হইল। তাহার পর $\overline{OE}$ ও $\overline{OF}$-কে সন্নিহিত বাহু ধরিয়া $OEGF$ সামান্তরিক অঙ্কিত হইল। এইবার প্রত্যক্ষ করা যায় যে, $\overrightarrow{RO}$ রেখা বর্ধিত হইলে $G$ বিন্দু দিয়া যায়। দ্বিতীয়ত, $\overline{OG}$ কর্ণের দৈর্ঘ্য মাপিলে দেখা যায়, উহা $R$ এককের সমান।

$P$, $Q$ ও $R$ বল-তিনটি সাম্যাবস্থায় আছে, কাজেই উহাদের যে-কোন একটি অপর দুইটির লব্ধির সমান ও বিপরীতমুখী হইবে। সুতরাং এক্ষেত্রে $P$ ও $Q$-এর লব্ধি নিশ্চয় $R$-এর সমান ও বিপরীতমুখী। যেহেতু $\overline{OG}$ রেখার মান $R$ একক এবং দিক্ $R$-এর ঠিক বিপরীত, সুতরাং $\overline{OG}$ কর্ণ দ্বারা সূচিত বল দিকে ও মানে $\overline{OE}$ ও $\overline{OF}$ দ্বারা সূচিত বলের লব্ধি।

অতএব, ইহা দ্বারা আমরা এই সিদ্ধান্তেই উপনীত হই যে—

**একই বিন্দুতে সক্রিয় দুইটি বলকে তাহাদের প্রয়োগ-বিন্দু হইতে অঙ্কিত একটি সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু দ্বারা যদি দিকে ও মানে সূচিত করা যায়, তবে সামান্তরিকটির ঐ বিন্দু হইতে অঙ্কিত কর্ণ দ্বারা দিকে ও মানে বল-দুইটির লব্ধি সূচিত হইবে।**

**9·11. একই বিন্দুতে পরস্পরের সহিত নির্দিষ্ট কোণে সক্রিয় দুইটি বলের লব্ধি নির্ণয় (Determination of the resultant of two forces acting at a point at a given angle) :** $\overline{OA}$ এবং $\overline{OB}$ যেন যথাক্রমে $P$ ও $Q$ বল-দুইটিকে দিকে ও মানে সূচিত করে। $P$ ও $Q$ বলের অন্তর্বর্তী কোণ যেন $\alpha$. সুতরাং $\angle AOB = \alpha$. $OACB$ সামান্তরিক পূর্ণ করা হইল। বল-সামান্তরিক প্রতিজ্ঞা অনুসারে $\overline{OC}$-ই $\overline{OA}$ এবং $\overline{OB}$ দ্বারা সূচিত $P$ ও $Q$ বলের লব্ধি করিবে। $\overline{OC}$ দ্বারা সূচিত বলটির মান যেন $R$. $\overrightarrow{OA}$ রেখাকে বর্ধিত করা হইল এবং $C$ হইতে $\overrightarrow{OA}$-র উপর $\overline{CD}$ লম্ব অঙ্কন করা হইল।




49নং চিত্র

এখন $\angle BOD$ = অনুরূপ $\angle CAD = \alpha$.

(i) $\overline{OC}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{CD}^2$, [ $\angle ODC = 90°$ বলিয়া ]

$$= (\overline{OA} + \overline{AD})^2 + \overline{CD}^2$$
$$= \overline{OA}^2 + \overline{AD}^2 + 2\ \overline{OA}.\overline{AD} + \overline{CD}^2$$
$$= \overline{OA}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 + 2\ \overline{OA}.\overline{AD}$$
$$= \overline{OA}^2 + \overline{AC}^2 + 2\ \overline{OA}.\overline{AD}, \quad [\because\ \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AC}^2\ ]$$
$$= \overline{OA}^2 + \overline{AC}^2 + 2\ \overline{OA}.\ \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} \times \overline{AC}$$
$$= \overline{OA}^2 + \overline{AC}^2 + 2\ \overline{OA}\cos CAD \times \overline{AC}$$
$$\left[\ \because\ \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \cos CAD = \cos\alpha \right].$$
$$= \overline{OA}^2 + \overline{AC}^2 + 2\ \overline{OA}.\overline{AC}\cos\alpha.$$

$\therefore\ \mathbf{R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}.$

(ii) দ্বিতীয়ত, $R$ লব্ধি $P$ বলের সহিত $\angle COD$ কোণ উৎপন্ন করে। $\angle COD = \theta$ ধরিলে, $\theta$ কোণ দ্বারা লব্ধি $R$-এর দিক্ সূচিত হইবে।

এখন, $\tan\theta = \tan COD = \frac{\overline{CD}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{OA} + \overline{AD}}$

কিন্তু $\overline{CD} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}.\overline{AC} = \sin CAD \times \overline{AC} = \overline{AC}\sin\alpha = Q\sin\alpha$

এবং $\overline{OA} + \overline{AD} = \overline{OA} + \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}}.\overline{AC} = \overline{OA} + \overline{AC}.\cos CAD$

$$= P + Q\cos\alpha.$$

$\therefore\quad \tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}.$

এই সমীকরণ হইতে $\theta$ কোণের মান বাহির করা যায় এবং এই কোণের মান লব্ধি $R$-এর দিক্ সূচিত করে।

**অনুসিদ্ধান্ত 1.** $P$ ও $Q$-এর মধ্যে কোণ $\alpha = 0°$ হইলে, $\cos\alpha = \cos 0° = 1$.

$\therefore\quad R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha = P^2 + Q^2 + 2PQ = (P+Q)^2.$

$\therefore\quad \mathbf{R = P + Q}$ এবং $P$ বলের সহিত $R$-এর কোণ $\theta$ হইলে,

$$\tan\theta = \frac{Q \times \sin 0°}{P + Q\cos 0°} = 0.$$

**অনুসিদ্ধান্ত 2.** $P$ ও $Q$ বলের মধ্যে কোণ $\alpha = 180°$ হইলে,

যেহেতু $\cos 180° = -1$,

$\therefore \quad R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \times -1 = P^2 + Q^2 - 2PQ = (P-Q)^2$;

$\therefore \quad \mathbf{R = P - Q}$ এবং $\tan\theta = \dfrac{Q \sin 180^\circ}{P + Q \cos 180^\circ} = 0.$

**অনুসিদ্ধান্ত 3.** $P$ ও $Q$-র মধ্যে কোণ $a = 90^\circ$ হইলে,

যেহেতু $\cos 90^\circ = 0$,

$\therefore \quad R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \times 0 = P^2 + Q^2.$

$\therefore \quad \mathbf{R = \sqrt{P^2+Q^2}}$ ; এবং $\tan\theta = \dfrac{Q \sin 90^\circ}{P + Q \cos 90^\circ} = \dfrac{Q}{P}.$

**অনুসিদ্ধান্ত 4.** $P = Q$ হইলে,

$$R^2 = P^2 + P^2 + 2P.P \cos a$$

$$= 2P^2 + 2P^2 \cos a = 2P^2 (1 + \cos a) = 4P^2 \cos^2 \frac{a}{2},$$

$\therefore \quad R = 2P \cos \dfrac{a}{2}$ এবং $\tan\theta = \dfrac{P \sin a}{P + P \cos a} = \dfrac{\sin a}{1 + \cos a}$

$$= \frac{2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}}{2 \cos^2 \frac{a}{2}} = \tan \frac{a}{2}.$$

$\therefore \quad \theta = \dfrac{a}{2}$

$\therefore$ এক্ষেত্রে লব্ধি-বল বল-দুইটির মধ্যবর্তী কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

**উদাহরণ 1.** 5 পাউণ্ড এবং 3 পাউণ্ডের দুইটি বল পরস্পরের সহিত $60^\circ$ কোণে একটি বস্তুকণার উপর সক্রিয়। তাহাদের লব্ধির মান ও দিক্ নির্ণয় কর।

পরস্পরের সহিত $a$ কোণে সক্রিয় $P$ ও $Q$ বলের লব্ধি $R$ হইলে,

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos a.$$

এক্ষেত্রে, $P = 5$, $Q = 3$ এবং $a = 60^\circ$ বসাইলে,

$$R^2 = 5^2 + 3^2 + 3.\ 5.\ 2.\ \tfrac{1}{2} = 25 + 9 + 15 = 49;$$

$\therefore \quad R = 7$ পাউণ্ড।

এই $R$ লব্ধি 5 পাউণ্ড বলের সহিত $\theta$ কোণে সক্রিয়, যেখানে,

$$\tan\theta = \frac{3 \sin 60^\circ}{5 + 3 \cos 60^\circ} = \frac{3\sqrt{3}}{13}.$$

**উদাহরণ 2.** একই বিন্দুতে সক্রিয় দুইটি সমান বলের লব্ধি যদি উহাদের যে-কোন একটির সমান হয়, তবে উহাদের অন্তর্বর্তী কোণ-পরিমাণ নির্ণয় কর।

বল-দুইটির প্রত্যেকটির মান যদি $P$ হয়, তবে প্রশ্নানুসারে উহাদের লব্ধিও $P$ হইবে। উহাদের অন্তর্বর্তী কোণ যেন $a$.

$\therefore \quad P^2 = P^2 + P^2 + 2P.P \cos a = 2P^2 + 2P^2 \cos a;$

$\therefore \quad -P^2 = 2P^2 \cos a;$

$\therefore \quad \cos a = \dfrac{-P^2}{2P^2} = -\frac{1}{2}.$

কিন্তু $\cos 120° = -\frac{1}{2}$; $\therefore \quad a = 120°.$

## প্রশ্নমালা 10

1. নিম্নলিখিত প্রতিজোড়া বলের লব্ধির মান নির্ণয় কর :

(a) পরস্পরের সহিত 0° কোণে সক্রিয় 8 ও 10 পাউণ্ড বল।

(b) পরস্পরের সহিত 180° কোণে সক্রিয় 2 ও 3 টন বল।

[ C. U. Matric. 1911 ]

(c) পরস্পরের সহিত 0° কোণে সক্রিয় 20 ও 30 পাউণ্ড বল।

(d) পরস্পরের সহিত 180° কোণে সক্রিয় 10 ও 15 পাউণ্ড বল।

(e) পরস্পরের সহিত 90° কোণে সক্রিয় 6 ও 8 পাউণ্ড বল।

[ C. U. Matric. 1921 ]

2. 20 পা., 30 পা. এবং 50 পাউণ্ড বলের অধীন কোন বস্তুকণা যদি স্থির থাকে, তবে প্রমাণ কর যে, বলগুলি একই সরল রেখায় সক্রিয়।

[ C. U. Matric. 1932 ]

3. পরস্পরের সহিত লম্বভাবে সক্রিয় দুইটি বলের অনুপাত 5 : 12 এবং লব্ধি 78 পাউণ্ড হইলে, বল-দুইটির মান নির্ণয় কর। [ C. U. Matric. 1931 ]

4. পরস্পরের সহিত লম্বভাবে সক্রিয় হইলে দুইটি বলের লব্ধি হয় $\sqrt{10}$ পাউণ্ড এবং পরস্পরের সহিত 60° কোণে সক্রিয় হইলে তাহাদের লব্ধি হয় $\sqrt{13}$ পাউণ্ড। বল-দুইটির মান নির্ণয় কর। [ U. P. B. 1950 ]

5. 30 পা. ও 40 পাউণ্ডের দুইটি বল পরস্পরের সহিত সমকোণে সক্রিয়। বল-দুইটির লব্ধি নির্ণয় কর। তৃতীয় একটি বল যদি প্রথমোক্ত বল-দুইটির অন্তর্বর্তী কোণের সমদ্বিখণ্ডক রেখায় সক্রিয় হয়, তবে ঐ তিনটি বল তাহাদের প্রয়োগ-বিন্দুস্থিত বস্তুকণাটিকে স্থির রাখিবে কি?

6. $ABC$ ত্রিভুজের $\overline{AB}$ ও $\overline{AC}$ বাহু যথাক্রমে $D$ ও $E$ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত। প্রমাণ কর যে $\overline{BE}$ ও $\overline{DC}$ দ্বারা সূচিত বলদ্বয়ের লব্ধি $\frac{3}{2}\,\overline{BC}$ দ্বারা দিকে ও মানে সূচিত হইবে। [ C. U. Matric. 1912, 1922 ; B. H. U. 1954 ]

7. একটি বস্তুকণার উপর সক্রিয় দুইটি বল যদি একটি সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় দ্বারা সূচিত হয়, তবে প্রমাণ কর যে, তাহাদের লব্ধি ঐ সামান্তরিকের একটি বাহুর দ্বিগুণ মান দ্বারা সূচিত হইবে। [ C. U. Matric. 1913 ]

8. $A, B$ ও $C$ তিনটি স্থিরবিন্দু এবং $P$ এমন একটি বিন্দু যে, $\overline{PA}$ ও $\overline{PB}$ বলের লব্ধি সর্বদা $C$ বিন্দুগামী হয়। প্রমাণ কর যে, $P$ বিন্দুর সঞ্চারপথ একটি সরল রেখা।

9. $ABCD$ সামান্তরিকের $\overline{CD}$ বাহু $E$ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত। $A$ বিন্দুতে সক্রিয় $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ এবং $2\overline{AE}$ দ্বারা সূচিত বল-তিনটির লব্ধি নির্ণয় কর। [ সংকেত : $2\overline{AE}=\overline{AC}$ ও $\overline{AD}$-র লব্ধি এবং $\overline{AB}$ ও $\overline{AD}$-র লব্ধি $=\overline{AC}$, ইত্যাদি। ]

10. $ABC$ ত্রিভুজের $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ ও $\overline{AB}$-র মধ্যবিন্দু যথাক্রমে $D, E$ ও $F$. প্রমাণ কর যে $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ ও $\overline{CF}$ দ্বারা সূচিত একটি বস্তুকণার উপর সক্রিয় বল-তিনটি সাম্যাবস্থায় থাকিবে।

[ সংকেত : মধ্যমাত্রয়ের ছেদবিন্দু $O$ ; $OBPC$ সামান্তরিক। $BOP$ ত্রিভুজের $\overline{BO}$, $\overline{OP}$ এবং $\overline{PB}$ বরাবর $\frac{2}{3}\overline{BE}$, $\frac{2}{3}\overline{AD}$, $\frac{2}{3}\overline{CF}$-এর লব্ধি শূন্য, ইত্যাদি। ]

11. প্রমাণ কর যে, $ABCD$ সামান্তরিকের $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{AC}$ ও $\overline{BD}$ দ্বারা সর্বতোভাবে সূচিত বলগুলির লব্ধি $2\overline{AD}$ দ্বারা দিকে ও মানে সূচিত হইবে।

12. $ABC$ ত্রিভুজের $A$-কোণ একটি সমকোণ। $\overline{BC}$-এর উপর $\overline{AD}$ লম্ব টানা হইল। প্রমাণ কর যে, $\overline{AB}$ বরাবর সক্রিয় $1/AB$ একক বল এবং $\overline{AC}$ বরাবর সক্রিয় $1/AC$ একক বলের লব্ধি $\overline{AD}$ বরাবর সক্রিয় $1/AD$ একক বল।

[ সংকেত : $\triangle ABC$ ও $\triangle ADC$ সদৃশ বলিয়া, $\frac{\overline{BC}}{AB}=\frac{\overline{AC}}{AD}$;

$$\text{নির্ণেয় লব্ধি}=\sqrt{\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}}=\sqrt{\frac{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2}{AB^2 \cdot AC^2}}$$

$$=\frac{\overline{BC}}{AB \cdot AC}=\frac{\overline{AC}}{AD}\cdot\frac{1}{AC}=\frac{1}{AD}. \Big]$$

13. $P$ বস্তুকণাটি $n.\overline{AP}$ এবং $n.\overline{PB}$ দ্বারা সূচিত দুইটি বলের অধীন। $A$ ও $B$ বিন্দু যদি নির্দিষ্ট হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $P$-র অবস্থান যেখানে হউক-না কেন, বল-দুইটির লব্ধি দিকে ও মানে ধ্রুবক। [ C. U. Matric. 1926 ]

14. $2P$ ও $P$ মানের দুইটি বল একটি বস্তুকণার উপর সক্রিয়। প্রথমোক্ত বলটিকে দ্বিগুণ এবং শেষোক্তটির সহিত 12 পা. বল যুক্ত হইলে, লব্ধির দিক্ অপরিবর্তিত থাকে। $P$-এর মান নির্ণয় কর। [ C. U. Matric. 1929 ]

15. $3P$ ও $2P$ মানের দুইটি বলের লব্ধি $R$. প্রথমোক্ত বলটিকে দ্বিগুণ করিলে লব্ধির মানও দ্বিগুণ হয়। বল-দুইটির অন্তর্বর্তী কোণের মান নির্ণয় কর।

16. $2P$ ও $P$ পাউণ্ডের দুইটি বল একটি বস্তুকণার উপর দুইদিকে সক্রিয়। প্রথমটি দ্বিগুণিত ও দ্বিতীয়টি 10 পাউণ্ড পরিমাণ বর্ধিত হইলে লব্ধির দিক্ অপরিবর্তিত থাকে। $P$-এর মান নির্ণয় কর। [ W. B. H. S. 1965 ]

17. একই বিন্দুতে সক্রিয় দুইটি বলের একটি সম্পূর্ণ বিপরীত দিকে সক্রিয় হইলে তাহাদের লব্ধি এক সমকোণ ঘুরিয়া যায়। প্রমাণ কর যে বল-দুইটির মান সমান।

18. $\overline{AB}$ ও $\overline{AC}$ বলের লব্ধি-রেখায় $P$ যে-কোন একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে, $\overline{PB}$ ও $\overline{PC}$ বলের লব্ধি $BC$ রেখার মধ্যবিন্দুগামী হইবে।

19. $P$ ও $Q$ বলের লব্ধি $\sqrt{3}Q$ এবং ঐ লব্ধি $P$ বলের ক্রিয়ারেখার সহিত $30°$ কোণ উৎপন্ন করিলে, প্রমাণ কর যে, $P$ হয় $Q$-র সমান, নয়তো $Q$-র দ্বিগুণ।

[ W. B. H. S. 1971 ]

# দশম অধ্যায়

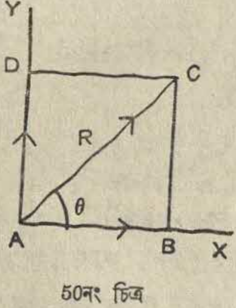
# বলের বিশ্লেষ

## ( Resolution of forces )

### 10·1. বলের বিশ্লেষ (Resolution of forces) :

দুই বা ততোধিক বলের সংশ্লেষে যেমন একটিমাত্র বল পাওয়া যায়, তেমনি একটি মাত্র বলকে দুই বা ততোধিক বলে বিভক্ত করা যায়। একটি বলকে ভাঙিয়া দুই বা ততোধিক বলে পরিণত করাকে **বলের বিশ্লেষ** বলে। বলা বাহুল্য, এইভাবে বিশ্লিষ্ট বলগুলিকে প্রথমোক্ত একটি বলের উপাংশ ও প্রথমোক্তটিকে এই উপাংশগুলির লব্ধি বলে।

যে-কোন একটি নির্দিষ্ট বলকে একটি রেখা দ্বারা দিকে ও মানে সূচিত করা যায় এবং সেই রেখাকে কর্ণ ধরিয়া অসংখ্য সামান্তরিক অঙ্কন করা যায়। বল-সামান্তরিক সূত্র অনুসারে এইরূপ কর্ণের সন্নিহিত দুইটি বাহু দ্বারা বলের দুইটি উপাংশ দিকে ও মানে সূচিত হইবে।




50নং চিত্র

পরস্পর লম্ব-অভিমুখী দুইটি উপাংশ-নির্ণয়ই সাধারণতঃ বিশেষ প্রয়োজনীয়। সেইজন্য এখানে বল-বিশ্লেষের কাজ লম্ব-অভিমুখী দুইটি উপাংশেই সীমাবদ্ধ রাখা যাইতেছে।

**বিশ্লেষিতাংশ (Resolved parts *or* Resolutes) :** এই প্রসঙ্গে প্রথমেই একটি সংজ্ঞা ঠিক করিয়া লওয়া প্রয়োজন। **একটি বলকে, যে-কোন নির্দিষ্ট একটি দিকে এবং সেই দিকের লম্ব-অভিমুখে—এই দুইটি উপাংশে বিভক্ত করা যায়।** ইহাদের প্রথমটিকে ঐ নির্দিষ্ট দিকে ঐ বলের Resolved part বা Resolute বলা হয়। বাংলায় ইহাকে **বিশ্লেষিতাংশ** বলা চলে। উদাহরণস্বরূপ, $\overline{AC}$ দ্বারা সূচিত $R$ বলের দুইটি উপাংশ যদি $\overrightarrow{AX}$ বরাবর $\overline{AB}$ এবং $\overrightarrow{AX}$-এর লম্ব-অভিমুখে $\overrightarrow{AY}$ বরাবর $\overline{AD}$ দ্বারা সূচিত হয়, তবে,

$\overrightarrow{AX}$ বরাবর $R$ বলের বিশ্লেষিতাংশ $\overline{AB}$ দ্বারা এবং $\overrightarrow{AY}$ বরাবর $R$ বলের বিশ্লেষিতাংশ $\overline{AD}$ দ্বারা সূচিত হইবে।

**10·2. বিশ্লেষিতাংশের মান (Magnitude of the resolute) :**
$R$ বল যেন $\overline{AC}$ রেখা দ্বারা দিকে ও মানে সূচিত। $\overline{AC}$ রেখার সহিত $\theta$ কোণে $\overrightarrow{AX}$ রেখা বিস্তারিত। $C$ বিন্দু হইতে $\overrightarrow{AX}$-এর উপর $\overline{CB}$ লম্ব অঙ্কিত হইল। $ABCD$ সামান্তরিক পূর্ণ করা হইল। স্পষ্টতই $\overline{AB}$ ও $\overline{AD}$ দ্বারা সূচিত বল-দুইটি $R$ বলের উপাংশ। ইহাদের মধ্যে প্রথমটি অর্থাৎ $\overline{AB}$ দ্বারা সূচিত উপাংশ $\overrightarrow{AX}$ বরাবর $R$ বলের বিশ্লেষিতাংশ ; এবং দ্বিতীয়টি অর্থাৎ $\overline{AD}$ দ্বারা সূচিত উপাংশটি $\overrightarrow{AY}$ বরাবর $R$ বলের বিশ্লেষিতাংশ।

ত্রিকোণমিতির নিয়মে, $\overline{AB} = \overline{AC} \times \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \overline{AC} \cos \theta$

এবং $\overline{AD} = \overline{BC} = \overline{AC} \times \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \overline{AC} \sin \theta$ ;

$\therefore$ $R$ বলের,

**$\overrightarrow{AX}$ বরাবর বিশ্লেষিতাংশ $= R \cos \theta$**

**এবং $\overrightarrow{AY}$ বরাবর বিশ্লেষিতাংশ $= R \sin \theta$.**

আবার, $\tan \theta = \dfrac{R \sin \theta}{R \cos \theta} = \dfrac{\overrightarrow{AY} \text{ বরাবর বিশ্লেষিতাংশ}}{\overrightarrow{AX} \text{ বরাবর বিশ্লেষিতাংশ}}$।

**10·3. বিশ্লেষিতাংশ-সংক্রান্ত একটি প্রয়োজনীয় উপপাদ্য (An important theorem related to resolved parts) :**

**যে-কোন বিশেষ দিকে দুইটি সমবিন্দু বলের বিশ্লেষিতাংশের বৈজিক সমষ্টি, ঐদিকে উহাদের লব্ধির বিশ্লেষিতাংশের সমান।**

$A$ বিন্দুতে সক্রিয় $P$ ও $Q$ বল-দুইটির লব্ধি যেন $R$ ; $P$, $Q$ এবং $R$ যেন যথাক্রমে $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ ও $\overline{AC}$ দ্বারা দিকে ও মানে সূচিত হয়। $ABCD$ সামান্তরিক পূর্ণ করা হইল। $\overline{AX}$ বরাবর $P$, $Q$ এবং $R$ বলের বিশ্লেষিতাংশ যেন যথাক্রমে $\overline{AL}$, $\overline{AN}$ ও $\overline{AM}$ দ্বারা সূচিত হয়।

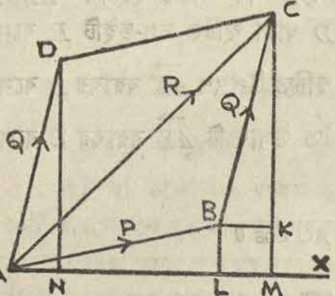
প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\overline{AX}$ বরাবর $P$ ও $Q$ বলের বিশ্লেষিতাংশের বৈজিক সমষ্টি, ঐ রেখা বরাবর $R$ বলের বিশ্লেষিতাংশের সমান।

$B$ বিন্দু হইতে $\overline{AX}$ রেখার সমান্তরালভাবে অঙ্কিত রেখাটি যেন $\overline{CM}$ রেখাকে $K$ বিন্দুতে ছেদ করে। স্পষ্টতই $BLMK$ একটি আয়তক্ষেত্র।

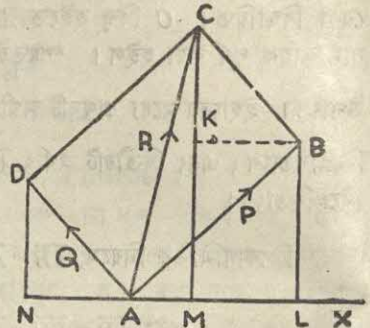
$\therefore \quad \overline{BK} = \overline{LM} \qquad \cdots \qquad \cdots \quad (1)$

আবার, $\triangle AND$ ও $\triangle BKC$-র মধ্যে, $\overline{AD}$ বাহু $= \overline{BC}$ বাহু,

$$\angle AND = 90° = \angle BKC ;$$




51(a)নং চিত্র




51(b)নং চিত্র

এবং $\overline{AD}$ বাহু $\overline{BC}$ বাহুর ও $\overline{DN}$ বাহু $\overline{CK}$ বাহুর সমান্তরাল বলিয়া,

$$\angle ADN = \angle BCK ;$$

∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।

$$\therefore \quad \overline{AN} = \overline{BK} = \overline{LM} \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

এখন (*a*)-চিত্রে $\overrightarrow{AX}$ বরাবর $P$ ও $Q$ অর্থাৎ $\overline{AB}$ ও $\overline{AD}$-র বিশ্লেষিতাংশের বৈজিক সমষ্টি $= \overline{AL} + \overline{AN} = \overline{AL} + \overline{LM}$, [ $\because \overline{AN} = \overline{LM}$ ]

$$= \overline{AM} ;$$

এবং (*b*)-চিত্রে ঐ সমষ্টি $= \overline{AL} - \overline{AN} = \overline{AL} - \overline{LM} = \overline{AM}$.

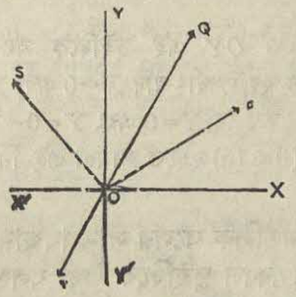
∴ $\overrightarrow{AX}$ বরাবর $P$ ও $Q$ বলের বিশ্লেষিতাংশের বৈজিক সমষ্টি ঐদিকে উহাদের লব্ধি $R$ বলের বিশ্লেষিতাংশের সমান।

**10·4. একই বিন্দুতে সক্রিয় যে-কোন সংখ্যক সামতলিক বলের লব্ধি (Resultant of any number of coplanar forces acting at a point) :** $O$ বিন্দুতে $P, Q, S$ ও $T$ প্রভৃতি কয়েকটি বল যেন সক্রিয়। $O$ বিন্দু দিয়া পরস্পর লম্বচ্ছেদী $XOX'$ ও $YOY'$ এই রেখা-দুইটি অঙ্কিত হইল।

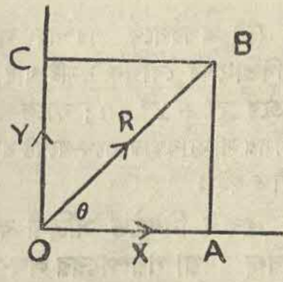
$\overrightarrow{OX}$ রেখার সহিত $P$, $Q$, $S$ ও $T$ প্রভৃতি বলের দিক্‌রেখা যথাক্রমে যেন $a_1, a_2, a_3, a_4$ প্রভৃতি কোণ উৎপন্ন করে। তাহা হইলে $\overrightarrow{OX}$ বরাবর $P, Q, S$ ও $T$ প্রভৃতি বলের বিশ্লেষিতাংশের বৈজিক সমষ্টি

$$= P \cos a_1 + Q \cos a_2 + S \cos a_3 + T \cos a_4 + \cdots = X \text{ ( যেন )।}$$

অনুরূপভাবে $\overrightarrow{OY}$ বরাবর $P, Q, S, T$ প্রভৃতি বলের বিশ্লেষিতাংশের বৈজিক সমষ্টি $= P \sin a_1 + Q \sin a_2 + S \sin a_3 + T \sin a_4 + \cdots = Y$ (যেন)।




52(a)নং চিত্র




52(b)নং চিত্র

এখন, $\overline{OX}$ বরাবর উপরিউক্ত বিশ্লেষিতাংশগুলির বৈজিক সমষ্টি যেন $X$ এবং $\overrightarrow{OY}$ বরাবর বিশ্লেষিতাংশগুলির বৈজিক সমষ্টি যেন $Y$. (b)-চিত্রে প্রদর্শিত $\overline{OA}$ যদি $X$-কে এবং $\overline{OA}$-র উপর লম্ব $\overline{OC}$ যদি $Y$-কে সূচিত করে, তবে $OABC$ সামান্তরিকের $\overline{OB}$ নিশ্চয় উহাদের লব্ধি $R$-কে সূচিত করে। $\overline{OB}$ যেন $\overline{OA}$ রেখার সহিত $\theta$ কোণ উৎপন্ন করে ; অর্থাৎ $\angle BOA = \theta$।

কিন্তু $\overline{OB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OC}^2$ ;

$\therefore \quad R^2 = X^2 + Y^2$ অর্থাৎ $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

দ্বিতীয়ত, $\tan \theta = \tan BOA = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \dfrac{\overline{OC}}{\overline{OA}} = \dfrac{Y}{X}$.

**10·5. একই বিন্দুতে সক্রিয় কয়েকটি সামতলিক বলের সাম্যাবস্থার শর্ত (Conditions of equilibrium of a number of coplanar forces meeting at a point) :** 52(a)-চিত্রে $O$ বিন্দুতে সক্রিয় কয়েকটি বলের লব্ধি যেন $R$। পরস্পর লম্বচ্ছেদী $\overrightarrow{OX}$ ও $\overrightarrow{OY}$ বরাবর প্রত্যেকটি বলের বিশ্লেষিতাংশ নির্ণয় করা হইল। $\overrightarrow{OX}$ বরাবর বিশ্লেষিতাংশগুলির বৈজিক সমষ্টি যেন $X$ এবং $\overrightarrow{OY}$ বরাবর বিশ্লেষিতাংশগুলির বৈজিক সমষ্টি যেন $Y$.

তাহা হইলে, $R^2 = X^2 + Y^2$.

(i) এখন $R = 0$ হইলে, $X^2 + Y^2 = 0$ হওয়া প্রয়োজন। কিন্তু $X^2$ ও $Y^2$ উভয়েই বর্গসংখ্যা। বর্গসংখ্যা মাত্রই ধনাত্মক ; কাজেই তাহাদের সমষ্টি একমাত্র তখনই শূন্য, যখন উহারা প্রত্যেকে স্বতন্ত্রভাবে শূন্য হয়, অর্থাৎ যখন $X = 0$ এবং $Y = 0$.

$\therefore$ বলগুলির লব্ধি শূন্য হওয়ার জন্য, অর্থাৎ উহাদের সাম্যাবস্থার জন্য প্রয়োজনীয় শর্ত হইল— $\left.\begin{matrix} X=0 \\ Y=0 \end{matrix}\right\}$

(ii) অপরপক্ষে পরস্পর লম্বচ্ছেদী $\overrightarrow{OX}$ ও $\overrightarrow{OY}$ এই দুইদিকে বলগুলির বিশ্লেষিতাংশের বৈজিক সমষ্টি যদি স্বতন্ত্রভাবে শূন্য হয়, অর্থাৎ যদি $X=0$ এবং $Y=0$ হয়, তবে $X^2+Y^2=0$ ; কাজে-কাজেই $R=0$. অতএব $X=0$ এবং $Y=0$—ইহাই বলগুলির সাম্যাবস্থার পক্ষে যথেষ্ট সর্ত। অতএব (i) ও (ii) হইতে আমরা এই সিদ্ধান্তে উপনীত হই :

**একই বিন্দুতে সক্রিয় কতকগুলি সামতলিক বলের সাম্যাবস্থার জন্য ঐ বিন্দু দিয়া পরস্পরের লম্ব-অভিমুখে যে-কোন দুইদিকে উক্ত বলগুলির বিশ্লেষিতাংশের বৈজিক সমষ্টি স্বতন্ত্রভাবে শূন্য হওয়াই প্রয়োজনীয় এবং যথেষ্ট শর্ত।**

## প্রশ্নমালা 11

1. একই সমতলে $P, 3P, \sqrt{3}P$ ও $\sqrt{3}P$, এই চারিটি বল যথাক্রমে $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ ও $\overrightarrow{OD}$ মুখে সক্রিয়। যদি $\angle AOB=60°$, $\angle BOC=90°$ এবং $\angle COD=120°$ হয়, তবে বলগুলির লব্ধির মান ও দিক্ নির্ণয় কর।

2. একটি সুষম ষড়্ভুজের একটি শীর্ষকোণ হইতে অপর পাঁচটি শীর্ষকোণের দিকে যথাক্রমে $2, \sqrt{3}, 5, \sqrt{3}$ ও 2 পাউণ্ড বল সক্রিয়। বল-পাঁচটির লব্ধির মান ও দিক্ নির্ণয় কর।

3. একটি বিন্দুতে $P-Q$, $P$ ও $P+Q$ মানের তিনটি বল একটি সমবাহু ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত বাহু-তিনটির সমান্তরালভাবে সক্রিয়। বল-তিনটির লব্ধি নির্ণয় কর।

4. একটি সমতলে একটি বস্তুকণার উপর তিনটি বল 2 পা., $2\sqrt{2}$ পা. ও 1 পা. সক্রিয়। উহাদের প্রথমটি অনুভূমিক রেখায়, দ্বিতীয়টি অনুভূমিক রেখার সহিত 45° কোণে এবং তৃতীয়টি উলম্বদিকে সক্রিয় হইলে উহাদের লব্ধি নির্ণয় কর।

5. $ABCD$ একটি বর্গক্ষেত্র। 11 পা., 6 পা. ও 9 পাউণ্ডের বল যথাক্রমে $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ ও $\overrightarrow{AD}$ বরাবর সক্রিয় হইলে ঐ বল-তিনটির লব্ধির মান নির্ণয় কর।

6. একটি বস্তুকণার উপর 10 পা. ও 6 পাউণ্ডের দুইটি বল পরস্পর সমকোণে সক্রিয় এবং 8 পাউণ্ডের তৃতীয় আরেকটি বল প্রথমোক্ত বল-দুইটির অন্তর্বর্তী কোণের সমদ্বিখণ্ডক রেখায় ঐ বস্তুকণার উপর সক্রিয়। বলগুলি বস্তুকণাটি হইতে বহির্মুখী হইলে উহাদের লব্ধি নির্ণয় কর।

7. $\frac{4}{\sqrt{3}}$, $\sqrt{2}$, $\frac{8}{\sqrt{3}}$, 2, $\frac{4}{\sqrt{3}}$ এবং $3+\frac{2}{\sqrt{3}}$ পাউণ্ডের ছয়টি সমবিন্দু বল, একটি স্থির সরল রেখার সহিত যথাক্রমে 30°, 45°, 60°, 90°, 180° এবং 270° কোণে সক্রিয়। উহাদের লব্ধির মান নির্ণয় কর।

8. 25 ইঞ্চি লম্বা একটি হালকা দড়ির সাহায্যে 2 পাউণ্ডের একটি ভর একটি স্থির-নিবদ্ধ বিন্দুতে ঝুলানো আছে। অনুভূমিক বল $F$-এর ক্রিয়ায় ভরটি ঐ স্থির-বিন্দুগামী উল্লম্বরেখা হইতে 20 ইঞ্চি দূরে সুস্থিত রহিয়াছে। দড়ির টান ও $F$-এর মান নির্ণয় কর। [ W. B. H. S. 1964 ]

9. উত্তরমুখে $P$ একক, পশ্চিমমুখে $Q$ একক, দক্ষিণ-পশ্চিমে 4 একক এবং পূর্ব-মুখে 3 একক—এই চারিটি অনুভূমিক বলের অধীন একটি বস্তু সাম্যাবস্থায় আছে। $P$ ও $Q$-র মান নির্ণয় কর। [ W. B. H. S. 1967 ]

10. $ABCD$ সামান্তরিকের অভ্যন্তরে $P$ একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে, $\overline{PA}$, $\overline{BP}$, $\overline{PC}$ ও $\overline{DP}$ দ্বারা সূচিত বল-চারিটি সমবেতভাবে সাম্যাবস্থায় রহিয়াছে। [ W. B. H. S. 1970 ]

11. একটি সমবাহু ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত বাহুগুলির সমান্তরালভাবে যথাক্রমে $2P$, $3P$ ও $4P$ বল একটি বিন্দুতে সক্রিয়। উহাদের লব্ধির মান ও দিক্ নির্ণয় কর। [ W. B. H. S. 1970 ]

12. একটি সমবাহু ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত বাহুগুলির সমান্তরালভাবে যথাক্রমে $3P$, $7P$ ও $5P$ বল এক বিন্দুতে সক্রিয়। উহাদের লব্ধির দিক্ ও মান নির্ণয় কর। [ W. B. H. S. 1971 ]

## একাদশ অধ্যায়

# সমান্তরাল বল

## ( Parallel forces )

**11·1. সমান্তরাল বল (Parallel forces) :** এ-পর্যন্ত বলের সংশ্লেষ ও বিশ্লেষ আলোচনায় **সমবিন্দু** বলের কথাই বিচার করা হইয়াছে। দুই বা তাহারও বেশী সামতলিক বলের ক্রিয়ারেখা যদি একটি বিন্দুতে ছেদ করে, তবে তাহাদের লব্ধি বাহির করা যায়। কিন্তু কয়েকটি সামতলিক বলের ক্রিয়ারেখা পরস্পরকে আদৌ ছেদ না করিতেও তো পারে। তখন তাহাদের লব্ধি-নির্ণয়ের উপায় কি? এই অধ্যায়ে ইহারই উত্তর সন্ধান করা হইতেছে।

এখানে দুইটি সামতলিক বলের ক্রিয়ারেখা যদি পরস্পরকে ছেদ না করে, তবে স্পষ্টতই ঐ ক্রিয়ারেখা দুইটি সমান্তরাল। **যে-সকল বলের ক্রিয়ারেখা পরস্পরের সমান্তরাল, তাহাদিগকে সমান্তরাল বল বলা হয়।**

সমান্তরাল বল আবার দুই রকমের হইতে পারে : (*a*) উহারা একই মুখে সক্রিয় হইতে পারে ; অথবা (*b*) পরস্পরের ঠিক বিপরীতমুখেও সক্রিয় হইতে পারে। ইহাদের মধ্যে—

(*a*) একই মুখে সক্রিয় সমান্তরাল বলসমূহকে **সদৃশ** বা **সমমুখ সমান্তরাল বল** (*Like parallel forces*) বলা হয় ; এবং (*b*) বিপরীতমুখে সক্রিয় সমান্তরাল বলসমূহকে বলা হয় **অসদৃশ** বা **প্রতিমুখ সমান্তরাল বল** (*Unlike parallel forces*)।

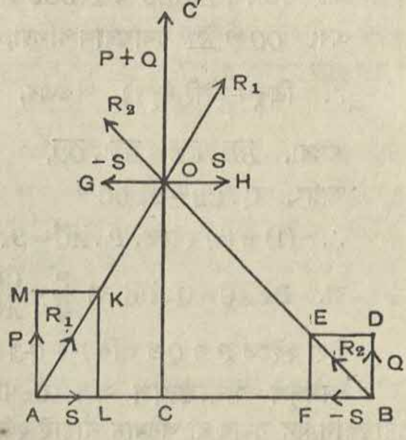
**সমান্তরাল বলের অভিমুখ :** দুইটি বল যদি অসদৃশ ও সমান্তরাল হয়, তবে তাহাদের প্রত্যেকের অভিমুখ বুঝাইবার প্রয়োজন আছে। এইরূপ ক্ষেত্রে এই বল-দুইটির একটিকে যদি যোগ-চিহ্ন দ্বারা সূচিত করা যায়, তবে অপরটিকে বিয়োগ-চিহ্ন দ্বারা সূচিত করিতে হয়। উদাহরণস্বরূপ, ঊর্ধ্বমুখে 25-পাউণ্ড এবং নিম্নমুখে 30 পাউণ্ড—এই দুইটি সমান্তরাল বলের মধ্যে ঊর্ধ্বমুখী বলটিকে যদি +25 পাউণ্ড বলা হয়, তবে নিম্নমুখী বলটিকে −30 পাউণ্ড বলিতে হইবে।

**11·2. দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধি (Resultant of two like parallel forces) :**

একটি বস্তুর যথাক্রমে $A$ ও $B$ বিন্দুতে সক্রিয় দুইটি সদৃশ ও সমান্তরাল বল $P$ ও $Q$-এর লব্ধি নির্ণয় করিতে হইবে।

$P$ ও $Q$ বল-দুইটি যথাক্রমে $\overline{AM}$ ও $\overline{BD}$ রেখা দ্বারা যেন দিক্, মান ও

অভিমুখে সূচিত। $A$ ও $B$ বিন্দুকে যুক্ত করিয়া ঐ রেখা বরাবর বিপরীতমুখে দুইটি সমান বল $S$ ও $-S$ যথাক্রমে $A$ ও $B$ বিন্দুতে প্রয়োগ করা হইল। $S$ বল $\overline{AL}$ দ্বারা এবং $-S$ বল $\overline{BF}$ দ্বারা সূচিত করিয়া $AMKL$ ও $BDEF$ সামান্তরিক-দুইটি পূর্ণ করা হইল। $\overline{AK}$ ও $\overline{BE}$ কর্ণকে বর্ধিত করিলে উহারা যেন $O$ বিন্দুতে মিলিত হয়। $O$ হইতে অঙ্কিত $\overline{AM}$ বা $\overline{BD}$-র সমান্তরাল রেখাটি $\overline{AB}$ রেখাকে যেন $C$ বিন্দুতে ছেদ করে।



53নং চিত্র

(i) $S$ ও $-S$ বলদ্বয় সমান ও বিপরীতমুখে একই রেখায় সক্রিয় বলিয়া তাহাদের লব্ধি শূন্য। কাজেই $P$ ও $Q$ বলের লব্ধি $P$, $Q$, $S$ ও $-S$ বলের লব্ধির সমান। অতএব $P$ ও $S$ বলের লব্ধি যদি $R_1$ এবং $Q$ ও $-S$ বলের লব্ধি যদি $R_2$ হয়, তবে $R_1$ ও $R_2$-র লব্ধিই হইবে $P$ ও $Q$-র লব্ধি।

এখন, স্পষ্টতই $P$ ও $S$ বলের লব্ধি $R_1$, $\overline{AK}$ দ্বারা এবং $Q$ ও $-S$ বলের লব্ধি $R_2$, $\overline{BE}$ দ্বারা সূচিত হইবে। কল্পনা করা যায়, $R_1$ ও $R_2$ উহাদের আপন আপন ক্রিয়ারেখার যে-কোন বিন্দুতে সক্রিয়। উভয়ের ক্রিয়ারেখা $O$ বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। অতএব $O$ বিন্দুতে উভয়কে সক্রিয় ধরিয়া $\overline{AB}$-এর সমান্তরাল $\overline{GOH}$ রেখা ও $\overrightarrow{CO}$ রেখা বরাবর $R_1$-কে $S$ ও $P$ বলে এবং $R_2$-কে $-S$ ও $Q$ বলে বিশ্লিষ্ট করা হইল। $S$ ও $-S$ বল পরস্পর সমান ও একই রেখায় বিপরীতমুখী বলিয়া তাহাদের লব্ধি শূন্য। কিন্তু $P$ ও $Q$ বল উভয়েই $\overrightarrow{CO}$ রেখা বরাবর একই মুখে সক্রিয় বলিয়া তাহাদের লব্ধি $P+Q$ বলের সমান। অতএব $A$ বিন্দুতে সক্রিয় $P$ এবং $B$ বিন্দুতে সক্রিয় $Q$ বলের লব্ধির মান $P+Q$. উহা $\overrightarrow{CO}$ অভিমুখে অর্থাৎ $P$ ও $Q$ বলের সমান্তরালভাবে একই মুখে সক্রিয়।

(ii) দ্বিতীয়ত, $\triangle KAL$ ও $\triangle OAC$-র মধ্যে $\angle OAC$ সাধারণ; এবং $\overline{OC}$ ও $\overline{KL}$ সমান্তরাল বলিয়া, $\angle ALK =$ অনুরূপ $\angle ACO$.

$\therefore$ ত্রিভুজ-দুইটি সদৃশ; কাজেই,

$$\frac{\overline{KL}}{\overline{AL}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{AC}}, \text{ অথবা } \frac{\overline{AM}}{\overline{AL}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{AC}}; \text{ অথবা, } \overline{AM} \times \overline{AC} = \overline{AL} \times \overline{OC},$$

অর্থাৎ $\mathbf{P}.\overline{\mathbf{AC}}=\mathbf{S}.\overline{\mathbf{OC}}$ ... ... (1)

অনুরূপভাবে, $\triangle BEF$ ও $\triangle BOC$-র মধ্যে, $\angle OBC$ সাধারণ ;

এবং $\overline{OC}$ ও $\overline{EF}$ সমান্তরাল বলিয়া, $\angle EFB$ = অনুরূপ $\angle OCB$.

∴ ত্রিভুজ-দুইটি সদৃশ। অতএব, $\frac{\overline{EF}}{\overline{FB}}=\frac{\overline{OC}}{\overline{CB}}$, অথবা $\frac{\overline{BD}}{\overline{BF}}=\frac{\overline{OC}}{\overline{CB}}$;

অথবা, $\overline{BD}.\overline{CB}=\overline{BF}.\overline{OC}$,

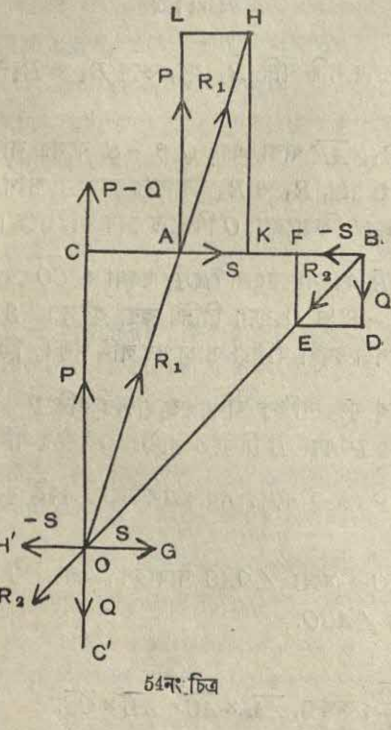
অর্থাৎ, $\mathbf{Q}.\overline{\mathbf{CB}}=\mathbf{S}.\overline{\mathbf{OC}}$ ... ... (2)

∴ (1) ও (2) হইতে, $P.\overline{AC}=S.\overline{OC}=Q.\overline{CB}$,

বা, $\mathbf{P}.\overline{\mathbf{AC}}=\mathbf{Q}.\overline{\mathbf{CB}}$, বা $\frac{\mathbf{P}}{\mathbf{Q}}=\frac{\overline{\mathbf{CB}}}{\mathbf{AC}}$.

ইহা হইতে $P$ ও $Q$-র লব্ধি $P+Q$-র প্রয়োগ-বিন্দু $C$-র অবস্থান পাওয়া গেল।

**অসদৃশ সমান্তরাল বল (Unlike parallel forces) :** দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল সমান বা অসমান যাহাই হউক না, 11·2 অনুচ্ছেদের নিয়মে তাহাদের লব্ধি নির্ণয় করা চলে। কিন্তু দুইটি অসদৃশ সমান্তরাল বল যখন সমান হয়, তখন তাহাদের লব্ধি হিসাবে একটি বল পাওয়া যায় না। এইরকম একজোড়া বলকে যুগ্মবল বলে। পরবর্তী 11·4 অনুচ্ছেদে যুগ্মবলের সংক্ষিপ্ত আলোচনা করা হইয়াছে।




54নং চিত্র

## 11·3. দুইটি অসদৃশ ও অসমান সমান্তরাল বলের লব্ধি (Resultant of two unlike and unequal parallel forces) :

কোন বস্তুর যথাক্রমে $A$ ও $B$ বিন্দুতে সক্রিয় $P$ ও $Q$ বল-দুইটি যেন অসদৃশ ও অসমান সমান্তরাল বল। ইহাদের মধ্যে $P>Q$.

$P$ বল যেন $\overline{AL}$ দ্বারা এবং $Q$ বল যেন $\overline{BD}$ দ্বারা দিক্, মান ও অভিমুখে সূচিত। $P$ ও $Q$-র লব্ধি নির্ণয় করিতে হইবে।

$A$ ও $B$ বিন্দুকে যোগ করা হইল এবং $\overline{AB}$ রেখা বরাবর পরস্পর সমান ও বিপরীতমুখী $S$ ও $-S$ বলদ্বয় যথাক্রমে $A$ ও $B$ বিন্দুতে প্রয়োগ করা হইল। $\overline{AK}$ দ্বারা $S$ এবং $\overline{BF}$ দ্বারা $-S$ বল যেন দিক্, মান ও অভিমুখে সূচিত হয়। এখন $S$ ও $-S$ বল একই রেখায় সমান ও বিপরীতমুখী বলিয়া তাহাদের লব্ধি শূন্য। সুতরাং, $P$ ও $S$ এবং $Q$ ও $-S$ বলের লব্ধি $P$ ও $Q$ বলের লব্ধির সমান।

$AKHL$ ও $BDEF$ সামান্তরিক পূর্ণ করা হইল। স্পষ্টতই $P$ ও $S$ বলের লব্ধি $R_1$, $\overline{AH}$ কর্ণ দ্বারা, এবং $Q$ ও $-S$ বলের লব্ধি $R_2$, $\overline{BE}$ কর্ণ দ্বারা সূচিত হইবে। $\overline{HA}$ ও $\overline{BE}$ রেখা বর্ধিত হইলে যেন $O$ বিন্দুতে ছেদ করে। তাহা হইলে $R_1$ ও $R_2$-কে নিজ নিজ ক্রিয়ারেখায় $O$ বিন্দুতে সক্রিয় বলিয়া কল্পনা করা যায়। $O$ বিন্দু হইতে অঙ্কিত $\overline{AL}$ বা $\overline{BD}$ রেখার সমান্তরাল $\overline{OC}$ রেখাটি $\overline{BA}$-এর বর্ধিতাংশকে যেন $C$ বিন্দুতে ছেদ করে।

(i) এইবার $O$ বিন্দু দিয়া $\overline{AB}$-র সমান্তরাল $\overline{GOH'}$ রেখা টানা হইল। $R_1$ বলকে পুনরায় $\overrightarrow{OC}$ ও $\overrightarrow{OG}$ বরাবর যথাক্রমে $P$ ও $S$ বলে এবং $R_2$ বলকে $\overrightarrow{OC'}$ ও ও $\overrightarrow{OH'}$ বরাবর যথাক্রমে $Q$ ও $-S$ বলে বিশ্লিষ্ট করা হইল।

স্পষ্টতই, $O$ বিন্দুতে $S$ ও $-S$ বল একই রেখায় বিপরীতমুখে সক্রিয় এবং সমান মানবিশিষ্ট বলিয়া তাহাদের লব্ধি শূন্য। কিন্তু ঐ বিন্দুতে $P$ ও $Q$ বল একই রেখায় সক্রিয় হইলেও অসমান ও বিপরীতমুখী। সুতরাং, তাহাদের লব্ধি $P-Q$ ($P>Q$ বলিয়া) এবং $P$ ও $Q$-র লব্ধি $\overline{BA}$-রেখার বর্ধিতাংশের $C$ বিন্দুতে $P$ বলের অভিমুখে সক্রিয়।

(ii) দ্বিতীয়ত, $AC$ ও $\overline{LH}$ সমান্তরাল এবং $\overline{OH}$ উহাদের ছেদক বলিয়া

$\angle OAC =$ অনুরূপ $\angle AHL$.

আবার, $\overline{OC}$ ও $\overline{AL}$ সমান্তরাল এবং $\overline{OH}$ উহাদের ছেদক।

$\therefore\ \angle AOC = \angle HAL$; $\therefore\ \triangle OCA$ ও $\triangle ALH$ সদৃশ।

$\therefore\ \dfrac{\overline{OC}}{CA} = \dfrac{\overline{AL}}{LH} = \dfrac{\overline{AL}}{AK}$, অথবা, $\dfrac{\overline{OC}}{CA} = \dfrac{P}{S}$;

অথবা, $P.\overline{CA} = S.\overline{OC}$ ... ... (1)

অনুরূপভাবে, $\triangle OBC$ ও $\triangle EBF$-এর মধ্যে

$\angle OBC$ সাধারণ, এবং $\overline{OC}$ ও $\overline{EF}$ সমান্তরাল ও $\overline{OB}$ উহাদের ছেদক বলিয়া, $\angle COB =$ অনুরূপ $\angle FEB$.

$\therefore$ ত্রিভুজ-দুইটি সদৃশ। $\therefore\ \dfrac{\overline{OC}}{CB} = \dfrac{\overline{EF}}{BF} = \dfrac{\overline{BD}}{BF}$,

অর্থাৎ $\frac{\overline{OC}}{\overline{CB}} = \frac{Q}{S}$,

অর্থাৎ $Q.\overline{BC} = S.\overline{OC}$ ... ... (2)

(1) ও (2) হইতে $\mathbf{P}.\overline{\mathbf{AC}} = \mathbf{Q}.\overline{\mathbf{BC}}$ ; অথবা, $\frac{\mathbf{P}}{\mathbf{Q}} = \frac{\overline{\mathbf{BC}}}{\overline{\mathbf{AC}}}$.

ইহা হইতে $C$ বিন্দু বা $P$ ও $Q$-র লব্ধির প্রয়োগ-বিন্দু পাওয়া যায়।

লক্ষ্য করিবার বিষয় যে, $C$ বিন্দু, বৃহত্তর বল $P$-র যে-পাশে $Q$ বল সক্রিয়, তাহার বিপরীত দিকে অবস্থিত।

## উদাহরণমালা

**উদাহরণ 1.** 6 ফুট লম্বা একটি হালকা অনুভূমিক লাঠির যথাক্রমে $A$ ও $B$ প্রান্তে সক্রিয় 7 পা. ও 5 পাউণ্ডের দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধির মান ও প্রয়োগ-বিন্দু নির্ণয় কর।

সদৃশ ও সমান্তরাল বল-দুইটির লব্ধি যেন $AB$ লাঠিখানির $C$ বিন্দুগামী। তাহা হইলে, স্পষ্টতই $7 \times \overline{AC} = 5 \times \overline{BC}$ ;

অথবা, $7\overline{AC} = 5(\overline{AB} - \overline{AC}) = 5(6 - \overline{AC})$, [ $\because$ $\overline{AB} = 6$ ফুট ]

$= 30 - 5\overline{AC}$ ; অথবা, $12\overline{AC} = 30$.

$\therefore$ $\overline{AC} = \frac{30}{12} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$ ফুট।

বল-দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বলিয়া তাহাদের লব্ধির মান $= 7 + 5 = 12$ পাউণ্ড।
$\therefore$ $P$ বলের প্রয়োগ-বিন্দু হইতে $2\frac{1}{2}$ ফুট দূরে $C$ বিন্দুতে এই লব্ধি সক্রিয়।

**উদাহরণ 2.** একটি লোহার 20 ইঞ্চি দীর্ঘ এবং 8 পাউণ্ড ভারী সমদণ্ড এক-প্রান্তে বাঁধা উল্লম্ব দড়ির দ্বারা ঝুলানো রহিয়াছে। দড়ির টান 3 পাউণ্ড হইলে, দণ্ডটির কোথায় একটি খুঁটি স্থাপন করিলে উহা অনুভূমিক রেখায় স্থির থাকিবে? খুঁটির উপর তখন কত চাপ পড়িবে?

সমদণ্ডের ভার উহার মধ্যবিন্দুগামী ও নিম্নমুখী। দড়ির টান এখানে ঊর্ধ্বমুখী। সুতরাং 8 পা. ভার ও 3 পা. টান অসদৃশ সমান্তরাল বল। সমদণ্ডের মধ্যবিন্দু হইতে $x$ ইঞ্চি দূরে যেন উহাদের লব্ধি সক্রিয়। স্পষ্টতই লব্ধির প্রয়োগ-বিন্দুতেই খুঁটি লাগাইতে হইবে।

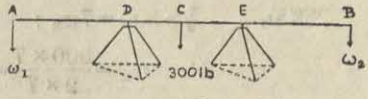
দড়িবাঁধা প্রান্ত হইতে ঐ বিন্দুর দূরত্ব $(10 + x)$ ইঞ্চি।

এখন, $8x = 3(10 + x) = 30 + 3x$,

বা $5x = 30$ ; $\therefore$ $x = 6$ ইঞ্চি।

$\therefore$ দড়িবাঁধা প্রান্ত হইতে $10 + 6 = 16$ ইঞ্চি দূরে খুঁটিটি লাগাইতে হইবে।
ভার ও টান অসদৃশ সমান্তরাল বল বলিয়া, তাহাদের লব্ধি $= 8 - 3 = 5$ পাউণ্ড।
$\therefore$ খুঁটির উপর চাপ $= 5$ পাউণ্ড।

**উদাহরণ 3.** $AB$ একটি 22 ফুট দীর্ঘ ও 300 পাউণ্ড ভারী বরগা। যে-বিন্দু দিয়া উহার ভার সক্রিয় সেই $C$ বিন্দু $A$ বিন্দু হইতে $11\frac{1}{2}$ ফুট দূরে অবস্থিত। বরগাটি $D$ ও $E$ বিন্দুতে দুইটি তেপায়ার উপর অনুভূমিক ভাবে শায়িত। $\overline{AD} = 7\frac{1}{2}$ ফুট এবং $\overline{AE} = 15$ ফুট হইলে, প্রত্যেকটি তেপায়ার উপর চাপ নির্ণয় কর।




55 নং চিত্র

বরগাটিকে না উল্টাইয়া এক-একটি প্রান্তে সবচেয়ে ভারী কত ওজনের একটি মানুষ বসিতে পারে? [ Oxford & Cambridge Jt. Board ]

প্রশ্নানুসারে, $\overline{AD} = 7\frac{1}{2}$ ফুট, $\overline{AC} = 11\frac{1}{2}$ ফুট এবং $\overline{AE} = 15$ ফুট।

স্বতরাং, $\overline{CD} = \overline{AC} - \overline{AD} = 11\frac{1}{2} - 7\frac{1}{2} = 4$ ফুট

এবং $\overline{EC} = \overline{AE} - \overline{AC} = 15 - 11\frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$ ফুট।

স্পষ্টতই, $D$ ও $E$ বিন্দুতে তেপায়া-দুইটির উপর চাপ সদৃশ ও সমান্তরাল এবং বরগাটি যেহেতু স্থির রহিয়াছে, সেইহেতু ঐ দুইটি চাপের লব্ধি বরগার ভার অর্থাৎ 300 পাউণ্ডের সমান মানবিশিষ্ট। $D$ ও $E$ বিন্দুতে চাপ যথাক্রমে যদি $P$ ও $Q$ হয়, তবে

$$4P = 3\tfrac{1}{2}.Q,$$

অথবা, $$P = \tfrac{7}{2} \times \tfrac{1}{4}Q = \frac{7Q}{8}.$$

আবার, $P + Q = 300,$

অথবা, $\dfrac{7Q}{8} + Q = 300,$

অথবা, $\dfrac{15Q}{8} = 300,$

$$\therefore \quad Q = \frac{300 \times 8}{15} = 160 \text{ পাউণ্ড।}$$

$$\therefore \quad P = 160 \times \tfrac{7}{8} = 140 \text{ পাউণ্ড।}$$

আবার, $A$ প্রান্তে সবচেয়ে ভারী মানুষটির ওজন $w_1$ এবং $B$ প্রান্তে সবচেয়ে ভারী মানুষটির ওজন যদি $w_2$ হয়, তবে

$\overline{AD}.w_1 = \overline{CD}.300,$ [ $\because$ এক্ষেত্রে $E$ তেপায়াটির উপর চাপ নাই ]

অথবা, $7\frac{1}{2} \times w_1 = 4 \times 300;$

$$\therefore \quad w_1 = \frac{4 \times 300 \times 2}{15} = 160 \text{ পাউণ্ড।}$$

দ্বিতীয়ত, $\overline{EC}.300 = \overline{BE}.w_2$, [ ∵ এক্ষেত্রে $D$ তেপায়াটির উপর চাপ নাই। ]

অথবা, $\frac{7}{2} \times 300 = 7w_2$ ;

$$\therefore \quad w_2 = \frac{300 \times 7}{2 \times 7} = 150 \text{ পাউণ্ড।}$$

**উদাহরণ 4.** একটি লোহার সমদণ্ডের প্রতি ফুট 6 পাউণ্ড ভারী। এই দণ্ডটির একটি প্রান্তে 144 পাউণ্ড ভার ঝুলানো থাকিলে, সেই প্রান্ত হইতে 1 ফুট দূরে ঠেকা দিয়া অনুভূমিক রেখায় স্থির রাখা যায়। দণ্ডটির দৈর্ঘ্য কত ?

দণ্ডটির দৈর্ঘ্য যদি $l$ ফুট হয়, তবে উহার ওজন $6l$ পাউণ্ড। এই ওজন মধ্য-বিন্দুগামী। যে-বিন্দুতে দণ্ডটি সাম্যাবস্থায় আছে তাহা এই ওজনের প্রয়োগ-বিন্দু হইতে $(\frac{1}{2}l - 1)$ ফুট দূরে।

$\therefore \quad (\frac{1}{2}l - 1)6l = 144 \times 1,$

বা, $3l^2 - 6l - 144 = 0,$

বা, $l^2 - 2l - 48 = 0,$

বা, $(l-8)(l+6) = 0.$

$\therefore \quad l - 8 = 0$, যেহেতু $l + 6 \neq 0$, কারণ দৈর্ঘ্য ঋণাত্মক হইতে পারে না। অর্থাৎ $l = 8$ ফুট।

অতএব, দণ্ডটির নির্ণেয় দৈর্ঘ্য = 8 ফুট।

**উদাহরণ 5.** একটি কঠোর বস্তুর $A$ ও $B$ বিন্দুতে সক্রিয় দুইটি সমান্তরাল বল $P$ ও $Q$ যদি পরস্পর স্থান-বিনিময় করে, তবে দেখাও যে, তাহাদের লব্ধি $\overline{AB}$ বরাবর $d$ দূরত্বে সরিয়া যায়, যেখানে $d = \frac{P-Q}{P+Q}.\overline{AB}.$ [ C. U. I.Sc. 1950 ]

প্রথম ক্ষেত্রে বস্তুটির উপর $\overline{AB}$ রেখার $C$ বিন্দুতে এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে $P$ ও $Q$-র স্থান-বিনিময়ের পর $C'$ বিন্দুতে যেন বল-দুইটির লব্ধি সক্রিয় হয়। এইভাবে লব্ধির প্রয়োগ-বিন্দু যদি $C$ হইতে $B$-র দিকে $C'$ বিন্দুতে সরিয়া যায়, তবে $\overline{C'C} = d.$

$\therefore$ প্রথম ক্ষেত্রে, $P.\overline{AC} = Q.\overline{BC}$

এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, $P.\overline{BC'} = Q.\overline{AC'},$

অর্থাৎ, $P(\overline{AB} - \overline{AC'}) = Q(\overline{AB} - \overline{BC'}),$

অর্থাৎ, $P.\overline{AB} - P.\overline{AC'} = Q.\overline{AB} - Q.\overline{BC'},$

অর্থাৎ, $(P-Q)\,\overline{AB} = P.\overline{AC'} - Q.\overline{BC'}$

$$= P(\overline{AC} + \overline{CC'}) - Q(\overline{BC} - \overline{CC'})$$

$$= P.\overline{AC} + P.\overline{CC'} - Q.\overline{BC} + Q.\overline{CC'}$$
$$= (P+Q)\overline{CC'}, \quad [\because \quad P.\overline{AC} = Q.\overline{BC}].$$
$$\therefore \quad \overline{CC'} = \frac{P-Q}{P+Q}.\overline{AB};$$
$$\therefore \quad d = \frac{P-Q}{P+Q}.\overline{AB}.$$

**উদাহরণ 6.** দুইটি অসদৃশ সমান্তরাল বলের মান $P$ ও $Q$. $P$ বল $Q$ অপেক্ষা বৃহত্তর। যদি $P$ ও $Q$ উভয়ের সহিত সমান পরিমাণ বল যুক্ত হয়, তবে দেখাও যে, তাহাদের লব্ধির ক্রিয়ারেখা $P$ হইতে আরও দূরে সরিয়া যাইবে।

$P$ ও $Q$ উভয়েরই সহিত যেন $r$ বল যুক্ত হয়। $\overline{AB}$ রেখার যথাক্রমে $A$, $B$ ও $C$ বিন্দুতে যদি $P$, $Q$ ও তাহাদের লব্ধি সক্রিয় হয়, তবে $C$ বিন্দু $\overline{BA}$-এর বর্ধিতাংশের উপর অবস্থিত। দ্বিতীয় ক্ষেত্রেও যেহেতু $P+r > Q+r$, সেইহেতু নূতন লব্ধির প্রয়োগ-বিন্দু $\overline{BA}$-র বর্ধিতাংশের উপরই থাকিবে। এই বিন্দু যেন $C'$. তাহা হইলে,

প্রথম ক্ষেত্রে $P.\overline{AC} = Q.\overline{BC} = Q\,(\overline{AB} + \overline{AC})$;

$\therefore \quad P.\overline{AC} - Q.\overline{AC} = Q.\overline{AB}$,

অথবা, $(P-Q).\overline{AC} = Q.\overline{AB}$. ... (i)

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, $P$-র স্থলে $P+r$ এবং $Q$-র স্থলে $Q+r$ বসাইলে,

(i) হইতে, $(P+r-Q-r)\,\overline{AC'} = (Q+r)\,\overline{AB}$,

অথবা, $(P-Q)\,\overline{AC'} = (Q+r)\,\overline{AB}$ ... (ii)

(i) কে (ii) দ্বারা ভাগ করিলে, $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AC'}} = \dfrac{Q}{Q+r}$.

$\because \quad Q+r > Q, \quad \therefore \quad AC' > AC$,

অর্থাৎ, $P$ হইতে লব্ধির ক্রিয়ারেখা $C$-র চেয়ে আরও দূরে $C'$ বিন্দুতে সরিয়া গিয়াছে।

## প্রশ্নমালা 12

1. (*a*) দুইটি **সদৃশ** সমান্তরাল বল $P$ ও $Q$, $\overline{AB}$ রেখার যথাক্রমে $A$ ও $B$ বিন্দুতে সক্রিয়। নিম্নলিখিত প্রত্যেক প্রশ্নে $P$ ও $Q$-র প্রদত্ত মানের জন্য লব্ধি ও ঐ লব্ধির প্রয়োগ-বিন্দু নির্ণয় কর :—

(i) $P=3$ একক, $Q=4$ একক এবং $\overline{AB}=16$ ইঞ্চি।

(ii) $P=7$ " $Q=4$ " এবং $\overline{AB}=5\frac{1}{2}$ ফুট।

(iii) $P=4$ " $Q=12$ " এবং $\overline{AB}=3$ ফুট।

(iv) $P=5\frac{3}{8}$ " $Q=12\frac{3}{8}$ " এবং $\overline{AB}=1$ ফুট 8 ইঞ্চি।

(v) $P=Q=7$ একক এবং $\overline{AB}=2\frac{1}{3}$ ফুট।

(*b*) উপরের (i) হইতে (iv) পর্যন্ত প্রশ্নে $P$ ও $Q$ যদি **অসদৃশ** সমান্তরাল বল হয়, তবে উহাদের লব্ধি ও প্রয়োগ-বিন্দু নির্ণয় কর।

2. (*a*) দুইটি **সদৃশ** সমান্তরাল বল $P$ ও $Q$ এবং তাহাদের লব্ধি $R$ যদি $AB$ রেখায় যথাক্রমে $A$, $B$ ও $C$ বিন্দুতে সক্রিয় হয়, তবে—

(i) যখন, $P=2$ একক, $Q=3$ একক এবং $\overline{BC}=4$ ইঞ্চি, তখন $\overline{AB}=$ কত ?

(ii) যখন, $P=5$ একক, $\overline{AC}=8$ ইঞ্চি এবং $\overline{AB}=1\frac{1}{2}$ ফুট, তখন $Q=$ কত ?

(iii) যখন, $\overline{AC}=7$ ইঞ্চি, $\overline{BC}=5$ ইঞ্চি এবং $Q=14$ একক, তখন $R=$ কত ?

(*b*) $P$ ও $Q$ **অসদৃশ** সমান্তরাল বল ধরিয়া উপরের প্রশ্নগুলির সমাধান কর।

3. পরস্পর হইতে 24 ইঞ্চি দূরে অবস্থিত দুই বিন্দুতে সক্রিয় 7 ও 5 পাউণ্ডের দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধির মান ও প্রয়োগ-বিন্দু নির্ণয় কর।

4. দুই ব্যক্তি 160 পাউণ্ড ভারী এবং 16 ফুট লম্বা একটি সরল সমসত্ত্ব দণ্ড বহন করিতেছে। তাহাদের একজন দণ্ডটির এক প্রান্ত হইতে 2 ফুট দূরে এবং অপরজন অপর প্রান্ত হইতে 3 ফুট দূরে দণ্ডটিকে ধারণ করে। প্রত্যেকে কত ভার বহন করে ?

5. একটি সরল সমদণ্ড 3 ফুট লম্বা ; উহার এক প্রান্তে একটি 4 পাউণ্ড ভার স্থাপন করিলে, ঐ প্রান্ত হইতে 4 ইঞ্চি দূরবর্তী এক বিন্দুতে দণ্ডটি সুস্থিত হয়। দণ্ডটির ভার নির্ণয় কর।

6. দুই ব্যক্তি একটি নির্ভার দণ্ডে ঝুলাইয়া $1\frac{1}{2}$ মণ ভারী একখণ্ড পাথর বহন করে। দণ্ডটি 6 ফুট লম্বা এবং উহার এক এক প্রান্ত এক এক জনের স্কন্ধে স্থাপিত। পাথরখণ্ডটি যে-বিন্দু হইতে ঝুলিতেছে সেই বিন্দু যদি একজনের দিকে অপরজন অপেক্ষা 1 ফুট নিকটবর্তী হয়, তবে প্রত্যেকের স্কন্ধে কত চাপ পড়ে ?

7. নির্ভার ও 6 ফুট লম্বা একটি তক্তার সাহায্যে দুইজন লোক 270 পাউণ্ড ভারী একখণ্ড পাথর সরাইতে চাহে। তাহাদের মধ্যে অধিকতর বলশালী ব্যক্তিটিকে 180 পাউণ্ড ভার বহন করিতে দিলে পাথরখণ্ডটিকে তক্তার কোন্ বিন্দুতে স্থাপন করিতে হইবে ?

8. দুই ব্যক্তির মধ্যে একজন অপরজন হইতে অধিকতর বলবান। 6 ফুট লম্বা একটি হালকা দণ্ডের সাহায্যে তাহাদের একটি 300 পাউণ্ডের ভরকে সরাইতে হইবে। দুর্বলতর ব্যক্তিটিকে তাহার সামর্থ্য অনুযায়ী পূর্ণভার 100 পাউণ্ড বহন করিতে দিলে দণ্ডটির কোথায় পাথরখণ্ডটি বাঁধিতে হইবে ?

9. 10 ফুট লম্বা একটি বরগার দুই প্রান্তে দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল সক্রিয়। তাহাদের লব্ধি যদি 25 পাউণ্ড হয় এবং ঐ লব্ধি যদি বরগার এমন এক বিন্দু দিয়া যায়, যে-বিন্দুতে বরগাটি 2 : 3 অনুপাতে বিভক্ত হয়, তবে ঐ বল-দুইটির মান নির্ণয় কর।

10. একটি ভারী সমদণ্ড একই অনুভূমিক রেখায় পরস্পর হইতে এক ফুট দূরবর্তী

দুইটি খোঁটার উপর স্থাপিত রহিয়াছে। খোঁটা-দুইটির উপর চাপের অনুপাত যদি 1 : 2 হয়, তবে দণ্ডটির মধ্যবিন্দু হইতে খোঁটা-দুইটির দূরত্ব নির্ণয় কর।

11. পরস্পর হইতে অনুভূমিক রেখায় 1 ফুট দূরে অবস্থিত দুইটি খোঁটার উপর 2 ফুট লম্বা ও 30 পাউণ্ড ভারী একটি সমদণ্ড অনুভূমিকভাবে শায়িত। দণ্ডটি কি-ভাবে স্থাপিত হইলে খোঁটা-দুইটির উপর চাপের অনুপাত 2 : 3 হইবে ?

12. দুইটি বস্তুকণা 3 আউন্স ও 5 আউন্স ভারী। উহারা যথাক্রমে $A$ ও $B$ বিন্দুতে স্থাপিত, যেখানে $A$ হইতে $B$ বিন্দুর দূরত্ব 30 ইঞ্চি। $A$ হইতে ভারকেন্দ্র, অর্থাৎ, বস্তু-দুইটির ভারের লব্ধির প্রয়োগ-বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় কর। বস্তুকণা-দুইটিকে যদি এখন 30 ইঞ্চি লম্বা এবং 12 আউন্স ভারী একটি সরু সমদণ্ড দিয়া যুক্ত করা যায়, তবে $D$ বিন্দুতে উহা সুস্থিত হয়। $\overline{AD}$-র দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

13. 20 ফুট লম্বা ও 150 পাউণ্ড ভারী $AB$ দণ্ডটিকে $A$ ও $B$ প্রান্তে ধারণ করিয়া দুই ব্যক্তি উহাকে অনুভূমিকভাবে বহন করে। $A$ প্রান্তস্থিত ব্যক্তি যদি 90 পাউণ্ড ভার বহন করে, তবে $A$ হইতে দণ্ডটির ভারকেন্দ্রের দূরত্ব নির্ণয় কর। অপর ব্যক্তি $B$ বিন্দুর বদলে $C$ বিন্দুতে যদি দণ্ডটিকে ধারণ করিত, তবে তাহাকে 80 পাউণ্ড ভার বহন করিতে হইত। $\overline{AC}$-র দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

14. এক ব্যক্তি একটি হালকা লাঠির এক মাথায় বাঁধিয়া 6 পাউণ্ড ভারী একটি পুঁটলি কাঁধের উপর বহন করে। লাঠিটির পুঁটলি-বাঁধা মাথা হইতে কাঁধের দূরত্ব 6 ইঞ্চি। লাঠিটির উপর কোন্ বিন্দুতে পুঁটলির ভারের অর্ধেকের সমান চাপ দিলে ভারসাম্য স্থাপিত হইবে ?

15. 10 ইঞ্চি লম্বা ও 12 পাউণ্ড ভারী একটি সমদণ্ড একটি অনুভূমিক টেবিলের উপর এমনভাবে রহিয়াছে যে, উহার 3 ইঞ্চি পরিমাণ অংশ টেবিলের বাহিরে বাড়িয়া আছে। টেবিলের বাহিরে দণ্ডটির প্রান্ত হইতে সবচেয়ে কত বেশী ভার ঝুলাইয়া দিলে ভারসাম্য অক্ষুণ্ণ থাকিবে ?

16. একটি লোহার সমদণ্ডের প্রতি ফুটের ওজন 4 পাউণ্ড। দণ্ডটির এক মাথায় 5 পাউণ্ডের ভার ঝুলাইয়া দিলে ঐ মাথা হইতে 2 ফুট দূরে একটি বিন্দুতে উহা সুস্থিত হয়। দণ্ডটির দৈর্ঘ্য কত ? [ C. U. Matric. 1924 ]

[ সংকেত : দৈর্ঘ্য $2l$ ফুট হইলে দণ্ডটির ভার $8l$ পাউণ্ড। দণ্ডটি যে-বিন্দুতে সুস্থিত, মধ্যবিন্দু হইতে সেই বিন্দুর দূরত্ব $(l-2)$ ফুট। $\therefore\ (l-2)8l=5\times 2$, ইত্যাদি। ]

17. 3 ফুট লম্বা ও 12 পাউণ্ড ভারী একটি সমদণ্ড একই অনুভূমিক রেখায় পরস্পর হইতে 9 ইঞ্চি দূরে অবস্থিত দুইটি খোঁটার উপর স্থাপিত। একটি খোঁটার উপর চাপ যদি অপর খোঁটার উপর চাপ অপেক্ষা 3 পাউণ্ড বেশী হয়, তবে দণ্ডটির অবস্থান নির্ণয় কর।

18. দুই ব্যক্তি একটি হালকা তক্তার উপর 311 পাউণ্ড ওজনের একখণ্ড পাথর বহন করিতে চাহে। তক্তাখানির কোন্ বিন্দুতে পাথরখণ্ড স্থাপন করিলে, একজন অপরজন অপেক্ষা 205 পাউণ্ড বেশী ভার বহন করিবে?

19. 8 ফুট লম্বা একটি সরল বংশদণ্ডের প্রান্তদ্বয় একই অনুভূমিক রেখায় স্থাপিত দুইটি মসৃণ খোঁটা $P$ ও $Q$-এর উপর স্থাপিত। দণ্ডটির $R$ বিন্দু হইতে একটি ভার ঝুলিতেছে। যদি $\overline{PR}=3\overline{RQ}$ হয় এবং $Q$ বিন্দুতে চাপ যদি $P$ বিন্দুতে চাপ অপেক্ষা 325 পাউণ্ড বেশী হয়, তবে ভরটির ওজন নির্ণয় কর।

20. 6 ফুট লম্বা একটি হালকা দণ্ডের দুইপ্রান্ত দুই ব্যক্তির কাঁধে স্থাপিত। ঐ দণ্ড হইতে $1\frac{1}{2}$ হন্দরের একটি পিপা ঝুলিতেছে। যে-বিন্দু হইতে পিপাটি ঝুলানো, সেই বিন্দু এক ব্যক্তি অপেক্ষা অপর ব্যক্তির দিকে 1 ফুট অধিকতর নিকটবর্তী। প্রত্যেকের কাঁধে কত চাপ পড়িতেছে?

21. 9 ফুট লম্বা হালকা একখানা বাঁশের দুই প্রান্ত দুই ব্যক্তির কাঁধে স্থাপিত। বাঁশের যে-বিন্দু হইতে 225 পাউণ্ডের একটি ভার ঝুলিতেছে, সেই বিন্দু এক ব্যক্তি অপেক্ষা অপর ব্যক্তির 1 ফুট নিকটতর। উহাদের প্রত্যেকের কাঁধে কত চাপ পড়ে?

22. 3 ফুট 6 ইঞ্চি লম্বা ও 9 পাউণ্ড ভারী একটি অনুভূমিক সমদণ্ডের এক প্রান্ত একটি মসৃণ পেরেকের উপর স্থাপিত এবং অপর প্রান্ত হইতে 6 ইঞ্চি দূরে একটি বিন্দুর সহিত যুক্ত একগাছি উলম্ব দড়ির সাহায্যে দণ্ডটি ধৃত। দড়ির টান নির্ণয় কর।

23. পরস্পর হইতে 18 ইঞ্চি দূরে সক্রিয় এমন দুইটি অসদৃশ সমান্তরাল বল নির্ণয় কর, যাহারা উহাদের বৃহত্তর বলটি হইতে 8 ইঞ্চি দূরে সক্রিয় 30 পাউণ্ড একটি সমান্তরাল বলের সমান। [ C. U. I.Sc. 1933 ]

24. একটি হালকা দণ্ডের দুই প্রান্তে ঝুলাইলে, 10 পাউণ্ড ও 7 পাউণ্ডের দুইটি ভার সাম্যাবস্থায় থাকে। যদি বৃহত্তর ভারটির সহিত 3 পাউণ্ড ভার যুক্ত হয়, তবে সাম্যাবস্থা রক্ষার জন্য আলম্ব-বিন্দু অর্থাৎ ভার-দুইটির লব্ধির প্রয়োগ-বিন্দু 1 ইঞ্চি সরিয়া যায়। দণ্ডটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [ C. U. Matric. 1919 ]

25. 10 পাউণ্ড ও 15 পাউণ্ডের দুইটি সমান্তরাল বলের লব্ধির ক্রিয়ারেখা ক্ষুদ্রতর বলটি হইতে 20 ফুট দূরে অবস্থিত। বল-দুইটির ক্রিয়ারেখার মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর।

26. 3 পাউণ্ড ভারী ও 4 ফুট লম্বা একটি সমদণ্ড। উহা এক প্রান্তের দিকে একটি পেরেকের উপর স্থাপিত। অপর প্রান্তে প্রযুক্ত উপরের দিকে উল্লম্বভাবে সক্রিয় 1 পাউণ্ড বল দ্বারা উহা সাম্যাবস্থায় আছে। দণ্ডটির কেন্দ্র হইতে পেরেকের দূরত্ব নির্ণয় কর।

27. পরস্পর হইতে 9 ইঞ্চি দূরে অবস্থিত দুইটি পেরেকের উপর 16 ইঞ্চি লম্বা একটি দণ্ড এমনভাবে স্থাপিত রহিয়াছে যে, উহার মধ্যবিন্দু পেরেক-দুইটির ঠিক মধ্যস্থলে

আছে। সাম্যাবস্থা অক্ষুণ্ণ রাখিয়া দণ্ডটির দুই প্রান্ত হইতে পর পর যে বৃহত্তম ভার ঝুলানো যায়, তাহারা যথাক্রমে 4 ও 5 পাউণ্ড। দণ্ডটির ভার ও ঐ ভারের প্রয়োগ-বিন্দু নির্ণয় কর। [ U. P. B. 1940 ]

28. দুইটি অসদৃশ সমান্তরাল বল $P$ ও $Q$ $(P > Q)$ যথাক্রমে $A$ ও $B$ বিন্দুতে সক্রিয়। যদি $P$ ও $Q$ উভয়েরই সহিত $x$ বল যুক্ত হয়, তবে প্রমাণ কর যে, উহাদের লব্ধি $d$ দূরত্বে সরিয়া যাইবে, যেখানে $d = \frac{x}{P-Q} \cdot \overline{AB}$. [ W. B. H. S. 1968 ]

29. একটি বর্গক্ষেত্রের ক্রমানুসারে গৃহীত বাহুগুলি বরাবর $P, 2P, 3P$ ও $4P$ বলগুলি সক্রিয়। উহাদের লব্ধি নির্ণয় কর।

30. $2P, P$ ও $-P$ এই তিনটি সমান্তরাল বল একটি ত্রিভুজের $A, B$ ও $C$ শীর্ষবিন্দুতে সক্রিয়। প্রমাণ কর যে, তাহাদের লব্ধি $G$ বিন্দুগামী, যেখানে $BDAG$ একটি সামান্তরিক এবং $A$ বিন্দু হইতে $\overline{AD}$ একটি মধ্যমা। [ U. P. B. 1951 ]

31. $P$ ও $Q$ দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল একটি বস্তুর দুইটি প্রদত্ত বিন্দুতে সক্রিয়। $Q$ বলকে যদি $\frac{P^2}{Q}$ বলে পরিবর্তিত করা যায়, তবে প্রমাণ কর যে, লব্ধির ক্রিয়ারেখা-বল-দুইটি স্থান বিনিময় করিলে যাহা হইত, ঠিক তাহাই হইবে।

32. 6 পাউণ্ড ভারী ও 4 ফুট লম্বা একটি সমদণ্ড, উহার একপ্রান্ত হইতে ঝুলানো একটি 2 পাউণ্ড ভর দ্বারা একটি খুঁটির উপর অনুভূমিক রেখায় ধৃত আছে। দণ্ডটির মধ্যবিন্দু হইতে খুঁটির দূরত্ব নির্ণয় কর। [ W. B. H. S. 1964 ]

33. 4 পাউণ্ড ও 6 পাউণ্ডের দুইটি অসদৃশ সমান্তরাল বল একটি সরল রেখার দুইটি বিন্দুতে সক্রিয় এবং তাহাদের প্রয়োগ-বিন্দু-দুইটির ব্যবধান 2 ফুট। বল-দুইটির সহিত সমান সমান বল যুক্ত হইলে উহাদের লব্ধির প্রয়োগ-বিন্দু 2 ফুট দূরে সরিয়া যায়। এই সমান বলের মান নির্ণয় কর। [ W. B. H. S. 1965 ]

34. দুই ব্যক্তি একটি 8 ফুট লম্বা নির্ভার সমদণ্ডের সাহায্যে 4 হন্দরের একটি ওজন বহন করে। দণ্ডটির এক প্রান্ত হইতে $1\frac{1}{2}$ ফুট দূরে একজন এবং অপর প্রান্ত হইতে $2\frac{1}{2}$ ফুট দূরে আরেকজন থাকিলে এবং উহার মধ্যবিন্দু হইতে ভারটি ঝুলানো হইলে, প্রত্যেক ব্যক্তি কত ভার বহন করে? [ W. B. H. S. 1966 ]

35. 4 পাউণ্ড ও 6 পাউণ্ডের দুইটি সদৃশ বল একই সরল রেখায় 5 ফুট ব্যবধানে দুইটি বিন্দুতে সক্রিয়। প্রত্যেকটি বলের 1 পাউণ্ড পরিমাণ বৃদ্ধি হইলে, তাহাদের লব্ধি কোন্ দিকে কতদূর সরিয়া যাইবে? [ W. B. H. S. 1967 ]

36. 60 কিলোগ্রামের একটি ওজন 4 মিটার লম্বা নির্ভার একটি দণ্ডের সাহায্যে দুই ব্যক্তি দ্বারা বাহিত হয়। ওজনটি দণ্ডটির মধ্যবিন্দুতে এবং উহার এক প্রান্ত হইতে

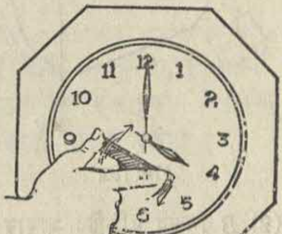
$\frac{1}{2}$ মিটার দূরে একজন ও অপর প্রান্ত হইতে 1 মিটার দূরে আরেকজন থাকিলে, প্রত্যেক ব্যক্তি দ্বারা বাহিত ওজন-পরিমাণ নির্ণয় কর। [ W. B. H. S. 1970 ]

37. 2 ফুট লম্বা নির্ভার একটি দণ্ড অনুভূমিক অবস্থায় দুইটি খোঁটার মধ্যে ধৃত আছে। খোঁটা-দুইটির ব্যবধান 3 ইঞ্চি এবং উহাদের একটি খোঁটা দণ্ডটির এক প্রান্তে রহিয়াছে। দণ্ডের অপর প্রান্তে 5 পাউণ্ডের একটি ভার ঝুলানো থাকিলে, খোঁটা-দুইটির উপর চাপের পরিমাণ নির্ণয় কর। [ W. B. H. S. 1971 ]

## দ্বাদশ অধ্যায়

# বলের ভ্রামক ও যুগ্মবল
# ( Moment of a Force and Couples )

**12·1. দুইটি সমান ও অসদৃশ সমান্তরাল বল বা যুগ্মবল (Two equal and unlike parallel forces or a couple) :** দুইটি অসদৃশ সমান্তরাল বল যদি অসমান হয়, তবে তাহাদের লব্ধি বাহির করা যায়। কিন্তু উহারা যদি সমান হয়, তবে তাহাদের লব্ধি-নির্ণয় সম্ভব নয়। বস্তুত এইরূপ সমান ও অসদৃশ সমান্তরাল দুইটি বলের লব্ধি হিসাবে কখনও একটিমাত্র বল কল্পনাও করা যায় না। এই ধরনের একজোড়া বল একটা ঘূর্ণন সৃষ্টি করে এবং এইরকম **একজোড়া সমান ও অসদৃশ সমান্তরাল বলকে একটি যুগ্মবল** (*a couple*) **বলে।**



56নং চিত্র

বড় ঘড়ির চাবিতে দম দিবার সময়, দরজার হাতল ঘুরাইবার সময় ও দুই আঙুলে লাট্টু ঘুরাইবার সময় যুগ্মবল প্রয়োগ করা হয়।

যুগ্মবল যেহেতু ঘূর্ণন সৃষ্টি করে, সেইহেতু ঘূর্ণনের দিক্ ও মান দ্বারা যুগ্মবলের দিক্-মান নির্ণয় করিতে হইবে। সুতরাং এখন ঘূর্ণন সম্পর্কে কিছু আলোচনা করা যাক্।

**12·2. চলন ও ঘূর্ণন (Translation and rotation) :** ইতিপূর্বে আলোচিত হইয়াছে যে, গতি দুই প্রকারের হইতে পারে; যথা : (1) **চলন** ও (2) **ঘূর্ণন।**

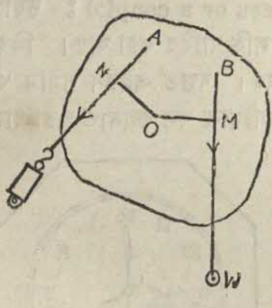
গতিবিদ্যার প্রায় সবটাই এই চলন বা চলন্ত বস্তুর আলোচনা। এইবার ঘূর্ণনের আলোচনা করা প্রয়োজন।

**ঘূর্ণন :** ঘূর্ণন-সম্বন্ধে প্রথম প্রশ্ন হইল, উহার কারণ কি? বেশী সোজা করিয়া বলিলে, বলকেই ঘূর্ণনের কারণ বলিতে হয়। কিন্তু একটি বস্তুর উপর যেখানে হউক বল প্রয়োগ করিলেই ঘূর্ণন-সঞ্চার হয় না; ঘূর্ণন-সঞ্চার হয় উহার স্থানবিশেষে বল প্রয়োগ করিলে। উদাহরণস্বরূপ, ঘরের একপাটি দরজার কথা ভাবা যাক। উহা কব্জার উপর চৌকাঠের সঙ্গে জোড়া। কব্জার দিকে দরজাটির প্রস্থ বরাবর ঠেলিলে উহা ঘোরে তো নাই, অনেকসময় নড়েও না। আবার দরজার পাল্লার উপর সামনে বা পিছনে যে দিকে খুশী ঠেলিলে উহা কব্জার উপর ঘুরিবে। দরজার এই উদাহরণটি

আমাদের সকলেরই কাছে সুপরিচিত। ইহা হইতে আমরা এই সিদ্ধান্তে উপনীত হই : **কোন বস্তু তাহার কোন বিন্দুর চতুর্দিকে যদি ঘোরে, তবে উহার উপর প্রযুক্ত বলের ক্রিয়ারেখা কখনও সেই বিন্দু দিয়া যায় না।**

ঘূর্ণন-সম্বন্ধে দ্বিতীয় প্রশ্ন, উহার পরিমাণ কিসের উপর নির্ভর করে এবং তাহা মাপিবার উপায়ই বা কি? নিচে বর্ণিত পরীক্ষাটির মধ্যে এই প্রশ্নের উত্তর পাওয়া যাইবে।

**পরীক্ষা :** 57নং চিত্রের মতো একটি ধাতুর পাতলা পাত অনুভূমিক একটি অক্ষের $O$ বিন্দুতে উল্লম্বভাবে স্থাপিত। অক্ষটি অত্যন্ত মসৃণ এবং পাতটি প্রায় অবাধে উহার চারিদিকে ঘুরিতে পারে। পাতটির $A$ ও $B$ বিন্দুতে দুইগাছি হালকা (অস্থিতিস্থাপক) দড়ি বাঁধা আছে।



57নং চিত্র

এখন, (1) $A$ বিন্দুতে বাঁধা দড়িটির অপর মাথায় যদি একটি স্প্রিং-তুলা বাঁধিয়া টানা যায়, তবে পাতটি ঘড়ির কাঁটার উল্টাদিকে ঘুরিতে শুরু করিবে।

আর যদি $A$ বিন্দুর দড়িতে কিছু না বাঁধিয়া, (2) $B$ বিন্দুর দড়িটির মাথায় একটি ভার ঝুলানো যায়, তবে পাতখানি ঘড়ির কাঁটার দিকে ঘুরিতে আরম্ভ করিবে।

(3) তৃতীয়ত, $B$ বিন্দুর দড়ির মাথায় একটি ভার ঝুলাইবার সঙ্গে সঙ্গে $A$ বিন্দুর দড়িটির মাথায় একটি স্প্রিং-তুলা বাঁধিয়া যদি উপযুক্ত পরিমাণ টান দেওয়া যায়, তবে পাতটি স্থির রাখা যায়।

উপরের প্রথম দুইটি ঘটনা হইতে প্রত্যক্ষ হয় যে, **বলের ক্রিয়ারেখা তথা প্রয়োগ-বিন্দু ঘূর্ণন-কেন্দ্রের কোন্ দিকে অবস্থিত তাহার উপর ঘূর্ণনের গতিমুখ নির্ভর করে।** দ্বিতীয়ত, পরীক্ষার তৃতীয় অংশে টানের পরিমাণ $T$, ভরটির ওজন $W$ এবং $O$ হইতে টান ও ভারের ক্রিয়ারেখার লম্ব-দূরত্ব যদি যথাক্রমে $\overline{ON}$ ও $\overline{OM}$ হয়, তবে প্রত্যক্ষ করা যায় যে,

$$T.\overline{ON} = W.\overline{OM}.$$

ইহা হইতে প্রমাণিত হয় যে, ঘূর্ণন-প্রবণতার পরিমাপ শুধু প্রযুক্ত বলের মানের উপরই নির্ভর করে না। **উহা ঐ বল ও উক্ত বলের ক্রিয়ারেখা হইতে ঘূর্ণন-কেন্দ্রের লম্ব-দূরত্বের গুণফলের উপরই নির্ভর করে।**

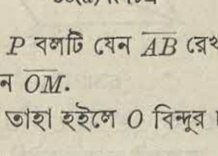
**12·3. (a) ভ্রামক (Moment or torque) :** এইমাত্র দেখা গেল, একটি বস্তু যদি কোন বলের ক্রিয়ায় কোন স্থিরবিন্দুর চারিদিকে ঘোরে, তবে উহার ঘূর্ণন-

প্রবণতার পরিমাপ হয় ঐ বলের মান ও বলটির ক্রিয়ারেখা হইতে ঐ স্থিরবিন্দুর লম্ব-দূরত্বের গুণফল দ্বারা। ইহাকেই আমরা সংক্ষেপে **ভ্রামক** বলি। তাহা হইলে,

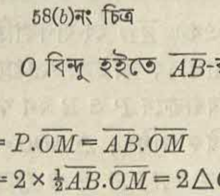
**কোন বিন্দুর চারিদিকে কোন বলের ভ্রামক বলিতে, ঐ বল এবং ঐ বিন্দু হইতে উহার ক্রিয়ারেখার লম্ব-দূরত্বের গুণফলকে বুঝায়।**

**(b) ধনাত্মক ও ঋণাত্মক ভ্রামক (Positive and negative moments)ঃ** 12·2 অনুচ্ছেদে বর্ণিত পরীক্ষার (1) ও (2) অংশ হইতে দেখা যায় যে, ঘূর্ণন-প্রবণতা পরস্পর বিপরীতমুখী হইতে পারে। ভ্রামক ঘূর্ণন-প্রবণতারই পরিমাপ। কাজেই পরস্পর বিপরীতমুখী ভ্রামক বুঝাইতে হইলে ধন- ও ঋণ- চিহ্ন ব্যবহার করিতে হয়। সাধারণ রীতি হইল এই যে, ঘড়ির কাঁটার গতির উল্‌টাদিকে মুখ হইলে ভ্রামক ধনাত্মক এবং ঘড়ির কাঁটার গতির দিকে মুখ হইলে উহাকে ঋণাত্মক ধরা হয়। বলা বাহুল্য, ধনাত্মক ভ্রামক যোগ-চিহ্ন দ্বারা এবং ঋণাত্মক ভ্রামক বিয়োগ-চিহ্ন দ্বারাই সূচিত হয়।

**12·4. ভ্রামকের জ্যামিতিক সূচন (Geometrical representation of moment)ঃ নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের একটি রেখা যদি সম্পূর্ণরূপে একটি বলকে সূচিত করে, তবে যে-কোন বিন্দুর চারিদিকে উহার ভ্রামক ঐ রেখা ও ঐ বিন্দুটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের দ্বিগুণ ক্ষেত্রফল দ্বারা সূচিত হইবে।**




58(*a*)নং চিত্র




58(*b*)নং চিত্র

$P$ বলটি যেন $\overline{AB}$ রেখা দ্বারা সম্পূর্ণরূপে সূচিত। $O$ বিন্দু হইতে $\overline{AB}$-র উপর লম্ব যেন $\overline{OM}$.

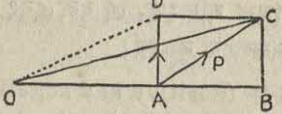
তাহা হইলে $O$ বিন্দুর চারিদিকে $P$ বলের ভ্রামক $= P.\overline{OM} = \overline{AB}.\overline{OM}$

$$= 2 \times \tfrac{1}{2}\overline{AB}.\overline{OM} = 2\triangle OAB.$$

**12·5. কোন বিন্দুর চারিদিকে একটি বলের ভ্রামক, সেই বিন্দুটি ও উক্ত বলের প্রয়োগ-বিন্দুর সংযোজক রেখার লম্ব-অভিমুখে ঐ বলের বিশ্লেষিতাংশের ভ্রামকের সমান হয়।**

$A$ বিন্দুতে সক্রিয় $P$ বল যেন $\overline{AC}$ দ্বারা সূচিত। প্রমাণ করিতে হইবে যে, $O$ বিন্দুর চারিদিকে $A$ বিন্দুতে প্রযুক্ত এবং $\overline{AC}$ রেখা দ্বারা সূচিত $P$ বলের ভ্রামক $= O$ বিন্দুর চারিদিকে $\overline{OA}$ রেখার লম্বাভিমুখে $P$ বলের বিশ্লেষিতাংশের ভ্রামক।

$\overline{OA}$ রেখার লম্ব-অভিমুখে $\overline{AC}$ দ্বারা সূচিত $P$ বলের বিশ্লেষিতাংশ যেন $\overline{AD}$ দ্বারা সূচিত। $ABCD$ সামান্তরিক পূর্ণ করা হইল এবং $D$ ও $C$ বিন্দু $O$-এর সহিত যুক্ত হইল।



59নং চিত্র

$O$-এর চারিদিকে $P$ বলের ভ্রামক $= 2\triangle OAC$, এবং $O$ বিন্দুরই চারিদিকে $\overline{AD}$ দ্বারা সূচিত $P$ বলের বিশ্লেষিতাংশের ভ্রামক $= 2\triangle OAD$.

এখন, $ABCD$ সামান্তরিক বলিয়া $\overline{DC}$ ও $\overline{OB}$ পরস্পরের সমান্তরাল।

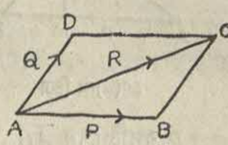
$\therefore$ $\triangle OAC$ ও $\triangle OAD$ একই ভূমি $\overline{OA}$ এবং একই সমান্তরাল-যুগল $\overline{DC}$ ও $\overline{OB}$-র মধ্যে অবস্থিত। $\therefore$ $\triangle OAC = \triangle OAD$;

$$\therefore \; 2\triangle OAC = 2\triangle OAD.$$

$\therefore$ $O$ বিন্দুর চারিদিকে $P$ বলের ভ্রামক = ঐ বিন্দুরই চারিদিকে $\overline{OA}$-র লম্ব-অভিমুখে $P$ বলের বিশ্লেষিতাংশের ভ্রামক।

**12·6. সমবিন্দু দুইটি বলের লব্ধির ক্রিয়ারেখায় যে-কোন বিন্দুর চারিদিকে উহাদের ভ্রামক সমান ও বিপরীতমুখী (The moments of two concurrent forces about any point on the line of action of their resultant are equal and opposite) :**

$\overline{AB}$ ও $\overline{AD}$ রেখা বরাবর সক্রিয় $P$ ও $Q$ বল-দুইটির লব্ধি $R$ যেন $\overline{AC}$ বরাবর সক্রিয়। $\overline{AC}$-র উপর যে-কোন বিন্দু $C$ লওয়া হইল এবং $ABCD$ সামান্তরিক পূর্ণ করা হইল।

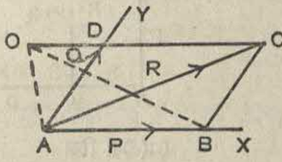


60নং চিত্র

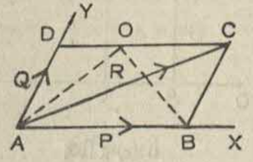
এখন $\overline{AD}$ যে-মাপকাঠিতে $Q$ বল সূচিত করে, বল-সামান্তরিক প্রতিজ্ঞা অনুসারে সেই মাপকাঠিতে $\overline{AB}$ ও $\overline{AC}$ যথাক্রমে $P$ ও $R$ বল সূচিত করিবে। $ABCD$ সামান্তরিক বলিয়া, $\triangle ADC = \triangle ABC$. কিন্তু $2\triangle ABC$ ও $2\triangle ADC$, $C$ বিন্দুর চারিদিকে যথাক্রমে $P$ ও $Q$ বলের ভ্রামক সূচিত করে। কাজেই ভ্রামক-দুইটি সমান ও স্পষ্টতই বিপরীতমুখী।

**12·7. একই সমতলে যে-কোন বিন্দুর চারিদিকে (যুগ্মবল নয় এমন) দুইটি বলের ভ্রামকের বৈজিক সমষ্টি ঐ বিন্দুর চারিদিকে তাহাদের লব্ধির ভ্রামকের সমান (The algebraic sum of the moments of any two forces not forming a couple about any point in their plane is equal to the moment of their resultant about that point) :**

(1) **বল-দুইটি যদি পরস্পরচ্ছেদী হয়,** তবে $P$ ও $Q$ বল-দুইটি যেন যথাক্রমে $\overrightarrow{AX}$ ও $\overrightarrow{AY}$ রেখা বরাবর সক্রিয় এবং $\overleftrightarrow{AX}$ ও $\overleftrightarrow{AY}$-র সমতলে $O$ যেন যে-কোন একটি বিন্দু।




61($a$)নং চিত্র




61($b$)নং চিত্র

$\overline{AX}$-এর সমান্তরাল করিয়া $\overline{OD}$ রেখা টানা হইল এবং উহা যেন $\overline{AY}$ রেখাকে $D$ বিন্দুতে ছেদ করে।

এখন, যে-মাপকাঠিতে $\overline{AD}$ রেখা $Q$ বলকে সূচিত করে, সেই মাপকাঠিতে $\overline{AB}$ রেখা যেন $P$ বলকে সূচিত করে। $ABCD$ সামান্তরিক পূর্ণ করিয়া $\overline{AC}$ কর্ণ যুক্ত করা হইল। স্পষ্টতই $\overline{AC}$ রেখা $P$ ও $Q$-র লব্ধি $R$-বলকে সূচিত করিবে।

(i) $O$ বিন্দু $BAD$ কোণের বাহিরে অবস্থিত হইলে 61($a$)নং চিত্র অনুসারে $O$-র চারিদিকে $P$, $Q$ ও $R$ বলের প্রত্যেকটির ভ্রামক ধনাত্মক।

$\therefore$ $O$ বিন্দুর চারিদিকে $P$ বলের ভ্রামক + ঐ বিন্দুর চারিদিকে $Q$ বলের ভ্রামক $= 2\triangle OAB + 2\triangle OAD$

$= 2\triangle ABC + 2\triangle OAD$, ( $\because$ $\triangle OAB$ ও $\triangle ABC$ একই ভূমি $\overline{AB}$ ও একই সমান্তরাল-যুগলের মধ্যে অবস্থিত বলিয়া সমান। )

$= 2\triangle ADC + 2\triangle OAD$

$= 2\triangle OAC$

$=$ $O$ বিন্দুর চারিদিকে $R$ বলের ভ্রামক।

(ii) 61($b$)নং চিত্রের ন্যায় $O$ যদি $BAD$ কোণের অন্তঃস্থ হয়, তবে $O$ বিন্দুর চারিদিকে $P$ ও $R$ বলের ভ্রামক ধনাত্মক, $Q$ বলের ভ্রামক ঋণাত্মক।

$\therefore$ $O$ বিন্দুর চারিদিকে $P$ বলের ভ্রামক + ঐ বিন্দুর চারিদিকে $Q$ বলের ভ্রামক $= 2\triangle OAB + (-2\triangle OAD)$

$= 2\triangle ABC - 2\triangle OAD$, [ $\because$ $\triangle ABC$ ও $\triangle OAB$ একই ভূমি $\overline{AB}$ ও একই সমান্তরাল-যুগলের মধ্যে অবস্থিত। ]

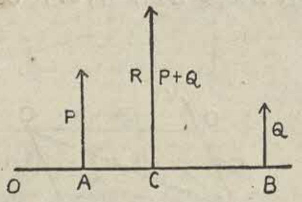
$= 2\triangle ADC - 2\triangle OAD$

$= 2\triangle OAC$

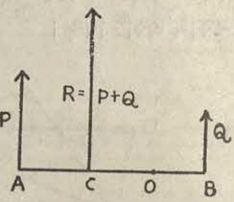
$=$ $O$ বিন্দুর চারিদিকে $R$ বলের ভ্রামক।

(2) **বল-দুইটি যদি সমান্তরাল হয়,** তবে যেন উহারা সদৃশ।

$O$ বিন্দু হইতে $P$ ও $Q$ বলের ক্রিয়ারেখার উপর লম্বভাবে $\overline{OAB}$ রেখা টানা




61($c$)নং চিত্র




61($d$)নং চিত্র

হইলে, উহা যেন $P$ বলের ক্রিয়ারেখাকে $A$ বিন্দুতে এবং $Q$ বলের ক্রিয়ারেখাকে $B$ বিন্দুতে ছেদ করে। $P$ ও $Q$-র লব্ধি $R$ যেন $C$ বিন্দুগামী।

$\therefore \quad P.\overline{AC} = Q.\overline{BC}.$

(i) $O$ যদি 61($c$)নং চিত্রের ন্যায় $\overline{AB}$ রেখার বাহিরে বামে থাকে, তবে ঐ বিন্দুর চারিদিকে $P$ বলের ভ্রামক + ঐ বিন্দুর চারিদিকে $Q$ বলের ভ্রামক

$= P.\overline{OA} + Q.\overline{OB}$

$= P.(\overline{OC} - \overline{AC}) + Q.(\overline{OC} + \overline{BC})$

$= P.\overline{OC} - P.\overline{AC} + Q.\overline{OC} + Q.\overline{BC}$

$= (P+Q).\overline{OC}, \; [\because P.\overline{AC} = Q.\overline{BC}]$

$= R.\overline{OC}, \qquad [\because R = P+Q]$

$=$ $O$ বিন্দুর চারিদিকে $R$ লব্ধির ভ্রামক।

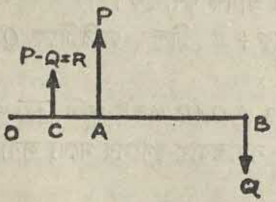
(ii) আবার 61($d$)নং চিত্রের ন্যায় $O$ বিন্দু যদি $A$ ও $B$-র অন্তঃস্থ হয়, তবে $O$ বিন্দুর চারিদিকে $P$ বলের ভ্রামক + ঐ বিন্দুর চারিদিকে $Q$ বলের ভ্রামক

$= -P.\overline{OA} + Q.\overline{OB}$

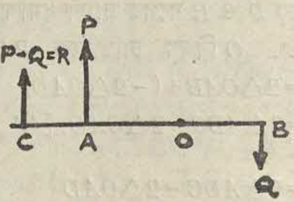
$= -P.(\overline{AC} + \overline{OC}) + Q.(\overline{BC} - \overline{OC})$

$= -P.\overline{AC} - P.\overline{OC} + Q.\overline{BC} - Q.\overline{OC}$

$= -(P+Q).\overline{OC}, \quad [\because \; P.\overline{AC} = Q.\overline{BC}]$




61($e$)নং চিত্র




61($f$)নং চিত্র

$= -R.\overline{OC}, \quad [\because \; R = P + Q]$

$= O$ বিন্দুর চারিদিকে $R$ লব্ধির ভ্রামক।

(iii) বল-দুইটি যদি অসমান, অসদৃশ ও সমান্তরাল হয়, তবে যেন $P > Q$. এখন $O$ বিন্দুর মধ্য দিয়া অঙ্কিত $\overline{OAB}$ অথবা $\overline{AOB}$ রেখাটি যেন $P$ ও $Q$-র ক্রিয়া-রেখাকে যথাক্রমে $A$ ও $B$ বিন্দুতে লম্বভাবে ছেদ করে। স্পষ্টত $P$ ও $Q$-র লব্ধি $R = P - Q$. $R$ যেন $\overline{OAB}$ বা $\overline{BOA}$-র বর্ধিতাংশের উপর $C$ বিন্দুতে সক্রিয়।

এইবার, 61($e$)নং চিত্রে

$O$ বিন্দুর চারিদিকে $P$ বলের ভ্রামক + $Q$ বলের ভ্রামক

$= P.\overline{AO} - Q.\overline{OB}$

$= P.\overline{OC} + P.\overline{AC} - Q(\overline{OC} + \overline{BC})$

$= P.\overline{OC} + P.\overline{AC} - Q.\overline{OC} - Q.\overline{BC}$

$= (P - Q)\overline{OC} = R.\overline{OC}$

$= O$ বিন্দুর চারিদিকে $P$ ও $Q$-র লব্ধির ভ্রামক।

61($f$)নং চিত্রে

$O$ বিন্দুর চারিদিকে $P$ বলের ভ্রামক + $Q$ বলের ভ্রামক

$= -P.\overline{AO} - Q.\overline{OB}$

$= -P.(\overline{OC} - \overline{AC}) - Q.(\overline{BC} - \overline{OC})$

$= -P.\overline{OC} + P.\overline{AC} - Q.\overline{BC} + Q.\overline{OC}$

$= -(P - Q)\overline{OC} = -R.\overline{OC}$

$= O$ বিন্দুর চারিদিকে $P$ ও $Q$-র লব্ধির ভ্রামক।

**বি. দ্র. :** 12·7 অনুচ্ছেদে বর্ণিত প্রতিজ্ঞাটি *Varignon's Theorem* নামে পরিচিত।

**12·8. একটি কঠোর বস্তুর উপর একই সমতলে সক্রিয় যে-কোন সংখ্যক বলের যদি একটি লব্ধি-বল থাকে, তবে ঐ সমতলের যে-কোন বিন্দুর চারিদিকে ঐ বলগুলির ভ্রামকের বৈজিক সমষ্টি উহাদের লব্ধির ভ্রামকের সমান (If any number of coplanar forces acting on a rigid body have a resultant, the algebraic sum of the moments of those forces about any point in their plane is equal to that of their resultant about the same point) :**

একটি কঠোর বস্তুর উপর একই সমতলে সক্রিয় $P_1, P_2, P_3, \ldots$, প্রভৃতি বলের প্রথম-দুইটির লব্ধি $R_1$, এই লব্ধি ও তৃতীয়টির লব্ধি $R_2$, $R_2$ ও চতুর্থটির লব্ধি $R_3$ ইত্যাদি ক্রমে সবকয়টির লব্ধি যেন $R$.

এখন ভ্যারিগনন-এর প্রতিজ্ঞা অনুসারে, একটি বিন্দুর চারিদিকে $P_1$ ও $P_2$-র ভ্রামকের বৈজিক সমষ্টি ঐ বিন্দুর চারিদিকে $R_1$-এর ভ্রামকের সমান। অনুরূপভাবে একই বিন্দুর চারিদিকে $R_1$ ও $P_3$-র ভ্রামকের বৈজিক সমষ্টি ঐ বিন্দুর চারিদিকে $R_2$-র ভ্রামকের সমান। সুতরাং একই বিন্দুর চারিদিকে $P_1$, $P_2$ ও $P_3$-র ভ্রামকের বৈজিক সমষ্টি ঐ বিন্দুর চারিদিকে $R_2$-র ভ্রামকের সমান। অনুরূপভাবে একই বিন্দুর চারিদিকে $P_1, P_2, P_3$ ও $P_4$-এর ভ্রামকের বৈজিক সমষ্টি ঐ বিন্দুর চারিদিকে $R_3$-র ভ্রামকের সমান। এইভাবে শেষপর্যন্ত একই বিন্দুর চারিদিকে সবকয়টি বলের ভ্রামকের বৈজিক সমষ্টি ঐ বিন্দুরই চারিদিকে তাহাদের লব্ধি $R$-এর ভ্রামকের সমান।

∴ নির্দিষ্ট বিন্দুটি হইতে $P_1, P_2, P_3, P_4, \cdots$ প্রভৃতি বলের ক্রিয়ারেখার লম্ব-দূরত্ব যদি যথাক্রমে $x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots$ প্রভৃতি এবং ঐ বিন্দু হইতে উহাদের লব্ধি $R$-এর লম্ব-দূরত্ব যদি $X$ হয়, তবে

$$P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3 + \cdots\cdots = RX.$$

**অনুসিদ্ধান্ত 1.** $P_1, P_2, P_3, P_4, \cdots$ ইত্যাদি সদৃশ ও সমান্তরাল বল হইলে,

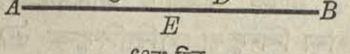
$$R = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + \cdots$$

এবং $$X = \frac{P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3 + P_4x_4 + \cdots}{P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + \cdots}.$$

**অনুসিদ্ধান্ত 2.** $P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3 + \cdots = 0$ হইলে, $RX = 0$ ; সুতরাং সেক্ষেত্রে হয় (i) লব্ধি $R = 0$, নয় (ii) $X = 0$, অর্থাৎ যে-বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক গ্রহণ করা হইয়াছে, লব্ধির ক্রিয়ারেখা সেই বিন্দু দিয়া যায়।

**উদাহরণ 1.** ভারহীন একটি সমদণ্ডের এক প্রান্ত হইতে 2 ফুট ও 4 ফুট দূরে যথাক্রমে 10 ও 2 এককের দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল সক্রিয়। উহাদের লব্ধির মান ও প্রয়োগ-বিন্দু নির্ণয় কর।

$\overline{AB}$ রেখা যেন দণ্ডটিকে সূচিত করে। উহার $A$ প্রান্ত হইতে 2 ফুট দূরে $C$ বিন্দুতে 10 একক বল, 4 ফুট দূরে $D$ বিন্দুতে 2 একক বল এবং $x$ ফুট দূরে $E$ বিন্দুতে যেন ঐ 10 ও 2 একক বলের লব্ধি সক্রিয়। $A$ বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইলে, উপাংশ 10 ও 2 একক বলের ভ্রামকের বৈজিক সমষ্টি অবশ্যই ঐ বিন্দুর চারিদিকে লব্ধির ভ্রামকের সমান হইবে। বল-দুইটি সদৃশ ও সমান্তরাল বলিয়া তাহাদের লব্ধির মান



62নং চিত্র

$$= 10 + 2 = 12 \text{ একক।}$$

$$\therefore\ 10 \times 2 + 4 \times 2 = 12x\ ;\ \therefore\ x = \frac{\overset{7}{\cancel{28}}}{\underset{3}{\cancel{12}}} = 2\tfrac{1}{3} \text{ ফুট} = 2 \text{ ফুট } 4 \text{ ইঞ্চি।}$$

অতএব, প্রদত্ত বল-দুইটির লব্ধির মান 12 একক এবং $A$ বিন্দু হইতে 2 ফুট 4 ইঞ্চি দূরে ঐ দণ্ডের উপরিস্থ বিন্দুটিই উহার প্রয়োগ-বিন্দু।

**উদাহরণ 2.** একটি টেবিলের কিনারায় লম্ব-অভিমুখী একটি লাইন বরাবর ঐ কিনারা হইতে যথাক্রমে 4, 3, 2 ও 1 ফুট দূরে 2, 4, 8 ও 16 পাউণ্ডের ভর পর পর স্থাপিত হইলে, টেবিলের কিনারা হইতে লব্ধি-বলের প্রয়োগ-বিন্দু ও উহার মান নির্ণয় কর। [ C. U. Matric. 1917 ]

টেবিলের কিনারা হইতে উল্লিখিত লম্বরেখাটি যেন $\overline{AB}$. $A$ বিন্দু হইতে নির্ণেয় লব্ধির প্রয়োগ-বিন্দু যেন ঐ রেখায় $x$ ফুট দূরে অবস্থিত। ভরগুলির ভারসমূহ একশ্রেণীর সদৃশ ও সমান্তরাল বল বলিয়া, উহাদের লব্ধি $=(2+4+8+16)=30$ পাউণ্ড। $A$-র চারিদিকে ভ্রামক লইলে,

$$2\times4+4\times3+8\times2+16\times1=30x\,;$$

অথবা, $8+12+16+16=30x$;

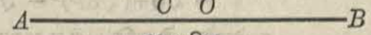
অথবা, $52=30x$.

$\therefore\quad x=\frac{52}{30}=\frac{26}{15}=1\frac{11}{15}$ ফুট।

$\therefore$ নির্ণেয় লব্ধিবলের মান 30 পাউণ্ড এবং উহার প্রয়োগ-বিন্দু ভরগুলির রেখায় ( অর্থাৎ, $\overline{AB}$ রেখায় ) টেবিলের কিনারা হইতে $1\frac{11}{15}$ ফুট দূরে।

**উদাহরণ 3.** 20 ফুট লম্বা ও 40 পাউণ্ড ভারী একখানি সমসত্ব তক্তা $AB$ দ্বারা রচিত sea-saw নামক দোলনার $A$ প্রান্ত হইতে 8 ফুট দূরে একটি আলম্ব-বিন্দুতে সাম্যাবস্থায় ধৃত থাকে। দুইটি বালক Jack ও Tom যখন ঐ তক্তার যথাক্রমে $A$ ও $B$ বিন্দুতে বসে, তখন তক্তাখানি সাম্যাবস্থায় থাকে। Jack-এর ওজন যদি 100 পাউণ্ড হয়, তবে Tom-এর ওজন কত? দ্বিতীয়ত, Tom যদি $A$ বিন্দুতে বসে, তবে $B$ প্রান্ত হইতে কতদূরে Jack বসিলে তক্তাখানি সাম্যাবস্থায় থাকিবে?

উল্লিখিত $AB$ তক্তাখানি সমসত্ব বলিয়া উহার মধ্যবিন্দুতে ভার সক্রিয়। অর্থাৎ $A$ হইতে 10 ফুট দূরে, $O$ বিন্দুতে যেন তক্তাখানির ভার সক্রিয়। $A$ হইতে 8 ফুট দূরে আলম্ব-বিন্দুটি যদি $C$ হয়, তবে $C$ বিন্দুর



63নং চিত্র

এক পাশে Jack-এর ওজন 100 পাউণ্ড এবং অপর পাশে তক্তার ওজন 40 পাউণ্ড ও Tom-এর ওজন, $W$ পাউণ্ড, যেন সক্রিয়। তাহা হইলে $C$ বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইলে, $100\times8=40\times2+12W$.

[ $\therefore\ \overline{CO}=10-8=2$ ফুট, এবং $\overline{BO}=\overline{BC}+\overline{CO}=10+2=12$ ফুট ]

$\therefore\quad W=\dfrac{800-80}{12}=\dfrac{720}{12}=60$ পাউণ্ড।

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে আলম্ব-বিন্দু $C$-র এক পাশে Tom-এর ওজন 60 পাউণ্ড এবং অপর পাশে তক্তার ভার 40 পাউণ্ড ও Jack-এর ওজন 100 পাউণ্ড। Jack যেন $B$ প্রান্ত হইতে $x$ ফুট দূরে, অর্থাৎ $C$ হইতে $12-x$ ফুট দূরে বসিয়াছে। তাহা হইলে $C$ বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইয়া,

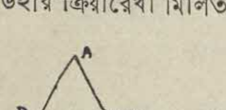
$$60 \times 8 = 40 \times 2 + 100(12 - x),$$

অথবা, $480 - 80 - 1200 = -100x$, অথবা, $100x = 800$ ;

$$\therefore \quad x = 8 \text{ ফুট।}$$

$\therefore$ দ্বিতীয় ক্ষেত্রে Jack যদি $B$ প্রান্ত হইতে 8 ফুট দূরে বসে, তবেই তক্তাখানি সাম্যাবস্থায় থাকিবে।

**উদাহরণ 4.** তিনটি বল $P$, $2P$ ও $3P$ যথাক্রমে $ABC$ সমবাহু ত্রিভুজের $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ ও $\overline{CA}$ বাহু বরাবর সক্রিয়। বল-তিনটির লব্ধির মান, দিক্ ও $\overline{BC}$ বাহুর যে-বিন্দুতে উহার ক্রিয়ারেখা মিলিত হয়, সেই বিন্দু নির্ণয় কর। [ C. U. I.Sc. 1953 ]



64নং চিত্র

$\overline{BC}$ ও $\overline{BC}$-এর লম্ব-অভিমুখে বলগুলির বিশ্লেষিতাংশের বৈজিক সমষ্টি যথাক্রমে ঐ দুই রেখা বরাবর উহাদের লব্ধির বিশ্লেষিতাংশের সমান। এই লব্ধি যদি $R$ হয় এবং $\overline{BC}$ ও $\overline{BC}$-র লম্ব-অভিমুখে উহার বিশ্লেষিতাংশ যদি যথাক্রমে $X$ ও $Y$ হয়, তবে

$$X = 2P - 3P\cos 60^\circ - P\cos 60^\circ$$

$$= 2P - \frac{3}{2}P - \frac{P}{2} = 2P - 2P = 0;$$

এবং $Y = 3P\sin 60^\circ - P\sin 60^\circ$

$$= 3P\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{P\sqrt{3}}{2} = \frac{2P\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}P.$$

$$\therefore \quad R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$= \sqrt{0 + (\sqrt{3}P)^2} = \sqrt{3}P.$$

স্পষ্টতই এই লব্ধি $\overline{BC}$-র লম্ব-অভিমুখে সক্রিয়।

এইবার $ABC$ ত্রিভুজের বাহুগুলির প্রত্যেকটির দৈর্ঘ্য যদি $a$ হয় এবং $\overline{BC}$ বাহুর বর্ধিতাংশের $D$ বিন্দুতে যদি ঐ লব্ধির ক্রিয়ারেখা ছেদ করে, তবে $D$ বিন্দুর চারিদিকে বলগুলির $\overline{BD}$ রেখার লম্ব-অভিমুখী বিশ্লেষিতাংশের ভ্রামক-সমষ্টি শূন্য হইবে, কারণ ঐ লব্ধি $D$ বিন্দুগামী।

$\therefore \; 3P\sin 60^\circ \times \overline{CD} - P\sin 60^\circ \times \overline{BD} = 0$, [ 12·5 অনুচ্ছেদ অনুসারে ]

অথবা, $3P \times \overline{CD} = P(a + \overline{CD})$ ;

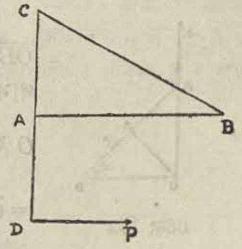
বা, $3\overline{CD} = a + \overline{CD}$ ;

বা, $2\overline{CD} = a$.

$\therefore \quad \overline{CD} = \frac{a}{2}$.

$\therefore$ বলগুলির লব্ধির ক্রিয়ারেখা $C$ বিন্দু হইতে $\overline{BC}$-র বর্ধিতাংশের উপর সমবাহু ত্রিভুজটির একটি বাহুর অর্ধেক পরিমাণ দূরে ছেদ করিবে।

**উদাহরণ 5.** $ABC$ সমকোণী ত্রিভুজের $A$ বিন্দুতে সমকোণ এবং $\overline{AC}$ বাহু 4 ফুট দীর্ঘ। $A, B$ ও $C$ বিন্দুর চারিদিকে কোন একটি বলের ভ্রামক যথাক্রমে একই মুখে 8, 8 ও 16 একক হইলে, ঐ বলের মান ও ক্রিয়ারেখা নির্ণয় কর। [P. U. 1941]




65নং চিত্র

নির্ণেয় বলটির মান যেন $P$ একক। $A$ ও $B$ বিন্দু হইতে ঐ বলের ক্রিয়ারেখার উপর লম্বদ্বয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে যেন $x_1$ ও $x_2$. $A, B$ ও $C$-র চারিদিকে ঐ বলের ভ্রামকত্রয় একমুখী বলিয়া ঐ বলের ক্রিয়ারেখা $ABC$ ত্রিভুজের বাহিরে সক্রিয়। অতএব, প্রশ্নানুসারে

এবং $\left.\begin{array}{l} Px_1 = 8 \\ Px_2 = 8 \end{array}\right\}$

$\therefore \frac{x_1}{x_2} = \frac{8}{8} = 1.$

$\therefore x_1 = x_2,$

অর্থাৎ, $P$ বলের ক্রিয়ারেখা হইতে $A$ ও $B$ বিন্দুর লম্ব-দূরত্ব সমান।

$\therefore$ $P$ বলের ক্রিয়ারেখা $\overline{AB}$ রেখার সমান্তরাল। $\overline{CA}$ রেখাকে বর্ধিত করিলে, ঐ ক্রিয়ারেখাকে যেন $D$ বিন্দুতে ছেদ করে। তাহা হইলে $\overline{CD}$, $P$ বলের ক্রিয়ারেখার উপর লম্ব।

$\therefore \quad P.\overline{CD} = 16 = 2Px_1, \quad [\because \quad Px_1 = 8]$

$\therefore \quad \overline{CD} = 2x_1.$

কিন্তু $x_1$ স্পষ্টতই $\overline{AB}$ ও $P$ বলের ক্রিয়ারেখার মধ্যে লম্ব-দূরত্ব। সেইজন্য

$x_1 = \overline{AD}. \quad \therefore \quad \overline{CD} = 2\overline{AD}.$

অথবা, $\overline{CA} + \overline{AD} = 2\overline{AD}$ ;

$\therefore \quad \overline{CA} = \overline{AD} = 4$ ফুট ;

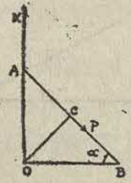
$\therefore \quad \overline{CD} = 2.4 = 8$ ফুট।

$\therefore \quad P.\overline{CD} = P.8 = 16$ ; $\therefore \quad P = 2$ একক।

∴ নির্ণেয় বলের মান 2 একক এবং উহার ক্রিয়ারেখা $\overline{AB}$ হইতে 4 ফুট দূরে ও $\overline{AB}$-র সমান্তরাল।

**উদাহরণ 6.** একটি উল্লম্ব টেলিগ্রাফের থামে একটি বিন্দুতে $l$ ফুট লম্বা একগাছি দড়ির এক মাথা আটকানো আছে এবং অপর মাথা ধরিয়া এক ব্যক্তি নির্দিষ্ট বল-সহকারে টানিতেছে। প্রমাণ কর যে, দড়িটি যদি থামের $\frac{l}{\sqrt{2}}$ ফুট উর্ধ্বে আটকানো থাকে, তবেই লোকটির পক্ষে থামটি উল্টাইয়া ফেলার সবচেয়ে বেশী সম্ভাবনা।

[ C. U. I.Sc. 1938 ]



66নং চিত্র

থামটি যেন $\overline{OX}$. উহার $A$ বিন্দুতে দড়িগাছি আটকাইয়া $\overline{OB}$ অনুভূমিক রেখায় $B$ বিন্দু হইতে $P$ বলে টানিলেই যেন থামটি উল্টানো সবচেয়ে সুবিধা। $\angle ABO$-এর মান যেন $\alpha$; $O$ হইতে $\overline{AB}$-এর উপর $\overline{OC}$ লম্ব। $\overline{AB}=l$; $\overline{OC}=\overline{OB}\times\frac{\overline{OC}}{\overline{OB}}$ $=\overline{OB}\sin\alpha$ এবং $\overline{OB}=\overline{AB}\times\frac{\overline{OB}}{\overline{AB}}=\overline{AB}\cos\alpha$ ;

$$\therefore\quad \overline{OC}=\overline{OB}\sin\alpha=\overline{AB}\cos\alpha\sin\alpha,\ [\because\ \overline{OB}=\overline{AB}\cos\alpha]$$

$$=\frac{\overline{AB}}{2}\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$=\frac{\overline{AB}}{2}\sin 2\alpha,\ [\because\ 2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha]$$

$$=\frac{l}{2}\sin 2\alpha.$$

∴ $O$ বিন্দুর চারিদিকে $P$ বলের ভ্রামক $=P.\overline{OC}=P\times\frac{l}{2}\sin 2\alpha.$

এখন এই ভ্রামকের মান যখন বৃহত্তম, তখন থামটি উল্টাইয়া পড়িবার সম্ভাবনা সবচেয়ে বেশী। এখন $P$ ও $l$-এর মান নির্দিষ্ট। কেবল $\sin 2\alpha$-র মানই পরিবর্তনশীল। সুতরাং, $\sin 2\alpha$-র মান যখন বৃহত্তম, তখন উল্লিখিত ভ্রামকের মান বৃহত্তম হইবে।

আমরা জানি, $\sin 2\alpha$-র বৃহত্তম মান $=1=\sin 90°$,

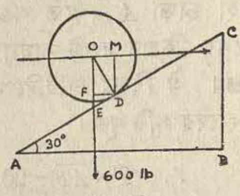
কাজেই, $2\alpha=90°$ হইলে,

$$\alpha=45°.$$

$$\therefore\quad \overline{OA}=\overline{AB}\times\frac{\overline{OA}}{\overline{AB}}=\overline{AB}\sin\alpha=l\sin 45°=\frac{l}{\sqrt{2}};$$

∴ $A$ বিন্দু যখন ভূমি হইতে $\frac{l}{\sqrt{2}}$ ফুট উচ্চে তখনই থামটি উল্টাইয়া ফেলা সবচেয়ে সুবিধা।

**উদাহরণ 7.** অনুভূমিক রেখার সহিত 30° কোণসম্পন্ন একটি অমসৃণ তলে, 600 পাউণ্ড ভারী সমসত্ত্ব একটি গোলক কেন্দ্রের মধ্য দিয়া অনুভূমিক একটি বলপ্রয়োগে স্থির অবস্থায় রহিয়াছে। বলটির মান নির্ণয় কর।



67নং চিত্র

$ABC$ নততলের $A$ কোণ 30°, $\overline{AB}$ অনুভূমিক রেখা। উহার $D$ বিন্দুতে $O$-কেন্দ্রিক গোলকটি $P$ অনুভূমিক বলের ক্রিয়ায় সাম্যাবস্থায় ধৃত।

স্পষ্টত $D$ বিন্দুতে একটি অজ্ঞাত প্রতিক্রিয়াও সক্রিয়। $D$ বিন্দুর চারিদিকে এই প্রতিক্রিয়ার ভ্রামক শূন্য।

$O$ হইতে উল্লম্বরেখাটি $AC$ তলকে যেন $E$ বিন্দুতে ছেদ করে। $\overline{DF}$ ও $\overline{DM}$ যথাক্রমে $\overline{OE}$ ও $P$ বলের ক্রিয়ারেখার উপর লম্ব। এখন গোলকটি সাম্যাবস্থায় থাকায় $D$ বিন্দুর চারিদিকে উহার 600 পাউণ্ড ভারের ও উহার উপর প্রযুক্ত $P$ বলের ভ্রামকের বৈজিক সমষ্টি শূন্য হইবে।

$$\therefore \quad P \times \overline{DM} - 600 \times \overline{DF} = 0 ;$$

$$\therefore \quad P \times \overline{DM} = 600 \times \overline{DF}.$$

কিন্তু $\angle FED = 60° = \angle FDE$-র পূরক $= \angle FDO$ ;

$$\therefore \quad \angle ODM = 30° ;$$

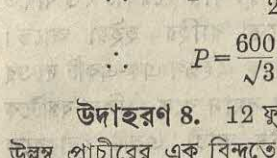
$$\therefore \quad \overline{DF} = \overline{OD} \times \frac{\overline{DF}}{\overline{OD}} = \overline{OD} \cos 60° = \frac{\overline{OD}}{2}$$

এবং $\overline{MD} = \overline{OD} \times \dfrac{\overline{DM}}{\overline{OD}} = \overline{OD} \cos 30° = \dfrac{\overline{OD}\sqrt{3}}{2}$ ;

$$\therefore \quad P \times \frac{\overline{OD}\sqrt{3}}{2} = 600 \times \frac{\overline{OD}}{2} ;$$

$$\therefore \quad P = \frac{600}{\sqrt{3}} = \frac{600\sqrt{3}}{3} = 200\sqrt{3} \text{ পাউণ্ড।}$$

**উদাহরণ 8.** 12 ফুট দীর্ঘ ও 20 পাউণ্ড ভারী একটি সমদণ্ডের এক প্রান্ত একটি উল্লম্ব প্রাচীরের এক বিন্দুতে কব্জা দিয়া আটকানো আছে। দণ্ডটি উহার মধ্যবিন্দুর সহিত প্রাচীরের গায়ে যুক্ত 6 ফুট দীর্ঘ একটি দড়ির সাহায্যে অনুভূমিক রেখার সহিত 30° কোণে ধৃত রহিয়াছে। ঐ দণ্ডের মুক্তপ্রান্ত হইতে 64 পাউণ্ডের একটি ভার ঝুলানো থাকিলে, দড়িগাছি দণ্ডটির সহিত 60° কোণ উৎপন্ন করে। দড়ির টান নির্ণয় কর।



68নং চিত্র

12 ফুট দণ্ডটি যেন $AB$. উহার মধ্যবিন্দু $C$ প্রাচীর $AK$-র $K$ বিন্দুর সহিত যুক্ত। 6 ফুট দীর্ঘ $CK$ দড়ি $AB$-র সহিত $\angle ACK = 60°$ কোণ উৎপন্ন করিয়াছে। $\overline{AE}$ অনুভূমিক রেখার উপর যথাক্রমে $C$ ও $B$ হইতে

$\overline{CD}$ ও $\overline{BE}$ লম্ব। $A$ হইতে $\overline{CK}$-উপর $\overline{AF}$ লম্ব। স্পষ্টতই $\overline{CD}$ রেখায় দণ্ডের 20 পাউণ্ড ভার, $\overline{BE}$ রেখায় 64 পাউণ্ড ভার এবং $\overline{CF}$ রেখায় দড়ির টান $T$ সক্রিয়। ইহা ছাড়া $A$ বিন্দুতে অজ্ঞাত একটা প্রতিক্রিয়াও কাজ করিতেছে এবং এই চারিটি বলের ক্রিয়ায় দণ্ডটি সাম্যাবস্থায় আছে। $A$ বিন্দুর চারিদিকে অজ্ঞাত বলটির ভ্রামক শূন্য। ঐ বিন্দুর চারিদিকে অপর-তিনটি বলের ভ্রামকের বৈজিক সমষ্টিও শূন্য, কেননা উহাদের লব্ধি শূন্য।

$$\therefore \quad T \times \overline{AF} - 20 \times \overline{AD} - 64 \times \overline{AE} = 0.$$

কিন্তু $$\overline{AF} = \overline{AC} \times \frac{\overline{AF}}{\overline{AC}} = \overline{AC} \sin 60^\circ = \frac{\overline{AB}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}, \left[\because \overline{AC} = \frac{\overline{AB}}{2}\right]$$

$$= \frac{12}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}.$$

$$\overline{AD} = \overline{AC} \times \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \overline{AC} \cos 30^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} ;$$

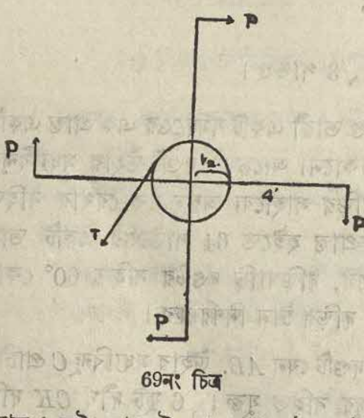
$$\overline{AE} = \overline{AB} \times \frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \overline{AB} \cos 30^\circ = 12. \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}.$$

$$\therefore \quad T.\overline{AF} = 20.\overline{AD} + 64.\overline{AE}.$$

$$\therefore \quad T.3\sqrt{3} = 20 \times 3\sqrt{3} + 64 \times 6\sqrt{3} = 444\sqrt{3}.$$

$$\therefore \quad T = \frac{444\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = 148 \text{ পাউণ্ড।}$$

**উদাহরণ 9.** 1 ফুট ব্যাসযুক্ত Capstan-নামক দড়ি প্যাঁচাইবার একটি যন্ত্রের অক্ষ হইতে 4 ফুট দীর্ঘ কয়েকটি দণ্ড বর্ধিত ব্যাসার্ধের মতো বাহির হইয়া আছে। চারিজন লোকে এইরূপ এক-একটি দণ্ডের লম্ব-অভিমুখে সমান বলে ঠেলিয়া যন্ত্রটিকে ঘুরাইয়া 1 টন ভারী একটি নোঙরকে তুলিতে সচেষ্ট। নোঙরটি ঠিক নড়িবার মুহূর্তে প্রত্যেক ব্যক্তি কত বল প্রয়োগ করে?



69নং চিত্র

প্রত্যেক দণ্ডের উপর $P$ পরিমাণ বল প্রযুক্ত হইলে, $T$ টানে যেন নোঙরটি নড়িবার উপক্রম করে। Capstan-টির ব্যাস 1 ফুট, কাজেই ব্যাসার্ধ ½ ফুট। উহার অক্ষের চারিদিকে ভ্রামক লইলে,

$$4P \times 4 = T.\tfrac{1}{2} ;$$

বা, $4P \times 4 = 2240 \times \frac{1}{2}$, [ $\because$ $T = 1$ টন = 2240 পাউণ্ড ]

$$\therefore \quad P = \frac{2240}{4 \times 4 \times 2} = 70 \text{ পাউণ্ড।}$$

$\therefore$ প্রত্যেক ব্যক্তি 70 পাউণ্ড বল প্রয়োগ করিবে।

## প্রশ্নমালা 13

1. একটি 9 পাউণ্ড-ভার সমদণ্ডের ভারকেন্দ্র হইতে 11 ইঞ্চি দূরে একটি 2 পাউণ্ড বল উল্লম্বভাবে নিম্নদিকে সক্রিয়। দণ্ডটির উপর লব্ধি-বল ও ঐ লব্ধির প্রয়োগ-বিন্দু নির্ণয় কর।

2. একটি ভারহীন সমদণ্ডের এক প্রান্ত হইতে যথাক্রমে 2, 4 ও 6 ফুট দূরে 10, 2 ও 5 একক সদৃশ সমান্তরাল বল সক্রিয়। দণ্ডটি যদি 8 ফুট দীর্ঘ হয়, তবে লব্ধির মান ও ক্রিয়াপথ নির্ণয় কর। [ C. U. I.Sc. 1917 ]

3. $ABCD$ সমদণ্ডটি অনুভূমিকভাবে উহার $A$ ও $D$ প্রান্তে ধৃত। উহার যথাক্রমে $B$ ও $C$ বিন্দু হইতে 8 পাউণ্ড ও 12 পাউণ্ডের ভার ঝুলানো রহিয়াছে। দণ্ডটির নিজের ওজন 15 পাউণ্ড এবং $\overline{AB} = 6$ ইঞ্চি, $\overline{BC} = 10$ ইঞ্চি ও $\overline{CD} = 4$ ইঞ্চি। দণ্ডটির $A$ ও $D$ প্রান্তে উর্ধ্বচাপ নির্ণয় কর।

4. একটি অনুভূমিক [ ভারহীন ] সমদণ্ডের উপর তিনটি সমান্তরাল বল সক্রিয়। প্রত্যেকটি বলের মান 1 পাউণ্ড। একটি ডানদিকের এক প্রান্তে উল্লম্বভাবে উর্ধ্বমুখে এবং অপর-দুইটি প্রথমটি হইতে যথাক্রমে 2 ও 3 ফুট দূরে নিম্নমুখে থাকিলে বলগুলির লব্ধির মান ও অবস্থান নির্ণয় কর। [ C. U. Matric. 1912 ]

5. 20 ফুট লম্বা ও 10 পাউণ্ড ভারী $AB$ সমদণ্ডটি উহার দুই প্রান্তের সহিত যুক্ত দুইটি উল্লম্ব স্প্রিং-তুলার সাহায্যে অনুভূমিক রেখায় ধৃত। দণ্ডটি উহার $A$ প্রান্ত হইতে যথাক্রমে 5 ও 15 ফুট দূরে ঝুলানো 10 ও 20 পাউণ্ডের ভার বহন করিলে প্রত্যেক তুলায় কত টান পড়িবে? স্প্রিং-তুলায় না ঝুলাইয়া দণ্ডটির কোথায় একটি মসৃণ কীলক স্থাপন করিলে উহা অনুভূমিক থাকিবে?

6. 6 ফুট লম্বা ও 9 পাউণ্ড ভরবিশিষ্ট একটি সমদণ্ডের দুই প্রান্ত হইতে 6 ও 12 পাউণ্ড ভার ঝুলানো রহিয়াছে। দণ্ডটির কোন্ বিন্দু হইতে ঝুলাইলে উহা অনুভূমিক রেখায় অবস্থিত হইবে?

7. 4 ফুট লম্বা ও 20 পাউণ্ড ভারী একটি সমদণ্ডের দুই প্রান্তে 4 ও 8 পাউণ্ড ভার ঝুলানো আছে। দণ্ডটি যে-বিন্দুতে ধৃত হইলে সাম্যাবস্থায় থাকিবে সেই বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় কর। [ C. U. Matric. 1926 ]

8. দুই প্রান্ত হইতে 6 ও 10 পাউণ্ড ভার ঝুলিতে থাকিলে একটি 16 পাউণ্ড

ভারী সরল সমদণ্ড উহার মধ্যবিন্দু হইতে এক ফুট দূরে একটি বিন্দুতে সাম্যাবস্থায় ধৃত হইতে পারে। দণ্ডটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [ C. U. Matric. 1916 ]

9. 10 ফুট লম্বা একটি বরগার দুই প্রান্ত হইতে 10 পাউণ্ড ও 100 পাউণ্ড-ভার ঝুলিতে থাকিলে উহা 10 পাউণ্ড-ভার হইতে 7 ফুট 3 ইঞ্চি দূরে একটি বিন্দুতে স্থস্থিত হয়। বরগাটির ভার কত? [ C. U. Matric. 1929 ]

10. $4\frac{1}{2}$ ফুট লম্বা একখানি বরগা উহার দুই প্রান্তে দুইটি খুঁটির উপর স্থাপিত। প্রত্যেকটি খুঁটির উপর চাপ যদি 5 পাউণ্ড হয়, তবে বরগার কোন্ বিন্দু হইতে 54 পাউণ্ড-ভার ঝুলাইলে একটি খুঁটির উপর মোট 12 পাউণ্ড চাপ পড়িবে?

[ C. U. Matric. 1930 ]

11. 20 পাউণ্ড ভারী ও 10 ফুট লম্বা একটি দণ্ডের এক প্রান্ত হইতে 2 ফুট দূরে 7 পাউণ্ড-ভার এবং তাহার আরও এক ফুট দূরে 6 পাউণ্ডের দ্বিতীয় একটি ভার ঝুলানো আছে। দণ্ডটিকে কোন্ বিন্দুতে সাম্যাবস্থায় ধারণ করা যাইবে?

[ C. U. Matric. 1923 ]

12. 10 ফুট লম্বা ও 10 পাউণ্ড ভরবিশিষ্ট একটি বরগা উহার এক প্রান্ত হইতে 4 ফুট দূরে এক বিন্দুতে ধৃত। ঐ প্রান্তে 6 পাউণ্ডের একটি ভার স্থাপিত হইয়াছে। অপর প্রান্তে কত পাউণ্ড-ভার স্থাপিত হইলে বরগাটি সাম্যাবস্থায় থাকিবে?

[ C. U. Matric. 1925 ]

13. 120 গ্রাম ভারী ও 1 মিটার লম্বা একটি সমদণ্ড উহার $A$ ও $B$, এই দুই প্রান্তের সহিত যুক্ত দুইটি উল্লম্ব স্প্রিং-তুলার সাহায্যে অনুভূমিক রহিয়াছে। দণ্ডটির $C$ বিন্দুতে 300 গ্রাম একটি ভার ঝুলাইয়া দিলে, $A$ প্রান্তস্থিত তুলায় 270 গ্রাম ভার সূচিত হয়। $B$ প্রান্তস্থিত তুলায় তখন কত ভার সূচিত হইবে এবং $AC$-র দৈর্ঘ্য কত তাহা নির্ণয় কর। [ W. B. S. F. 1954 ]

14. 30 ফুট লম্বা ও 6 টন ভারী একটি সেতুর অনুভূমিক পথ উহার দুই-প্রান্তস্থিত দুইটি আশ্রয়-স্তম্ভের উপর স্থাপিত। সেতুর উপর দিয়া দুই-তৃতীয়াংশ পথ দূরে যখন 2 টন ভারী একটি গাড়ী অবস্থিত হয়, তখন সেতুর প্রত্যেকটি আশ্রয়-স্তম্ভের উপর কত চাপ পড়ে? [ C. U. Matric. 1928 ]

15. 36 ফুট লম্বা ও 5 টন ভারী $AB$ সেতুটি উহার দুই প্রান্তে দুইটি স্তম্ভের উপর স্থাপিত। 3 টন ওজনের একটি গাড়ী যখন $A$ হইতে উহার $\frac{5}{6}$ অংশ পথ অতিক্রম করে, তখন স্তম্ভ-দুইটির কোন্‌টির উপর কত চাপ পড়ে? [ W. B. H. S. 1966 ]

16. 16 ফুট লম্বা একখানি sea-saw দোলনার তক্তা 1 হন্দর ভারী। 44 ও 68 পাউণ্ড ভারী দুইটি বালক যখন উহার দুই প্রান্তে বসে, তখন কোন্ বিন্দুতে তক্তাখানি সাম্যাবস্থায় আশ্রিত হইতে পারে? [ P. U. 1945 ]

17. $5\frac{1}{2}$ ফুট লম্বা ও 20 পাউণ্ড ভারী একটি সমদণ্ডের সাহায্যে একটি লোক ও

একটি বালক দুইজনের মাঝে ঝুলাইয়া 55 পাউণ্ডের একটি ভার বহন করে। ভারটিকে কোথায় স্থাপন করিলে ঐ লোকটি বালকের দ্বিগুণ পরিমাণ ওজন বহন করিবে?

[ C. U. Matric. 1913 ]

18. 11 ফুট লম্বা ও 40 পাউণ্ড ভারী একটি সমসত্ব দণ্ডের দুই প্রান্ত ধারণ করিয়া দুই ব্যক্তি তাহাদের মধ্যে ঐ দণ্ডে ঝুলানো 110 পাউণ্ডের একটি ভার বহন করে। ভারটিকে কোথায় ঝুলাইলে এক ব্যক্তি অপর ব্যক্তি অপেক্ষা দ্বিগুণ ভার বহন করিবে? [ C. U. Matric. 1930 ]

19. 10 ফুট লম্বা ও 20 পাউণ্ড ভারী একটি সমসত্ব দণ্ডের দুই প্রান্ত দুইটি খুঁটির উপর স্থাপিত। উহার একপ্রান্ত হইতে 4 ফুট দূরে একটি 80 পাউণ্ডের ভার ঝুলানো হইলে, খুঁটি-দুইটির উপর চাপ নির্ণয় কর। [ W. B. H. S. 1968 ]

20. 12 ফুট লম্বা ও 20 পাউণ্ড ভারী সমসত্ব একটি দণ্ডকে পরস্পর হইতে 8 ফুট দূরে অবস্থিত দুইটি খুঁটির উপর স্থাপন করা হইল। দণ্ডটির এক প্রান্তে 12 পাউণ্ড এবং অপর প্রান্তে 4 পাউণ্ড ভার যুক্ত আছে। যে-প্রান্তে 4 পাউণ্ড ভার যুক্ত আছে সেই প্রান্ত হইতে 1 ফুট দূরে একটি খুঁটি এবং 4 ফুট দূরে 8 পাউণ্ডের একটি ভার যুক্ত হইলে, খুঁটি-দুইটির উপর চাপের পরিমাণ কত হয়? [ W. B. H. S. 1969 ]

21. 10 কিলোগ্রাম ওজনের একটি সমসত্ব দণ্ডের একটি প্রান্ত একটি মসৃণ কব্‌জার সহিত আটকানো আছে। অপর প্রান্তে একটি অনুভূমিক বল $P$, দণ্ডটিকে উল্লম্ব অবস্থান হইতে 45° কোণে অপসারিত করিয়া স্থির রাখিয়াছে। $P$-এর মান নির্ণয় কর।

[ W. B. H. S. 1970 ]

22. 2 ফুট লম্বা হালকা $ABCD$ দণ্ডের মধ্যবিন্দুতে নিচুদিকে 15 পাউণ্ডের একটি উল্লম্ব বল সক্রিয়। পরস্পর হইতে 10 ইঞ্চি দূরে অবস্থিত দুইটি পেরেক $B$ ও $C$-র উপর দণ্ডটি স্থাপিত। $C$ বিন্দুতে চাপ $B$ বিন্দুতে চাপের চতুর্গুণ হইলে, দণ্ডটিকে না উল্টাইয়া $D$ বিন্দুতে সর্বাধিক কত পর্যন্ত উল্লম্ব বল নিচুদিকে প্রয়োগ করা যায়?

[ C. U. I.Sc. 1954 ]

23. এক ব্যক্তি একটি সাধারণ দাঁড়িপাল্লার একটি পাল্লায় বসিয়া তাহার পাগড়িটি দাঁড়িপাল্লার আলম্ব-বিন্দু ও ঐ পাল্লার মধ্যবর্তী কোন বিন্দুতে ঝুলাইয়া রাখে। লোকটির মাথায় পাগড়ি থাকিলে, সে কি আগের চেয়ে বেশী বা কম ভারী হইত?

[ B. H. U. I.Sc. 1951 ]

24. $ABCD$ আয়তক্ষেত্রের $\overline{BC}$ বাহু = 4 ফুট ; উহার $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ ও $\overline{CD}$ বাহু বরাবর যথাক্রমে 30 পা., 40 পা. ও 50 পাউণ্ডের বল সক্রিয়। উহাদের লব্ধির মান, $\overline{BC}$ রেখা বা উহার বর্ধিতাংশের উপর উহার প্রয়োগ-বিন্দু এবং $\overline{BC}$-এর সহিত উহার কোণ নির্ণয় কর। [ W. B. H. S. 1964 ]

25. $\overline{AB}$ কোন বৃত্তের ব্যাস এবং $\overline{BP}$ ও $\overline{BQ}$ ঐ বৃত্তের দুইটি পরস্পর-লম্বচ্ছেদী

জ্যা। প্রমাণ কর যে, $A$-র চারিদিকে $\overline{BP}$ এবং $\overline{BQ}$ দ্বারা সূচিত বলের ভ্রামক সমান।
[ C. U. Matric. 1914 ]

26. $ABC$ সমকোণী ত্রিভুজের $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ ও $\overline{AB}$ বাহুত্রয় যথাক্রমে 5, 4 ও 3 একক দীর্ঘ। এই বাহুত্রয়ের একটির উপর লম্বভাবে কোন বল $P$ সক্রিয়। $A$, $B$ ও $C$ বিন্দুর চারিদিকে $P$-র ভ্রামক যথাক্রমে 0, 9 ও 16 একক হইলে, $P$-র মান নির্ণয় কর।

27. একটি আলোর থামের এক বিন্দুতে $20\sqrt{2}$ ফুট লম্বা একখণ্ড শক্ত দড়ির এক মাথা আটকানো আছে। অপর মাথা ধরিয়া এক ব্যক্তি মাটি হইতে একটি নির্দিষ্ট বলে দড়িটি টানিতেছে। থামের কত উচ্চে দড়িটি আটকানো থাকিলে, ঐ ব্যক্তির পক্ষে থামটি উল্টাইয়া ফেলার সম্ভাবনা সবচেয়ে বেশী ?

28. কোন অমসৃণ নততলের উপর 100 পাউণ্ড ওজনের একটি ধাতুগোলক উহার কেন্দ্রগামী ও উহার ওজনের সমান একটি অনুভূমিক বল দ্বারা ধৃত রহিয়াছে। নততলটির নতি-কোণ ও প্রতিক্রিয়া নির্ণয় কর।

29. 5 ফুট লম্বা $AB$ হালকা দণ্ডটি উহার উপর $A$ হইতে 3 ফুট দূরে অবস্থিত $O$ বিন্দুর চারিদিকে অবাধে ঘুরিতে পারে। $10\sqrt{3}$ পাউণ্ড বলসহ এবং $AB$-র সহিত 60° কোণে একটি বালক একটি দড়ির সাহায্যে $A$ বিন্দু ধরিয়া দণ্ডটিকে টানে। $BA$-র সহিত 30° কোণে কত বল-সহকারে অপর এক বালক দণ্ডটিকে $B$ বিন্দু ধরিয়া টানিলে উহা সাম্যাবস্থায় থাকিবে ? [ W. B. S. F. 1952 ]

30. 10 ফুট লম্বা ও 80 পাউণ্ড ভারী একটি সমসত্ব বরগা $AB$, $A$ বিন্দুস্থিত একটি মসৃণ কব্জার চারিদিকে অবাধে ঘুরিতে পারে। $B$ বিন্দুতে কত পরিমাণ অনুভূমিক বল প্রয়োগ করিলে, বরগাটি $A$ হইতে 4 ফুট নিচে আপন কেন্দ্রসহ সাম্যাবস্থায় থাকিতে পারে ? [ C. U. I.Sc. 1957 ]

31. 10 পাউণ্ড ভারী একটি সমদণ্ড এক প্রান্তে কব্জার সাহায্যে আটকানো আছে। অন্য প্রান্তে প্রযুক্ত একটি অনুভূমিক বল $P$ উল্লম্বরেখার সহিত 45° কোণে হেলাইয়া দণ্ডটিকে স্থির রাখিয়াছে। $P$-র মান নির্ণয় কর। [ P. U. 1944 ]

32. একটি সমসত্ব দণ্ড উহার এক প্রান্তের চারিদিকে অবাধে ঘুরিতে পারে। ঐ দণ্ডের অপর প্রান্তে প্রযুক্ত উহারই অর্ধেক ওজন পরিমাণ একটি অনুভূমিক বলের ক্রিয়ায় দণ্ডটি উল্লম্বরেখার সহিত কত ডিগ্রী কোণে নত হইবে ? [ C. U. Matric. 1912 ]

33. 12 ইঞ্চি লম্বা ও 10 পাউণ্ড ভারী একটি সমদণ্ড $AB$ উহার $A$ বিন্দুতে এমনভাবে কব্জা দিয়া আটকানো যে, উল্লম্বতলে দণ্ডটি অবাধে ঘুরিতে পারে। $A$ বিন্দু হইতে উল্লম্বভাবে 10 ইঞ্চি উপরে $C$ বিন্দুতে এবং $AB$-র $A$ হইতে 9 ইঞ্চি দূরে $D$ বিন্দুতে একগাছা দড়ি বাঁধা আছে। দড়িটি যখন টান হয়, তখন দণ্ডটি অনুভূমিক অবস্থায় থাকে। দড়ির টান নির্ণয় কর।

34. কোন জাহাজে Capstan যন্ত্রটির ব্যাস 1 ফুট 6 ইঞ্চি। উহার অক্ষ হইতে 4 ফুট 6 ইঞ্চি করিয়া 6টি দণ্ড অক্ষের সহিত সমকোণে বাহির হইয়াছে। 6 জন লোক প্রত্যেকে এক-একটি দণ্ডের উপর লম্বভাবে 40 পাউণ্ডের সমান বলপ্রয়োগে $W$ ভারযুক্ত নোঙর নাড়িতে পারে। $W$-র মান নির্ণয় কর।

35. $A$ বিন্দুতে কব্‌জা দ্বারা বদ্ধ 20 ইঞ্চি লম্বা হালকা $AB$ দণ্ডটি উল্লম্বভাবে ঝুলিতেছে। ঐ দণ্ডের সহিত যুক্ত দড়ির সাহায্যে যুগপৎ কয়েকটি বল প্রয়োগ করা হইল। $A$ হইতে 16 ইঞ্চি নিচে $C$ বিন্দুতে দণ্ডটির উপর 4 পাউণ্ড পরিমাণ অনুভূমিক বল $CD$ প্রয়োগ করা হইল। $D$ বিন্দু দণ্ডের বামদিকে অবস্থিত। $B$ বিন্দুতে দণ্ডটির ডানদিকে 3 পাউণ্ড পরিমাণ আর-একটি অনুভূমিক বল $BE$ প্রয়োগ করা হইলে, দণ্ডটির লব্ধি-ভ্রামক নির্ণয় কর। দণ্ডটির কোথায় 2 পাউণ্ড পরিমাণ তৃতীয় একটি অনুভূমিক বল প্রয়োগ করিলে উহার ঘূর্ণন রুদ্ধ করা যায়? [ W. B. S. F. 1959 ]

36. 10 ফুট লম্বা ও 25 পাউণ্ড ভারী একটি সমসত্ত্ব দণ্ডের একপ্রান্ত একটি মসৃণ কব্‌জায় আটকানো এবং উহার অপর প্রান্ত 16 ফুট লম্বা দড়ি দিয়া কব্‌জাটির উল্লম্বদিকে 10 ফুট উপরে বাঁধা রহিয়াছে। কব্‌জার প্রতিক্রিয়া ও দড়ির টান নির্ণয় কর।

[ W. B. H. S. 1967 ]

37. $P$ ও $Q$ দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল। উহাদেরই তলে পরস্পর হইতে $b$ একক দূরে $S$-এর সমান দুইটি যে-কোন দিকে সমান্তরাল অসদৃশ বল প্রযুক্ত হইলে এবং $P$ ও $Q$-এর সহিত তাহাদের লব্ধি লইলে, দেখাও যে, $P$ ও $Q$-এর লব্ধি হইতে এই নূতন লব্ধি $\dfrac{bS}{P+Q}$ একক দূরে অপসারিত হয়। [ W. B. H. S. 1971 ]

**12·9. যুগ্মবলের ভ্রামক (Moment of a couple) :** একটিমাত্র বল-প্রয়োগে একটি বস্তুর মধ্যে চলন বা ঘূর্ণন সঞ্চার করা যায়। কিন্তু যুগ্মবলের দ্বারা কেবল ঘূর্ণনই সঞ্চারিত হয়। দ্বিতীয়ত, যেহেতু ভ্রামক মানে ঘূর্ণন-প্রবণতার পরিমাপ, সেইহেতু যুগ্মবলের ঘূর্ণন মাপিতে গেলে উহার ভ্রামক নির্ণয় করা প্রয়োজন। সেইজন্য আবার নিচের সংজ্ঞাগুলি জানা দরকার :

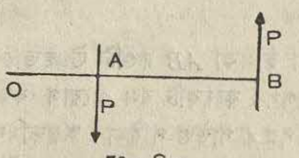
(1) **যুগ্মবলের বাহু :** যুগ্মবলের ক্রিয়ারেখাদ্বয়ের মধ্যে লম্ব-দূরত্বকে উহার বাহু বলা হয়।

(2) **যুগ্মবলের ভ্রামক** বলিতে ঐ বলদ্বয়ের যে-কোন একটি এবং উহাদের বাহুর গুণফলকে বুঝায়।

(3) ঘড়ির কাঁটার গতির বিপরীতমুখী হইলে এই ভ্রামক ধনাত্মক, আর ঘড়ির কাঁটার গতির মুখে হইলে উহা ঋণাত্মক।

(4) একটি যুগ্মবলের যে-কোন একটি বলের পরিমাণ $P$ এবং বাহু $p$ হইলে, উহাকে প্রায়ই $(P, p)$ লিখিয়া সূচিত করা হয়।

**12·10. একটি যুগ্মবলের সমতলস্থিত যে-কোন বিন্দুর চারিদিকে বল-দুইটির ভ্রামকের বৈজিক সমষ্টি নিত্য ও যুগ্মবলের ভ্রামকের সমান (The algebraic sum of the moments of the two forces forming a couple about a point in their plane is a constant and is equal to the moment of the couple) :** একটি যুগ্মবলের প্রত্যেক বল যেন $P$ এবং $O$ যেন ঐ যুগ্মবলের সমতলস্থিত যে-কোন একটি বিন্দু। $O$



70নং চিত্র

হইতে বল-দুইটির ক্রিয়ারেখার উপর লম্বাভিমুখে $\overleftrightarrow{OAB}$ রেখা টানা হইল। উহা যেন $A$ ও $B$ বিন্দুতে বল-দুইটির ক্রিয়ারেখাকে ছেদ করে।

স্পষ্টতই, বল-দুইটির ভ্রামক বিপরীতমুখী। প্রদত্ত চিত্র অনুসারে, $O$ বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক-দুইটির বৈজিক সমষ্টি

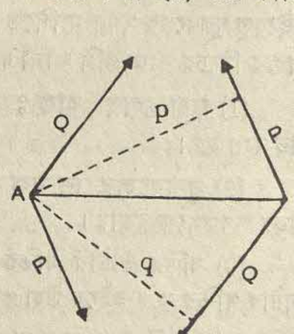
$$= P.\overline{OB} - P.\overline{OA} = P(\overline{OA} + \overline{AB}) - P.\overline{OA}$$
$$= P.\overline{OA} + P.\overline{AB} - P.\overline{OA} = P.\overline{AB}$$
$$= \text{ধ্রুবক}, \quad [\because \; P \text{ ও } \overline{AB} \text{ ধ্রুবক}]$$
= যুগ্মবলটির ভ্রামকের সমান।

**12·11. একই কঠোর বস্তুর উপর একই সমতলে সক্রিয় দুইটি যুগ্মবলের ভ্রামক যদি সমান ও বিপরীতমুখী হয়, তবে তাহারা সাম্যাবস্থায় থাকিবে (If the moments of two couples acting in a plane on a rigid body be equal but opposite in sense, then they will be in equilibrium) :** যুগ্মবল-দুইটি যেন $(P, p)$ ও $(Q, q)$। উহারা সমান ও বিপরীতমুখী বলিয়া $Pp - Qq = 0$ ... (i)

(1) **প্রথমত, যুগ্মবল-দুইটির বলগুলি যদি সমান্তরাল না হয়,** তবে একটির একটি বল $P$-র ক্রিয়ারেখা অপরটির একটি বল $Q$-র ক্রিয়ারেখার সহিত $A$ বিন্দুতে এবং বাকী $P$ ও $Q$ বল-দুইটির ক্রিয়ারেখাদ্বয় যেন $B$ বিন্দুতে ছেদ করে।

$A$ বিন্দুর চারিদিকে $B$ বিন্দুতে মিলিত $P$ ও $Q$ বলের ভ্রামকের বৈজিক সমষ্টি ( চিত্র অনুসারে ) $Pp - Qq$.

কিন্তু (i) অনুসারে, $Pp - Qq = 0$. সুতরাং $B$ বিন্দুস্থিত $P$ ও $Q$ বলের লব্ধির ক্রিয়ারেখা নিশ্চয়ই $A$ বিন্দুগামী। কাজেই এই লব্ধি $B$ হইতে $A$-র অভিমুখে $\overrightarrow{BA}$ বরাবর সক্রিয়।

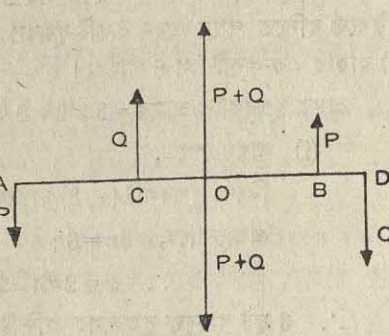


71নং চিত্র

অনুরূপে দেখানো যায় যে, $A$ বিন্দুতে মিলিত $P$ ও $Q$ বলের লব্ধি $A$ হইতে $B$-র অভিমুখে $\overrightarrow{AB}$ রেখা বরাবর সক্রিয়।

এখন $A$ বিন্দুতে সক্রিয় $P$ ও $Q$ বল-দুইটি $B$ বিন্দুতে সক্রিয় যথাক্রমে $P$ ও $Q$ বল-দুইটির মানে সমান, কিন্তু দিকে বিপরীত। দ্বিতীয়ত $A$ বিন্দুতে বল-দুইটির মধ্যবর্তী কোণ $B$ বিন্দুতে সক্রিয় বল-দুইটির মধ্যবর্তী কোণের সমান। কাজেই ঐ দুইজোড়া বলের লব্ধি-দুইটি নিশ্চয়ই সমান ও বিপরীতমুখী। যেহেতু তাহাদের ক্রিয়াপথ একই রেখায় $B$ হইতে $A$-র মুখে বা $A$ হইতে $B$-র মুখে বিস্তারিত, সেইহেতু উক্ত লব্ধি-দুইটির ফল শূন্য। অতএব উল্লিখিত যুগ্মবল-দুইটির লব্ধি শূন্য অর্থাৎ উহারা সাম্যাবস্থায় রহিয়াছে।

(2) **দ্বিতীয়ত, যুগ্মবল-দুইটির বলগুলি যদি সমান্তরাল হয়,** তবে ঐ বলগুলির ক্রিয়ারেখার উপর লম্বভাবে একটি রেখা টানা হইল। রেখাটি যেন $(P, p)$ যুগ্মবলের বল-দুইটির ক্রিয়া-রেখাকে যথাক্রমে $A$ ও $B$ বিন্দুতে এবং $(Q, q)$ যুগ্মবলের বল-দুইটির ক্রিয়া-রেখাকে যথাক্রমে $C$ ও $D$ বিন্দুতে বিন্দুতে ছেদ করে।




72নং চিত্র

যেহেতু যুগ্মবল-দুইটির ভ্রামক দুইটি সমান ও বিপরীতমুখী, অর্থাৎ

যেহেতু $Pp - Qq = 0$ ;

সেইহেতু $P.\overline{AB} = Q.\overline{CD}$ $\quad\cdots$ (ii)

$B$ ও $C$ বিন্দুতে সক্রিয় $P$ ও $Q$ বল-দুইটি সদৃশ ও সমান্তরাল। তাহাদের লব্ধি $(P+Q)$ যেন $O$ বিন্দুতে সক্রিয়। তাহা হইলে,

$$P.\overline{BO} = Q.\overline{CO} \quad \cdots \text{(iii)}$$

(ii) হইতে (iii) বিয়োগ করিলে,

$$P.\overline{AB} - P.\overline{BO} = Q.\overline{CD} - Q.\overline{CO} ;$$

অথবা $\quad P.\overline{AO} = P.\overline{DO}$

$A$ বিন্দুতে সক্রিয় $P$ ও $D$ বিন্দুতে সক্রিয় $Q$ বল-দুইটি সদৃশ ও সমান্তরাল।

$\therefore \quad P.\overline{AO} = Q.\overline{DO}.$

সেইহেতু এই $P$ ও $Q$ বল-দুইটির লব্ধিও $O$ বিন্দুগামী এবং তাহার মানও $(P+Q)$।

কিন্তু প্রথমোক্ত লব্ধি $(P+Q)$ এবং শেষোক্ত লব্ধি $(P+Q)$ পরস্পর বিপরীতমুখী

ও একই বিন্দুতে সক্রিয়। কাজেই তাহাদের ফল শূন্য। অতএব যুগ্মবল-দুইটির মোট চারিটি বলের লব্ধি শূন্য, অর্থাৎ তাহারা সাম্যাবস্থাপন্ন।

**অনুসিদ্ধান্ত।** 12·11 অনুচ্ছেদ হইতে অনুসিদ্ধান্ত এই হয় যে, **দুইটি যুগ্ম-বলের ভ্রামক যদি সমান ও একমুখী** ( অর্থাৎ এক-চিহ্নযুক্ত ) **হয়, তবে একটি আর একটির তুল্য** *(equivalent)*।

উদাহরণস্বরূপ, $(P, p)$ যুগ্মবলটির ভ্রামক $= P.p.$ উক্ত যুগ্মবলের স্থলে অপর একটি যুগ্মবল $\left(F, \frac{Pp}{F}\right)$ লিখিলেও ভ্রামক একই হয়, অর্থাৎ এক্ষেত্রেও ভ্রামক $= F.\frac{Pp}{F} = Pp.$ সুতরাং উল্লিখিত দুইটি যুগ্মবলের যে-কোন একটিকে অপরটির বিকল্প হিসাবে গ্রহণ করা যায়। অর্থাৎ একটি আর একটির তুল্য (equivalent)।

**উদাহরণ।** একটি যুগ্মবলের বাহু 2 ফুট এবং এক-একটি বল 3 পাউণ্ড। ইহার পরিবর্তে বসিতে পারে এমন একটি যুগ্মবল বাহির কর—(i) যাহার বাহু 3 ফুট হইবে, (ii) যাহার এক-একটি বল 6 পাউণ্ড।

প্রদত্ত যুগ্মবলটির ভ্রামক $= 3 \times 2 = 6$ একক।

(i) প্রথম ক্ষেত্রে,

নির্ণেয় যুগ্মবলটি $(x, 3)$ ধরিলে, উহার ভ্রামক $= 3x$ একক।

প্রশ্নানুসারে, $3x = 6$ ;

$\therefore\ x = 2$ পাউণ্ড।

$\therefore$ 3 ফুট বাহুযুক্ত যুগ্মবলের প্রতিটি বল $= 2$ পাউণ্ড।

$\therefore$ উক্ত যুগ্মবল $= (2, 3)$.

(ii) দ্বিতীয় ক্ষেত্রে,

নির্ণেয় যুগ্মবল $(6, y)$ ধরিলে, উহার ভ্রামক $= 6y$.

প্রশ্নানুসারে, $6y = 6$ ;

$\therefore\ y = 1.$

$\therefore$ দ্বিতীয় ক্ষেত্রে যুগ্মবলটি $= (6, 1)$, অর্থাৎ উহার প্রত্যেকটি বল 6 পাউণ্ড এবং বাহু 1 ফুট।

**12·12. একই সমতলস্থিত যুগ্মবলের লব্ধি (Resultant of coplanar couples) : একটি বস্তুর উপর একই সমতলে সক্রিয় একাধিক যুগ্মবল এমন একটি যুগ্মবলের তুল্য** *(equivalent)* **যাহার ভ্রামক, প্রথমোক্ত যুগ্মবলগুলির ভ্রামকসমূহের বৈজিক সমষ্টির সমান।**

ধরা যাক, একটি বস্তুর উপর একই সমতলে $(P, p)$, $(Q, q)$, $(R, r), \cdots$ প্রভৃতি কতকগুলি যুগ্মবল সক্রিয় রহিয়াছে।

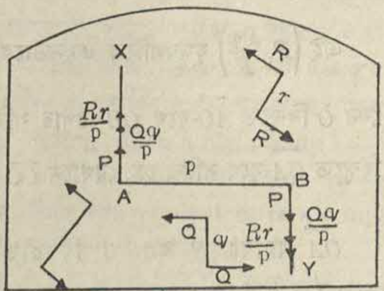
$(P, p)$ যুগ্মবলটির বাহু $p$ যেন $\overline{AB}$ দ্বারা সূচিত এবং উহার বল-দুইটি যেন $\overrightarrow{AX}$ ও $\overrightarrow{BY}$ রেখায় সক্রিয়।

এখন, $(Q, q)$, $(R, r)$ প্রভৃতি অপর যুগ্মবলগুলির প্রত্যেকটিকে $p$ বাহুযুক্ত তুল্য যুগ্মবলে রূপান্তরিত করিলে,

$(Q, q)$ যুগ্মবল $\equiv \left(\dfrac{Qq}{p},\ p\right)$ যুগ্মবল,

$(R, r)$ " $\equiv \left(\dfrac{Rr}{p},\ p\right)$ "

ইত্যাদি, ইত্যাদি।




73নং চিত্র

এইরূপে $(Q, q)$ যুগ্মবলের বদলে $\left(\dfrac{Qq}{p},\ p\right)$ যুগ্মবল লইলে, শেষোক্তটির বাহু $\overline{AB}$-র উপর সমাপতিত ও উহার বলদ্বয় $\overrightarrow{AX}$ ও $\overrightarrow{BY}$ বরাবর সক্রিয় বলিয়া কল্পনা করা যায়। অনুরূপে $(R, r)$ যুগ্মবলের বিকল্প $\left(\dfrac{Rr}{p},\ p\right)$ যুগ্মবলের বাহু $\overline{AB}$-র উপর সমাপতিত ও উহার বলদ্বয় $\overrightarrow{AX}$ ও $\overrightarrow{BY}$ বরাবর সক্রিয় বলিয়া ধরা যায়। এইরূপে অন্যান্য সকল যুগ্মবলকে স্থাপন করিলে, এমন একটিমাত্র যুগ্মবল পাওয়া যায়, যাহার বাহু $\overline{AB}$ এবং প্রত্যেকটি বল $= P + \dfrac{Qq}{p} + \dfrac{Rr}{p} + \cdots\cdots$

এই যুগ্মবলের ভ্রামক $= \left(P + \dfrac{Qq}{p} + \dfrac{Rr}{p} + \cdots\cdots\right) \times p$

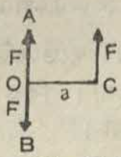
$= Pp + Qq + Rr + \cdots\cdots$

= যুগ্মবলগুলির ভ্রামকসমূহের বৈজিক সমষ্টি।

**12·13. একটি যুগ্মবল ও একটি বলের লব্ধি (Resultant of a force and a couple)ঃ একটি যুগ্মবল ও একটি বলের লব্ধি শেষোক্ত বলটির সমান ও সমান্তরাল একটিমাত্র বলের তুল্য** *(euivalent)*ঃ




74(a)নং চিত্র




74(b)নং চিত্র

$O$ বিন্দুতে $\overrightarrow{OA}$ বরাবর সক্রিয় $F$ একটি বল ; $(P, p)$ একটি যুগ্মবল। ইহাদের লব্ধি নির্ণয় করিতে হইবে।

$(P, p)$ যুগ্মবলটিকে অপর এমন একটি তুল্য যুগ্মবলে পরিবর্তিত করা হইল, যাহার প্রত্যেকটি বলের মান $F$ এবং বাহু $a$.

তাহা হইলে, $Pp = Fa$. $\therefore \; a = \frac{Pp}{F}$.

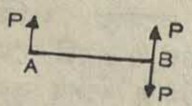
এই $\left(F, \frac{Pp}{F}\right)$ যুগ্মবলটিকে এমনভাবে স্থাপন করা হইল যে, উহার একটি বল $F$ যেন $O$ বিন্দুতে $\overrightarrow{AO}$-মুখে $\overrightarrow{OB}$ রেখায় সক্রিয় হয়। যুগ্মবলটির অপর $F$ বলটি যেন $C$ বিন্দুতে $\overrightarrow{OA}$-মুখে সক্রিয় হয়, যেখানে $\overline{OC} = a = \frac{Pp}{F}$.

$\overrightarrow{OA}$ বরাবর $F$ বল ও বিপরীত মুখে $\overrightarrow{OB}$ বরাবর $F$ বলের লব্ধি শূন্য। কাজেই $\left(F, \frac{Pp}{F}\right)$ যুগ্মবল ও $F$ বলটির লব্ধি কেবল $C$ বিন্দুতে সক্রিয় $F$ বল। অর্থাৎ $(P, p)$ যুগ্মবল ও $F$ বলের লব্ধি $C$ বিন্দুতে সক্রিয় $F$ বল। স্পষ্টতই, লব্ধি $F$ বল ও উপাংশ $F$ বল পরস্পর সমান্তরাল ও সমান। দ্বিতীয়ত, এই লব্ধির প্রয়োগ-বিন্দু $C$, প্রদত্ত $F$ বলের ক্রিয়ারেখা হইতে $\frac{Pp}{F}$ একক লম্ব-দূরত্বে অবস্থিত।

**অনুসিদ্ধান্ত।** একই সমতলে সক্রিয় একটি বল ও যুগ্মবল কখনও সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করিতে পারে না।

### 12·14. একটি কঠোর বস্তুর উপর যে-কোন বিন্দুতে সক্রিয় একটি বল, ঐ বস্তুর অন্য যে-কোন বিন্দুতে সক্রিয় উহার সমান ও সমান্তরাল অপর একটি বল এবং একটি যুগ্মবলের লব্ধির তুল্য (A force acting at a point on a rigid body is equivalent to an equal and parallel force acting at any point on the body together with a couple) :

একটি বস্তুর $A$ বিন্দুতে সক্রিয় $P$ একটি বল। উহার অপর যে-কোন একটি বিন্দু $B$। $B$ বিন্দুতে $A$ বিন্দুস্থিত $P$ বলের সমান্তরাল রেখায় $P$ ও $-P$ বল প্রয়োগ করা হইল। $B$ বিন্দুস্থিত এই $P$ ও $-P$ বলের লব্ধি শূন্য বলিয়া, $A$ বিন্দুস্থিত $P$ বলের উপর উহাদের কোন ক্রিয়া নাই।



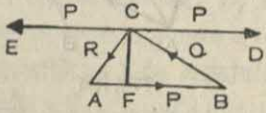
75নং চিত্র

অতএব, $A$ বিন্দুতে সক্রিয় এই $P$ বল ও $B$ বিন্দুতে সক্রিয় $P$ ও $-P$ বল প্রথমোক্ত বলের (বা $A$ বিন্দুস্থিত $P$ বলের) তুল্য। কিন্তু $A$ বিন্দুস্থিত $P$ বল ও $B$ বিন্দুস্থিত $-P$ বল দ্বারা একটি যুগ্মবল সূচিত হয়।

$\therefore$ $A$ বিন্দুতে সক্রিয় $P$ বল এইভাবে $B$ বিন্দুতে সক্রিয় উহার সমান ও সমান্তরাল $P$ বল ও উক্ত $(P, \overline{AB})$ যুগ্মবলের লব্ধির তুল্য।

**12·15. একটি কঠোর বস্তুর উপর সক্রিয় তিনটি বলকে যদি একটি ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত বাহুত্রয় দ্বারা দিক্-মান-অভিমুখ ও ক্রিয়ারেখায় সূচিত করা যায়, তবে ঐ বল-তিনটি মিলিয়া উল্লিখিত ত্রিভুজের দ্বিগুণ আয়তন-পরিমাণ ভ্রামক-বিশিষ্ট একটি যুগ্মবলের তুল্য (equivalent) হয় (If three forces acting upon a rigid body be represented in magnitude, direction, sense and line of action by the sides of a triangle, taken in order, they are equivalent to a couple whose moment is equal to twice the area of the triangle) :**

একটি কঠোর বস্তুর উপর সক্রিয় $P$, $Q$ ও $R$ এই তিনটি বলকে $ABC$ ত্রিভুজের যথাক্রমে $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ ও $\overline{CA}$ বাহু দ্বারা যেন দিক্-মান-অভিমুখ ও ক্রিয়ারেখায় সূচিত করা যায়। $C$ বিন্দুতে $\overline{AB}$ রেখায় সমান্তরাল-ভাবে অঙ্কিত $\overleftrightarrow{ECD}$ রেখা বরাবর $P$ বলের সমান দুইটি বল পরস্পরের বিপরীত মুখে প্রযুক্ত হইল। এই দুইটি $P$ বলের লব্ধি শূন্য বলিয়া উহাদের প্রয়োগে $P$, $Q$ ও $R$ বলের লব্ধি প্রভাবিত হইবে না।




76নং চিত্র

এখন, $C$ বিন্দুতে $\overline{CD}$, $\overline{BC}$ ও $\overline{CA}$ রেখা বরাবর সক্রিয় $P$, $Q$ ও $R$ বল-তিনটিকে $ABC$ ত্রিভুজের $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ ও $\overline{CA}$ বাহু দ্বারা দিকে ও মানে সূচিত করা যায়; কাজেই তাহাদের লব্ধি শূন্য। বাকী থাকে $\overrightarrow{CE}$ বরাবর $P$ বল ও $\overrightarrow{AB}$ বরাবর $P$ বল। স্পষ্টতই ইহারা একটি যুগ্মবল গঠন করে। $C$ হইতে $\overline{AB}$-র উপর $\overline{CF}$ লম্ব অঙ্কিত হইলে, উহাই উক্ত যুগ্মবলের বাহু হইবে। সুতরাং $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ ও $\overline{CA}$ দ্বারা দিক্-মান-অভিমুখ ও ক্রিয়ারেখায় সূচিত যথাক্রমে $P$, $Q$ ও $R$ বল একটি যুগ্মবলের তুল্য।

এই যুগ্মবলের ভ্রামক $= P.\overline{CF}$

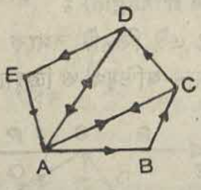
$$= \overline{AB}.\overline{CF} = 2.\tfrac{1}{2}\overline{AB}.\overline{CF}$$
$$= 2\triangle ABC.$$

**বিশেষ দ্রষ্টব্য :** বল-ত্রিভুজ প্রতিজ্ঞার সহিত এই প্রতিজ্ঞার পার্থক্য লক্ষণীয়। বল-ত্রিভুজের বাহুগুলি **এক বিন্দুতে সক্রিয়** তিনটি বলকে দিকে ও মানে সূচিত করে মাত্র। কাজেই উক্ত বলগুলির **ক্রিয়ারেখা** কখনও ঐ বাহুগুলি বরাবর কল্পিত হইতে পারে না।

**12·16. একটি কঠোর বস্তুর উপর একই সমতলে সক্রিয় কতকগুলি বলকে যদি একটি বহুভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত বাহুগুলির দ্বারা দিক্-মান-অভিমুখ**

**ও ক্রিয়ারেখায় সূচিত করা যায়, তবে উল্লিখিত বহুভুজের দ্বিগুণ আয়তন-পরিমাণ ভ্রামক-বিশিষ্ট একটি যুগ্মবল ঐ বলগুলির তুল্য হইবে (If a system of coplanar forces acting upon a rigid body be represented in magnitude, direction, sense and line of action by the sides of a polygon taken in order, they are equivalent to a couple whose moment is represented by twice the area of the polygon) :**

একটি কঠোর বস্তুর উপর সক্রিয় কতকগুলি বল যেন $ABCDE$ বহুভুজের $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}$ ও $\overline{EA}$ বাহু দ্বারা সম্পূর্ণরূপে সূচিত হয়। $\overline{AC}$ ও $\overline{AD}$ রেখা বরাবর যথাক্রমে $\overline{AC}$ ও $\overline{CA}$ এবং $\overline{AD}$ ও $\overline{DA}$ দ্বারা সূচিত সমান ও বিপরীতমুখী দুইজোড়া বল প্রযুক্ত হইল। স্পষ্টতই ইহাদের দ্বারা আলোচ্য বলশ্রেণী কিছুমাত্র প্রভাবিত হইবে না। এখন,



77নং চিত্র

(i) $\overline{AB}, \overline{BC}$ ও $\overline{CA}$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে সূচিত বলত্রয় $\equiv 2\triangle ABC$ পরিমাণ ভ্রামকবিশিষ্ট একটি যুগ্মবল।

(ii) $\overline{AC}, \overline{CD}$ ও $\overline{DA}$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে সূচিত বলত্রয় $\equiv 2\triangle ACD$ পরিমাণ ভ্রামক-বিশিষ্ট একটি যুগ্মবল।

(iii) $\overline{AD}, \overline{DE}$ ও $\overline{EA}$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে সূচিত বলত্রয় $\equiv 2\triangle ADE$ পরিমাণ ভ্রামক-বিশিষ্ট একটি যুগ্মবল।

$\therefore$ $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}$ ও $\overline{EA}$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে সূচিত বলসমূহ
$\equiv 2\triangle ABC$ পরিমাণ ভ্রামক-বিশিষ্ট যুগ্মবল $+ 2\triangle ACD$ পরিমাণ ভ্রামক-বিশিষ্ট যুগ্মবল $+ 2\triangle ADE$ পরিমাণ ভ্রামক-বিশিষ্ট যুগ্মবল
$\equiv 2(\triangle ABC + \triangle ACD + \triangle ADE)$ বা $2 \times$ বহুভুজ $ABCDE$ পরিমাণ ভ্রামক-বিশিষ্ট একটি যুগ্মবল।

## উদাহরণমালা

**উদাহরণ 1.** $ABCD$ আয়তক্ষেত্রের $\overline{AB}$ এবং $\overline{CD}$ বাহু বরাবর প্রত্যেকটি 4 পাউণ্ড-ভারের সমান দুইটি বল সক্রিয়। যদি $\overline{AB}$ ও $\overline{BC}$ বাহু যথাক্রমে 6 ও 4 ফুট দীর্ঘ হয়, তবে $\overline{AD}$ ও $\overline{CB}$ বরাবর কত বল কাজ করিলে বলগুলি সাম্যাবস্থায় থাকিবে?

$ABCD$ আয়তক্ষেত্রের $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ বরাবর সক্রিয় 4 পাউণ্ড-ভার বল-দুইটি একটি যুগ্মবল উৎপন্ন করে। $\overline{BC} = 4$ ফুট বলিয়া,

ঐ যুগ্মবলের ভ্রামক $= 4 \times 4$ বা 16 একক।

এই যুগ্মবলের সমান ও বিপরীত চিহ্নযুক্ত ভ্রামক-সম্পন্ন অপর একটি যুগ্মবলই মাত্র বলগুলির সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করিতে পারে। স্পষ্টতই আয়তক্ষেত্রটির $\overrightarrow{AD}$ ও $\overrightarrow{CB}$-মুখী যুগ্মবল, $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$-মুখী যুগ্মবলের বিপরীত। সুতরাং দ্বিতীয় যুগ্মবলটির প্রত্যেকটি বলের সমান যদি $P$ হয়, তবে উহাদের লম্ব-দূরত্ব বা বাহু

$$\overline{AB} = 6 \text{ ফুট};$$

$\therefore \quad P \times 6 = 16;$

বা, $\quad P = \frac{16}{6} = 2\frac{2}{3}$ পাউণ্ড-ভার।

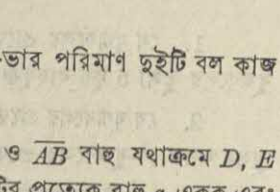
$\therefore$ $\overline{AD}$ ও $\overline{CB}$ বরাবর প্রত্যেকটি $2\frac{2}{3}$ পাউণ্ড-ভার পরিমাণ দুইটি বল কাজ করিলে উল্লিখিত বলগুলি সাম্যাবস্থায় থাকিবে।

**উদাহরণ 2.** $ABC$ সমবাহু ত্রিভুজের $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ ও $\overline{AB}$ বাহু যথাক্রমে $D$, $E$ ও $F$ বিন্দুতে $5:1$ অনুপাতে বিভক্ত হইয়াছে। ত্রিভুজটির প্রত্যেক বাহু $a$ একক এবং $D$, $E$ ও $F$ বিন্দুতে বাহুগুলির উপর লম্বভাবে ত্রিভুজের বাহিরের দিকে প্রত্যেকটি $P$ মানের সমান বল সক্রিয়। প্রমাণ কর যে, ঐ বল-তিনটির লব্ধি এমন একটি যুগ্মবল, যাহার ভ্রামকের মান $Pa$. [ C. U. I.Sc. 1943 ]

$$\frac{\overline{DC}}{\overline{BD}} = \frac{1}{5}, \text{ বা, } \frac{\overline{DC}+\overline{BD}}{\overline{BD}} = \frac{1+5}{5}, \text{ বা, } \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \frac{6}{5}; \text{ অথবা, } \frac{\overline{BD}}{a} = \frac{5}{6}.$$

$\therefore \ \overline{BD} = \frac{5}{6}a$ এবং $\overline{DC} = \frac{1}{6}a.$

অনুরূপভাবে, $\overline{CE} = \frac{5}{6}a$ এবং $\overline{BF} = \frac{1}{6}a.$



78নং চিত্র

$E$ বিন্দুতে সক্রিয় $P$ বলের ক্রিয়ারেখা যেন $\overline{BC}$ বাহুকে $M$ বিন্দুতে ছেদ করে। এখন, $\angle MEC = 90°$, $\angle C = 60°$ বলিয়া, $\angle EMC = 30°$. $B$ হইতে $\overline{PM}$ রেখার উপর $\overline{BN}$ লম্ব-পাত করা হইলে, $\overline{BN} = \overline{BM}\sin 30° = \frac{\overline{BM}}{2}$,

$$\overline{CE} = \overline{MC}\ \sin 30° = \frac{\overline{MC}}{2}; \quad \therefore \ \overline{MC} = 2\overline{CE} = 2\frac{5}{6}a = \frac{5}{3}a.$$

$$\therefore \ \overline{BM} + \overline{BC} = \frac{5}{3}a \text{ বা } \overline{BM} = \frac{5}{3}a - a = \frac{2}{3}a.$$

$$\therefore \ \overline{BN} = \frac{\overline{BM}}{2} = \frac{2}{6}a.$$

$B$ বিন্দুর চারিদিকে বল-তিনটির ভ্রামক লইলে, উহাদের বৈজিক সমষ্টি

$$= P.\overline{BD} + P.\overline{BN} - P.\overline{BF}$$

$$= P\cdot\frac{5}{6}a + P\cdot\frac{2}{6}a - P\cdot\frac{1}{6}a = \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{6}\right)Pa = Pa.$$

অনুরূপভাবে, $A$ ও $C$ বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইলে, প্রত্যেক ক্ষেত্রে ভ্রামকগুলির বৈজিক সমষ্টি $Pa$ হইবে। সুতরাং বলগুলির লব্ধি $Pa$ ভ্রামক-সম্পন্ন একটি যুগ্মবল।

## প্রশ্নমালা 14

1. যে যুগ্মবলের প্রত্যেকটি বল 6 পাউণ্ড-ভার এবং বাহু 4 ফুট 2 ইঞ্চি, সেই যুগ্মবলের তুল্য 5 ফুট বাহুযুক্ত অপর একটি যুগ্মবলের প্রত্যেকটি বলের মান নির্ণয় কর।

2. যে যুগ্মবলের প্রত্যেকটি বল 10 পাউণ্ড-ভার এবং বাহু 4 ফুট, সেই যুগ্মবলের তুল্য অপর যে-যুগ্মবলের প্রত্যেকটি বল 8 পাউণ্ড-ভার, তাহার বাহু কত?

3. একটি বর্গক্ষেত্রের ক্রমানুসারে গৃহীত বাহুগুলি বরাবর যথাক্রমে 3, 5, 3 এবং 5 পাউণ্ড-ভার বল সক্রিয়। উহাদের লব্ধি নির্ণয় কর।

ঐ বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 10 ফুট হইলে, ঐ লব্ধির মান কত হইবে?

[ W. B. H. S. 1970 ]

4. $ABCD$ সামান্তরিকের $\overline{AB}$, $\overline{CB}$, $\overline{CD}$ ও $\overline{AD}$ বরাবর যথাক্রমে $P$, $Q$, $P$, $Q$—এই চারিটি বল সক্রিয়। $\overline{AB}$ ও $\overline{BC}$ যথাক্রমে 4 ও 3 ফুট এবং বলগুলির লব্ধি শূন্য হইলে, $P$ ও $Q$-র অনুপাত নির্ণয় কর।

5. $ABCD$ বর্গক্ষেত্রের $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ বাহু এবং $\overline{AC}$ কর্ণ বরাবর যথাক্রমে 1, 2, 3, 4 ও $2\sqrt{2}$ একক বল সক্রিয়। প্রমাণ কর যে, এই বলগুলির লব্ধি একটি যুগ্মবল এবং এই যুগ্মবলের ভ্রামক নির্ণয় কর।

[ C. U. I.Sc. 1947 ; W. B. H. S. '65, '66, '68, '71 ]

6. $ABCD$ বর্গক্ষেত্রের $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ বাহু এবং $\overline{DB}$ ও $\overline{CA}$ কর্ণ বরাবর যথাক্রমে 1, 2, 1, $\sqrt{2}$ ও $\sqrt{2}$-এর আনুপাতিক বলসমূহ সক্রিয়। প্রমাণ কর যে, উহাদের লব্ধি একটি যুগ্মবল এবং ঐ যুগ্মবলের ভ্রামক নির্ণয় কর।

[ C. U. I.Sc. 1952 ]

7. $ABCD$ বর্গক্ষেত্রের $\overline{AB}$ ও $\overline{CD}$ বরাবর 3 পাউণ্ড-ভারের সমান করিয়া এবং $\overline{AD}$ ও $\overline{CB}$ বরাবর $7\frac{1}{2}$ পাউণ্ড-ভারের সমান করিয়া এক-একটি বল সক্রিয়; বর্গটির প্রতি বাহু যদি 10 ইঞ্চি হয়, তবে যে-যুগ্মবল প্রয়োগ করিলে উল্লিখিত বলগুলির সাম্যাবস্থার সৃষ্টি হয়, সেই যুগ্মবলের ভ্রামক নির্ণয় কর।

8. একটি 4 ফুট বাহুযুক্ত যুগ্মবলের প্রত্যেকটি বল 5 পাউণ্ড। ঐ যুগ্মবল ও একই সমতলে সক্রিয় 10 পাউণ্ড বলের লব্ধি নির্ণয় কর।

9. *ABCD* বর্গক্ষেত্রের $\overline{AB}$, $\overline{CB}$, $\overline{AD}$ ও $\overline{DC}$ প্রত্যেক বাহু বরাবর *P* বল সক্রিয়। বলগুলির লব্ধি নির্ণয় কর।

10. একটি যুগ্মবল ও একটি বলের লব্ধি 12 পাউণ্ড। যুগ্মবলটির ভ্রামক যদি 24 পাউণ্ড-ফুট একক হয়, তবে প্রদত্ত বলটি হইতে কত দূরে ঐ লব্ধি সক্রিয়?

11. 40 সে.মি. বাহুযুক্ত একটি যুগ্মবলের প্রত্যেকটি বল 5 কি.গ্রা.। ঐ যুগ্মবল ও একই সমতলে একটি নির্দিষ্ট অভিমুখে সক্রিয় 10 কি.গ্রা. বলের লব্ধি নির্ণয় কর।

## ত্রয়োদশ অধ্যায়

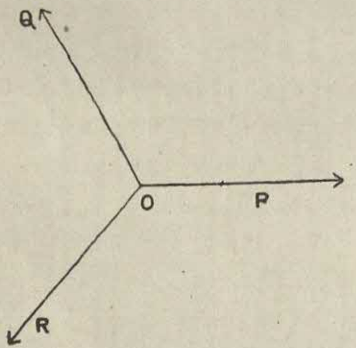
# একই সমতলে সক্রিয় তিন বা ততোধিক বলের লব্ধি ও সাম্যাবস্থা

## ( Resultant and Equilibrium of three or more forces in a Plane )

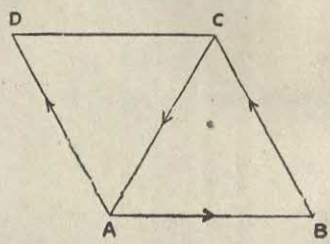
**13·1. বল-ত্রিভুজ প্রতিজ্ঞা (Triangle of forces) ঃ একটি বস্তুকণার উপর সক্রিয় তিনটি বলকে যদি কোন একটি ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত বাহু-তিনটি দ্বারা, অবস্থানে না হইলেও দিকে ও মানে সূচিত করা যায়, তবে ঐ তিনটি বল অবশ্যই সাম্যাবস্থাপন্ন হইবে।**

$O$ বিন্দুতে সক্রিয় $P$, $Q$ ও $R$ এই তিনটি বলকে যেন $ABC$ ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত, যথাক্রমে $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ এবং $\overline{CA}$ বাহু দ্বারা দিকে ও মানে সূচিত করা যায়।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $P$, $Q$ ও $R$ বলত্রয় সাম্যাবস্থায় রহিয়াছে।




79(a)নং চিত্র



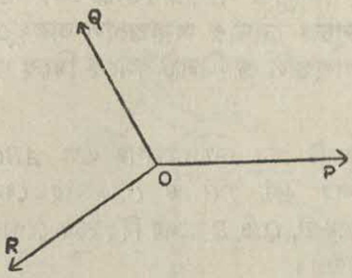

79(b)নং চিত্র

$ABCD$ সামান্তরিক পূর্ণ করা হইল। যেহেতু $\overline{AD}$ বাহু $\overline{BC}$ বাহুর সমান ও সমান্তরাল, সেইহেতু $\overline{BC}$ বাহু দ্বারা সূচিত $Q$ বল $\overline{AD}$ বাহু দ্বারাও দিকে ও মানে সূচিত হইতে পারে।

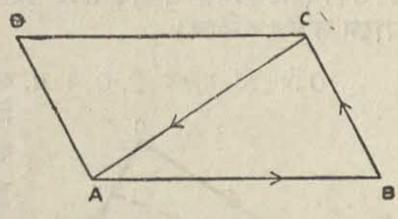
$\therefore$ $ABCD$ সামান্তরিকের $\overline{AB}$ ও $\overline{AD}$ বাহু যথাক্রমে $P$ ও $Q$ বলকে দিকে ও মানে সূচিত করিবে। কাজেই $\overline{AC}$ কর্ণ দিকে ও মানে উহাদের লব্ধি সূচিত করিবে। কিন্তু $\overline{AC}$ দ্বারা সূচিত বল $\overline{CA}$ দ্বারা সূচিত $R$ বলের সমান ও বিপরীতমুখী এবং সেই কারণে তাহাদের লব্ধি শূন্য।

সুতরাং $P$, $Q$ ও $R$ বলের লব্ধি শূন্য অর্থাৎ ঐ বল-তিনটি সাম্যাবস্থাপন্ন।

**অনুসিদ্ধান্ত। ABC ত্রিভুজের $\overline{AB}$ ও $\overline{BC}$ বাহু যদি P ও Q বলকে দিকে ও মানে সূচিত করে, তবে ঐ বল-দুইটির লব্ধি $\overline{AC}$ বাহু দ্বারা সূচিত হইবে।**




80($a$)নং চিত্র




80($b$)নং চিত্র

## 13·2. বল-ত্রিভুজ সূত্রের বিপরীত প্রতিজ্ঞা (Converse of triangle of forces) :

**($a$) একই বিন্দুতে সক্রিয় তিনটি বল যদি সাম্যাবস্থায় থাকে, তবে একটি ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত বাহু-তিনটির দ্বারা উহাদিগকে দিকে ও মানে সূচিত করা যায়।**

$O$ বিন্দুতে সক্রিয় $P$, $Q$ এবং $R$—এই তিনটি বল যেন সাম্যাবস্থায় রহিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, এই বল-তিনটিকে একটি ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত বাহুগুলির দ্বারা দিকে ও মানে সূচিত করা যাইবে।

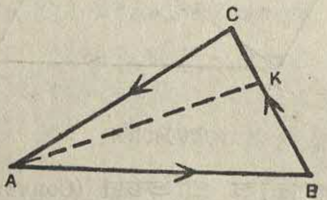
$P$ ও $Q$ বলের অভিমুখের সহিত সমান্তরাল দিকে যথাক্রমে $\overline{AB}$ ও $\overline{BC}$ খণ্ডরেখা-দুইটি পর পর এমনভাবে আঁকা হইল, যেন $\overline{AB}$ যে-মাপে $P$ বলকে সূচিত করে, $\overline{BC}$ সেই মাপে $Q$ বলকে সূচিত করে। $ABCD$ সামান্তরিক পূর্ণ করা হইল এবং $\overline{AC}$ কর্ণ অঙ্কিত হইল।

এখন, $\overline{AD}$ বাহু $\overline{BC}$ বাহুর সমান ও সমান্তরাল বলিয়া উহা দিকে ও মানে $Q$ বলকে সূচিত করিবে। অতএব $ABCD$ সামান্তরিকের সন্নিহিত বাহু $\overline{AB}$ ও $\overline{AD}$ দিকে ও মানে যথাক্রমে $P$ ও $Q$ বল সূচিত করে; কাজেই ঐ সামান্তরিকের $\overline{AC}$ কর্ণ নিশ্চয় $P$ ও $Q$ বলের লব্ধিকে দিকে ও মানে সূচিত করে। কল্পনা অনুসারে $P$, $Q$ ও $R$ বল সাম্যাবস্থায় আছে। সুতরাং $P$ ও $Q$ বলের লব্ধি $R$ বলের সমান ও বিপরীতমুখী

হইবে। কাজে-কাজেই $\overline{CA}$ রেখা $R$ বলকে দিকে ও মানে সূচিত করিবে। এইরূপে $ABC$ ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ ও $\overline{CA}$ বাহু যথাক্রমে $P$, $Q$ ও $R$ বলকে দিকে ও মানে সূচিত করে। সুতরাং সাম্যাবস্থাপন্ন সমবিন্দু তিনটি বলকে দিকে ও মানে একটি ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত বাহু-তিনটি দ্বারা সূচিত করা যায়।

(*b*) **বিকল্প সূত্র ও প্রমাণ: একই বিন্দুতে সক্রিয় তিনটি বল যদি সাম্যাবস্থায় থাকে, তবে উহাদের দিক্‌সূচক রেখার সমান্তরাল বাহুযুক্ত যে-কোন ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত বাহুগুলি ঐ তিনটি বলকে দিকে ও মানে সূচিত করিবে।**

$O$ বিন্দুতে সক্রিয় $P$, $Q$ ও $R$ বল-তিনটি যেন সাম্যাবস্থাপন্ন এবং $ABC$ ত্রিভুজের $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ ও $\overline{CA}$ বাহু যেন যথাক্রমে $P$, $Q$ ও $R$ বলের দিক্‌সূচক রেখার সমান্তরাল।




81নং চিত্র

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ ও $\overline{CA}$ বাহু দিকে ও মানে $P$, $Q$ ও $R$ বলকে সূচিত করিবে।

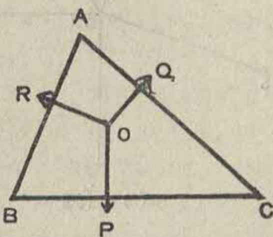
এখন, $\overline{AB}$ রেখার দৈর্ঘ্য যেন $P$ বলের মান সূচিত করে। একই মাপকাঠিতে $\overline{BC}$ রেখা যদি $Q$ বল সূচিত না করে, তবে $\overline{BK}$ অংশ যেন $Q$ বলের মান সূচিত করে। তাহা হইলে, বল-ত্রিভুজ প্রতিজ্ঞার অনুসিদ্ধান্ত অনুসারে $P$ ও $Q$ বলের লব্ধি $\overline{AK}$ দ্বারা সূচিত হইবে। সেক্ষেত্রে $R$ বল যদি $\overline{AK}$-এর সমান ও বিপরীতমুখী $\overline{KA}$ দ্বারা সূচিত হয়, তবেই $P$, $Q$ ও $R$ সাম্যাবস্থায় থাকিতে পারে। কিন্তু কল্পনা অনুসারে, $R$ বলের দিক্ $\overline{CA}$ রেখার সমান্তরাল বলিয়া, উহা কখনও $\overline{KA}$ রেখা দ্বারা সূচিত হইতে পারে না। কাজেই $\overline{BC}$ রেখার দৈর্ঘ্যই $Q$ বলের মান সূচিত করিবে এবং করিলে, $\overline{AB}$ ও $\overline{BC}$ দ্বারা সূচিত $P$ ও $Q$ বলের লব্ধি $\overline{AC}$ রেখা দ্বারা সূচিত হইবে। যেহেতু $P$, $Q$ ও $R$ সাম্যাবস্থাপন্ন, সেইহেতু $\overline{AC}$ রেখার সমান ও বিপরীতমুখী $\overline{CA}$ নিশ্চয় $R$ বলকে সূচিত করিবে। অতএব $ABC$ ত্রিভুজের $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ ও $\overline{CA}$ বাহু যথাক্রমে $P$, $Q$ ও $R$ বলকে দিকে ও মানে সূচিত করিবে।

**13·3. লম্ব বল-ত্রিভুজ প্রতিজ্ঞা: (Perpendicular triangle of forces): একটি ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত বাহুগুলির সমানুপাতী সমবিন্দু তিনটি বল যদি যথাক্রমে ঐ বাহুগুলির লম্ব-অভিমুখে সক্রিয় হয়, তবে ঐ বল-তিনটি সাম্যাবস্থাপন্ন হইবে।**

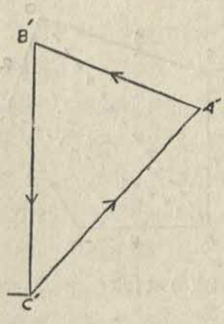
$O$ বিন্দুতে $P$, $Q$ ও $R$ এই তিনটি বল যেন $ABC$ ত্রিভুজের যথাক্রমে $\overline{BC}$, $\overline{CA}$

ও $\overline{AB}$ বাহুর সমানুপাতী এবং $P$ বল $\overline{BC}$-র, $Q$ বল $\overline{CA}$-র এবং $R$ বল $\overline{AB}$-র উপর লম্ব-অভিমুখে সক্রিয়।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $P$, $Q$ এবং $R$ সাম্যাবস্থাপন্ন। ত্রিভুজটির $C$ শীর্ষকে $\overline{BC}$ রেখাতেই $C'$ বিন্দুতে রাখিয়া ডানদিকে এক সমকোণ পরিমাণ ঘুরাইলে উহার



82($a$)নং চিত্র



82($b$)নং চিত্র

অবস্থান যেন $A'B'C'$ হয়। $P$, $Q$ এবং $R$, যথাক্রমে $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ ও $\overline{AB}$-এর সমানুপাতী; কাজেই উহারা যথাক্রমে $\overline{B'C'}$, $\overline{C'A'}$ এবং $\overline{A'B'}$-এর সমানুপাতী। সুতরাং $\overline{B'C'}$ যদি $P$ বলকে সূচিত করে, তবে একই মাপকাঠিতে $\overline{C'A'}$ বাহু $Q$ বলকে এবং $\overline{A'B'}$ বাহু $R$ বলকে সূচিত করিবে। দ্বিতীয়ত, $\overline{B'C'}$, $\overline{C'A'}$ ও $\overline{A'B'}$ যথাক্রমে $P$, $Q$ ও $R$ ক্রিয়ারেখার সমান্তরাল। অতএব $P$, $Q$ ও $R$ যথাক্রমে $\overline{B'C'}$, $\overline{C'A'}$ এবং $\overline{A'B'}$ বাহু দ্বারা দিকে ও মানে সূচিত। অতএব, বল-ত্রিভুজ প্রতিজ্ঞা অনুসারে $P$, $Q$ ও $R$ নিশ্চয় সাম্যাবস্থাপন্ন।

**বি. দ্র.।** বল-ত্রিভুজের বিপরীত প্রতিজ্ঞা অনুসারে উপরে বর্ণিত লম্ব বল-ত্রিভুজের বিপরীত প্রতিজ্ঞা সহজেই প্রমাণ করা যায়।

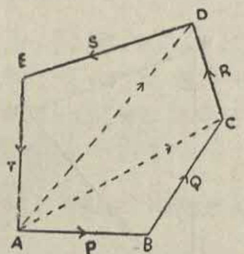
এই বিপরীত প্রতিজ্ঞাটি এইরূপ: **একটি ত্রিভুজের বাহু-তিনটির উপর লম্বভাবে সক্রিয় তিনটি বলের অধীন একটি বস্তুকণা যদি স্থির থাকে, তবে বল-তিনটি ঐ ত্রিভুজের বাহু-তিনটির সমানুপাতী হইবে।**

**13·4. বল-বহুভুজ প্রতিজ্ঞা (Polygon of forces): দুইয়ের অধিক যে-কোন-সংখ্যক সমবিন্দু বলকে যদি একটি পূর্ণ বহুভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত বাহুগুলি দ্বারা দিকে ও মানে সূচিত করা যায়, তবে ঐ বলগুলি সাম্যাবস্থাপন্ন হইবে।**

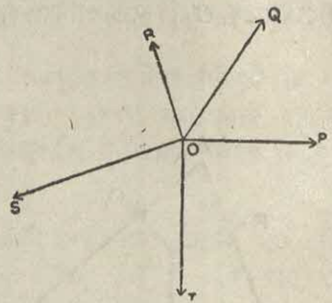
$P$, $Q$, $R$, $S$ ও $T$—এই কয়টি বল $O$ বিন্দুতে সক্রিয়। $ABCDE$ বহুভুজের

ক্রমানুসারে গৃহীত $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{CE}$ ও $\overline{EA}$ বাহু যেন যথাক্রমে $P$, $Q$, $R$, $S$ ও $T$ বলকে দিকে ও মানে সূচিত করে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, বলগুলি সাম্যাবস্থায় রহিয়াছে।




৪৪($a$) নং চিত্র




৪৪($b$) নং চিত্র

বল-ত্রিভুজ প্রতিজ্ঞার অনুসিদ্ধান্ত অনুসারে $ABC$ ত্রিভুজের $\overline{AB}$ ও $\overline{BC}$ বাহু দ্বারা সূচিত $P$ ও $Q$ বলের লব্ধি $\overline{AC}$ দ্বারা দিকে ও মানে সূচিত হইবে। আবার $ACD$ ত্রিভুজের $\overline{AC}$ দ্বারা সূচিত বল ও $\overline{CD}$ দ্বারা সূচিত $R$ বলের লব্ধি $\overline{AD}$ দ্বারা সূচিত হইবে ; অর্থাৎ $P$, $Q$ ও $R$ বলের লব্ধি $\overline{AD}$ দ্বারা সূচিত হইবে। তৃতীয়ত, $ADE$ ত্রিভুজের $\overline{AD}$ দ্বারা সূচিত বল ও $\overline{DE}$ দ্বারা সূচিত $S$ বলের লব্ধি $\overline{AE}$ দ্বারা সূচিত হইবে। অর্থাৎ $P$, $Q$ ও $R$ বলের লব্ধি ও $S$ বলের সমবেত ফল বা লব্ধি $\overline{AE}$ দ্বারা সূচিত হইবে। ইহা $\overline{EA}$ দ্বারা সূচিত $T$ বলের সমান ও বিপরীতমুখী। অতএব $P$, $Q$, $R$, $S$ ও $T$ বলের লব্ধি শূন্য। অর্থাৎ ইহারা সাম্যাবস্থাপন্ন।

**অনুসিদ্ধান্ত।** দুইয়ের অধিক সমবিন্দু কতকগুলি বলকে যদি একটি পূর্ণ বহু-ভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত বাহুগুলির সর্বশেষটি ভিন্ন অন্যগুলি দ্বারা যথাক্রমে দিকে ও মানে সূচিত করা যায়, তবে ঐ সর্বশেষ বাহুটি বিপরীতক্রমে দিকে ও মানে বলগুলির লব্ধি সূচিত করিবে।

উপরের বহুভুজ প্রতিজ্ঞার ক্ষেত্রে দেখা গেল, $P$, $Q$, $R$ ও $S$ বলের লব্ধি $\overline{AE}$ দ্বারা সূচিত বল হয়। $\overline{EA}$ দ্বারা সূচিত $T$ বল যদি না থাকিত, তবে বলগুলির লব্ধি স্পষ্টতই শূন্য হইত না, $T$ বলের সমান ও বিপরীতমুখী হইত এবং $\overline{EA}$ দ্বারাই সূচিত হইত। এইভাবে আমরা উল্লিখিত অনুসিদ্ধান্তে উপনীত হই।

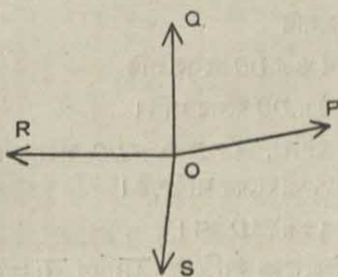
**13·5. বল-বহুভুজের বিপরীত প্রতিজ্ঞা (Converse of polygon of forces) ঃ দুইয়ের অধিক সমবিন্দু কতকগুলি বল যদি সাম্যাবস্থায় থাকে, তবে একটি পূর্ণ বহুভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত বাহুগুলি দ্বারা উহাদিগকে দিকে ও মানে সূচিত করা যাইবে।**

83 ($b$) চিত্রে প্রদর্শিত $P$, $Q$, $R$, $S$ ও $T$ বলগুলি যেন $O$ বিন্দুতে সক্রিয় ও সাম্যাবস্থাপন্ন।

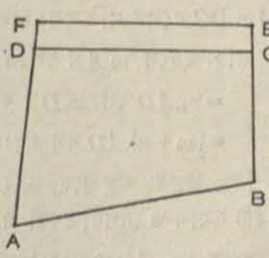
প্রমাণ করিতে হইবে যে, ঐ বলগুলিকে একটি পূর্ণ বহুভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত বাহুগুলি দ্বারা দিকে ও মানে সূচিত করা যাইবে।

83 ($a$) চিত্রে যথাক্রমে $P, Q, R$ ও $S$ বলের ক্রিয়ারেখার সমান্তরাল করিয়া পরপর $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ ও $\overline{DE}$ রেখাগুলি এমনভাবে অঙ্কিত যে, উহারা যথাক্রমে ঐ বলগুলির মান সূচিত করে। স্পষ্টত, যথাক্রমে $\overline{AB}$ ও $\overline{BC}$ রেখা দ্বারা সূচিত $P$ ও $Q$ বলের লব্ধি $\overline{AC}$ দ্বারা সূচিত হইবে, $\overline{AC}$ দ্বারা সূচিত বল ও $\overline{CD}$ দ্বারা সূচিত $R$ বলের লব্ধি হইবে $\overline{AD}$ ; সর্বশেষে $\overline{AD}$ দ্বারা সূচিত বল ও $\overline{DE}$ দ্বারা সূচিত $S$ বলের লব্ধি হইবে $\overline{AE}$. সুতরাং $P, Q, R$ ও $S$ বলের লব্ধিই $\overline{AE}$ দ্বারা সূচিত হইবে। যেহেতু বলগুলি সাম্যাবস্থায় রহিয়াছে, সেইহেতু $\overline{AE}$ দ্বারা সূচিত বল নিশ্চয় অবশিষ্ট $T$ বলের সমান ও বিপরীতমুখী। সুতরাং $\overline{EA}$ নিশ্চয় $T$ বলকে সূচিত করিবে। এইভাবে প্রমাণ হয় যে, সাম্যাবস্থাপন্ন ও সমবিন্দু $P, Q, R, S$ ও $T$ এই বল-কয়টিকে $ABCDE$ বহুভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত বাহুগুলি দ্বারা দিকে ও মানে সূচিত করা যায়।

**13·6. বল-বহুভুজ-এর ও বল-ত্রিভুজ-এর বিপরীত প্রতিজ্ঞা :** সাম্যাবস্থাপন্ন সমবিন্দু তিনটি বলকে উহাদের দিকের সহিত সমান্তরাল বাহুযুক্ত **যে-কোন ত্রিভুজের** ক্রমানুসারে গৃহীত বাহুগুলি দ্বারা দিকে ও মানে সূচিত করা যায়।




84($a$)নং চিত্র



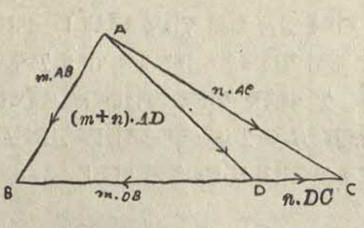

84($b$)নং চিত্র

বল-বহুভুজের বিপরীত প্রতিজ্ঞা কিন্তু এত ব্যাপক নয়, অর্থাৎ তিনের অধিক সমবিন্দু ও সাম্যাবস্থাপন্ন বলকে ঐ বলগুলির দিক্‌রেখার সমান্তরাল বাহুযুক্ত **যে-কোন বহুভুজের** ক্রমানুসারে গৃহীত বাহু সূচিত করিবে না। বিশেষ একটি বহুভুজেরই বাহুগুলি ক্রমানুসারে ঐরূপ বলগুলিকে সূচিত করিবে।

উদাহরণস্বরূপ, চিত্রে প্রদর্শিত $ABCD$ ও $ABEF$ দুইটি বহুভুজেরই ক্রমানুসারে গৃহীত বাহুগুলি যথাক্রমে ( সাম্যাবস্থাপন্ন ও $O$ বিন্দুতে সক্রিয় ) $P, Q, R$ ও $S$ বলের দিক্‌রেখার সহিত সমান্তরাল। $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ ও $\overline{DA}$ যদি $P, Q, R$ ও $S$ বলকে দিকে ও মানে সূচিত করে, তবে নিশ্চয় $\overline{AB}, \overline{BE}, \overline{EF}$ ও $\overline{FA}$ উহাদের সূচিত করিতে পারে না। কারণ যে-মাপকাঠিতে $\overline{BC}$, $Q$ বলকে সূচিত করে, ঠিক সেই মাপকাঠিতে $\overline{BE}$ কিছুতেই $Q$ বলকে সূচিত করিতে পারে না।

স্পষ্টতই, বল-ত্রিভুজের বিপরীত প্রতিজ্ঞার তুলনায় বল-বহুভুজের বিপরীত প্রতিজ্ঞা সংকীর্ণ।

**13·7. একটি প্রয়োজনীয় প্রতিজ্ঞা :** যথাক্রমে $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AC}$ বরাবর $m.AB$ একক এবং $n.AC$ একক—দুইটি বল যদি সক্রিয় হয়, তবে তাহাদের লব্ধি $\overrightarrow{AD}$ বরাবর $(m+n).AD$ দ্বারা সূচিত হইবে, যেখানে $\overline{BC}$-এর উপর $D$ এমন একটি বিন্দু যে $m.\overline{DB}=n.\overline{DC}$.




85নং চিত্র

বল-ত্রিভুজ প্রতিজ্ঞা অনুসারে $\overrightarrow{AB}$ বরাবর $m.AB$ বলকে, $\overrightarrow{AD}$ বরাবর $m.AD$ এবং $\overrightarrow{DB}$ বরাবর $m.DB$ বলের লব্ধি বলা যায়। অনুরূপভাবে, $\overrightarrow{AC}$ বরাবর $n.AC$ বলকে $\overrightarrow{AD}$ বরাবর $n.AD$ এবং $\overrightarrow{DC}$ বরাবর $n.DC$ বলের লব্ধি বলা চলে।

তাহা হইলে, $m.AB$ বল ও $n.AC$ বলের লব্ধি

$=m.AD$ বল, $m.DB$ বল, $n.AD$ বল ও $n.DC$ বলের লব্ধি

$=(m+n).AD$ বল এবং $m.DB$ বল ও $n.DC$ বলের লব্ধি।

কিন্তু কল্পনা অনুসারে, $m.DB=n.DC$ বলিয়া, $m.DB$ ও $n.DC$ দ্বারা সূচিত বল-দুইটি সমান ও বিপরীতমুখী এবং সেই কারণে তাহাদের লব্ধি শূন্য।

সুতরাং $m.AB$ ও $n.AC$ বলের লব্ধি $=(m+n).AD$ বল।

**13·8. ABC ত্রিভুজের A বিন্দুতে সক্রিয় $\overline{AB}$ ও $\overline{AC}$ বাহু দ্বারা দিকে ও মানে সূচিত দুইটি বলের লব্ধি ত্রিভুজটির তৃতীয় বাহু $\overline{BC}$-র সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমার দ্বিগুণ দ্বারা দিকে ও মানে সূচিত হয় (The resultant of two forces acting at A and represented in magnitude and direction by $\overline{AB}$ and $\overline{AC}$ of a triangle ABC is represented in magnitude and direction by twice the median that bisects the third side $\overline{BC}$ :**

উপরের (13·7) প্রতিজ্ঞায় $m=n=1$ বসাইলে, $m.AB=AB$ ; $n.AC=AC$ এবং $(m+n)AD=2AD$ হয়। দ্বিতীয়ত, $m.DB=n.DC$-র স্থলে $DB=DC$ হয়।

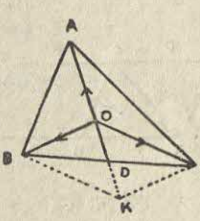
অর্থাৎ $\overline{AD}$ রেখা $\overline{BC}$ বাহুর মধ্যমা হয়।

অতএব $\overline{AB}$ ও $\overline{AC}$ দ্বারা দিকে ও মানে সূচিত বলদ্বয়ের লব্ধি $\overline{BC}$-র সমদ্বিখণ্ডক $\overline{AD}$ মধ্যমার দ্বিগুণ বা $2\overline{AD}$ দ্বারা দিকে ও মানে সূচিত হইবে।

**বি. দ্র.।** বল-সামান্তরিক প্রতিজ্ঞার প্রয়োগেও উপপাদ্যটি অতি সহজেই প্রমাণ করা যায়।

## উদাহরণমালা

**উদাহরণ 1.** $O$, $ABC$ ত্রিভুজের অন্তঃস্থ একটি বিন্দু। $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ ও $\overline{OC}$ সরল রেখা-তিনটি দ্বারা দিকে ও মানে সূচিত বল-তিনটি সাম্যাবস্থায় থাকিলে, দেখাও যে, $O$ বিন্দু অবশ্যই মধ্যমা-ত্রয়ের ছেদবিন্দু হইবে।



86(a)নং চিত্র

$ABC$ ত্রিভুজে $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ ও $\overline{OC}$ যেন দিকে ও মানে তিনটি বলকে সূচিত করে। $OBKC$ সামান্তরিক পূর্ণ করা হইলে, স্পষ্টতই $\overline{OK}$ কর্ণ দিকে ও মানে $\overline{OB}$ ও $\overline{OC}$ বলের লব্ধি সূচিত করিবে। $\overline{OK}$ ও $\overline{BC}$ কর্ণ $D$ বিন্দুতে পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

$\overline{OK}$ দ্বারা সূচিত বল $=2\overline{OD}$ দ্বারা সূচিত বল।

যেহেতু বল-তিনটি সাম্যাবস্থায় রহিয়াছে,

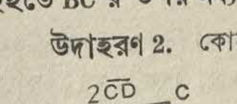
সেইহেতু, $2\overline{OD}$ নিশ্চয় $\overline{OA}$ বলের সমান, বিপরীত ও সমরেখ।

$$\therefore \ \overline{OA}=2\overline{OD} \ ; \ \therefore \ \overline{OA}+\overline{OD}=3\overline{OD} \ ; \ \therefore \ \overline{AD}=3\overline{OD}.$$

$\therefore$ $O$ বিন্দু $\overline{AD}$ মধ্যমার ত্রিখণ্ড-বিন্দু বা মধ্যমাত্রয়ের ছেদবিন্দু।

**বি. দ্র.। OBC ত্রিভুজের $\overline{OB}$ ও $\overline{OC}$ দ্বারা সূচিত বলদ্বয়ের লব্ধি O হইতে $\overline{BC}$-র উপর মধ্যমার দ্বিগুণ দ্বারা দিকে ও মানে সূচিত হয়।**

**উদাহরণ 2.** কোন বিন্দুতে সক্রিয় বলসমূহ দিকে ও মানে যথাক্রমে $2\overline{AB}$, $3\overline{BC}$, $2\overline{CD}$, $\overline{DA}$, $\overline{CA}$ এবং $\overline{DB}$ সূচিত হয়, যেখানে $ABCD$ একটি চতুর্ভুজ। প্রমাণ কর যে, বলসমূহ সাম্যাবস্থায় থাকিবে।



86(b)নং চিত্র

$ABCD$ একটি চতুর্ভুজ। উহার $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ ও $\overline{DA}$ বাহু এবং $\overline{CA}$ ও $\overline{DB}$ কর্ণ বরাবর যথাক্রমে $2\overline{AB}$, $3\overline{BC}$, $2\overline{CD}$, $\overline{DA}$, $\overline{CA}$ ও $\overline{DB}$ বল সক্রিয়।

ভেক্টর সূত্র অনুসারে উহাদের লব্ধি

$= 2\overline{AB} + 3\overline{BC} + 2\overline{CD} + \overline{DA} + \overline{CA} + \overline{DB}$

$= (\overline{DA} + \overline{AB}) + (\overline{CA} + \overline{AB}) + (2\overline{BC} + 2\overline{CD}) + \overline{BC} + \overline{DB}$

$= \overline{DB} + \overline{CB} + 2\overline{BD} + \overline{BC} + \overline{DB}$

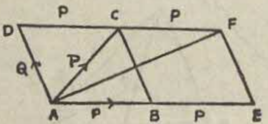
$= (2\overline{DB} + 2\overline{BD}) + (\overline{CB} + \overline{BC})$

$= 0 + 0$, [ $\therefore$ $\overline{DB}$ ও $\overline{BD}$ এবং $\overline{CB}$ ও $\overline{BC}$ পরস্পরের বিপরীত ও সমান ]

$= 0.$

$\therefore$ প্রদত্ত বলগুলি সাম্যাবস্থায় রহিয়াছে।

**উদাহরণ 3.** $P$ ও $Q$ বল-দুইটি এরূপ একটি কোণে সক্রিয় যে, উহাদের লব্ধির মানও $P$ ; দেখাও যে, $P$-র মান দ্বিগুণ করিলে নূতন লব্ধি-বলটি $Q$-র সহিত সমকোণে নত হইবে।




86(c)নং চিত্র

$ABCD$ সামান্তরিকের $\overline{AB}$ ও $\overline{AD}$ বাহু এবং $\overline{AC}$ কর্ণ যথাক্রমে যেন $P$ ও $Q$ বল এবং তাহাদের লব্ধি $P$ বলকে সূচিত করে। $\overline{AB}$-কে $E$ পর্যন্ত $\overline{AB} = \overline{BE}$ করিয়া বাড়াইয়া $AEFD$ সামান্তরিক পূর্ণ করা হইলে, $\overline{AF}$ কর্ণ সম্পূর্ণরূপে $2P$ ও $Q$ বলের লব্ধি সূচিত করিবে। স্পষ্টতই, $\overline{AC}$, $\overline{CD}$ ও $\overline{CF}$ প্রত্যেকের দৈর্ঘ্য $P$ একক।

$\therefore$ $\overline{AC} = \overline{CD} = \overline{CF}$ ;

$\therefore$ $\angle CDA = \angle DAC$ ... (i)

এবং $\angle CFA = \angle CAF$ ... (ii)

(i) ও (ii) যোগ করিয়া, $\angle CDA + \angle CFA = \angle DAF$ ;

$\therefore$ $\angle DAF =$ এক সমকোণ। অতএব $2P$ ও $Q$-এর লব্ধি $\overline{AF}$ বল $Q$ বলের সহিত সমকোণে রহিয়াছে।

## প্রশ্নমালা 15

1. $ABC$ ত্রিভুজের $\overline{AB}$ ও $\overline{AC}$ বাহু যথাক্রমে $D$ ও $E$ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত। প্রমাণ কর যে, $\overline{BE}$ ও $\overline{DC}$-দ্বারা সূচিত বলদ্বয়ের লব্ধি $\frac{3}{2}\overline{BC}$ দ্বারা দিকে ও মানে সূচিত হইবে।

2. একটি বস্তুকণার উপর সক্রিয় দুইটি বল যদি একটি সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় দ্বারা সূচিত হয়, তবে প্রমাণ কর যে, ঐ বল-দুইটির লব্ধি ঐ সামান্তরিকের একটি বাহুর দ্বিগুণ মান দ্বারা সূচিত হইবে।

3. $A$, $B$, ও $C$ তিনটি স্থির বিন্দু এবং $P$ এমন একটি বিন্দু যে $\overline{PA}$ ও $\overline{PB}$

বলের লব্ধি সর্বদা $C$ বিন্দুগামী হয়। প্রমাণ কর যে, $P$ বিন্দুর সঞ্চারপথ একটি সরল রেখা।

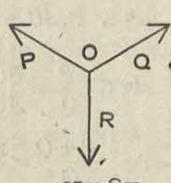
4. $ABCD$ সামান্তরিকের $\overline{CD}$ বাহু $E$ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত। $A$ বিন্দুতে সক্রিয় $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ ও $2\overline{AE}$ বলের লব্ধি নির্ণয় কর।

5. $ABC$ ত্রিভুজের $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ ও $\overline{AB}$ বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে $D$, $E$ ও $F$ হইলে, প্রমাণ কর যে, একই বিন্দুতে সক্রিয় $\overline{AB}$, $\overline{BE}$ ও $\overline{CF}$ দ্বারা সূচিত বল-তিনটি সাম্যাবস্থায় থাকিবে।

[ সংকেত : মধ্যমাত্রয়ের ছেদবিন্দু $O$ হইলে, $OBPC$ একটি সামান্তরিক হইবে। $BOP$ ত্রিভুজের $\overline{BO}$, $\overline{OP}$ ও $\overline{PB}$ বরাবর সক্রিয় যথাক্রমে $\frac{2}{3}\overline{BE}$, $\frac{2}{3}\overline{AD}$ ও $\frac{2}{3}\overline{CF}$-এর লব্ধি শূন্য, ইত্যাদি। ]

6. প্রমাণ কর যে, $ABCD$ সামান্তরিকের $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{AC}$ ও $\overline{BD}$-এর দ্বারা সর্বতোভাবে সূচিত বলগুলির লব্ধি $2\overline{AD}$ দ্বারা দিকে ও মানে সূচিত হইবে।

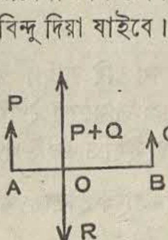
**13·9. একই সমতলস্থ তিনটি সমান্তরাল বা অসমান্তরাল বলের সাম্যাবস্থার শর্ত (Conditions of equilibrium of three coplanar forces, intersecting or parallel) : একই সমতলে একটি কঠোর বস্তুর উপর সক্রিয় তিনটি বল যদি সাম্যাবস্থায় থাকে, তবে তাহারা হয় (i) সমবিন্দু, নয় (ii) সমান্তরাল** [ *If three coplanar forces acting on a rigid body be in equilibrium, then they are either (i) concurrent or (ii) parallel.* ]



87নং চিত্র

একটি কঠোর বস্তুর উপর একই সমতলে সক্রিয় $P$, $Q$ ও $R$ এই তিনটি বল যেন সাম্যাবস্থায় রহিয়াছে।

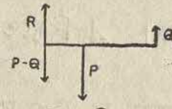
(i) এই বল-তিনটি যদি সমান্তরাল না হয়, তবে উহাদের যে-কোন দুইটি $P$ ও $Q$-র ক্রিয়ারেখা যেন $O$ বিন্দুতে ছেদ করে। $P$ ও $Q$ বলের লব্ধি, তাহা হইলে, নিশ্চয়ই $O$ বিন্দু দিয়া যাইবে। বল-তিনটি যেহেতু সাম্যাবস্থাপন্ন, সুতরাং এই লব্ধি ও তৃতীয় বল $R$ নিশ্চয়ই সমান ও বিপরীতমুখী, অর্থাৎ তাহাদের লব্ধি শূন্য। কিন্তু সমান দুইটি বল একই রেখায় বিপরীতমুখী হইলেই মাত্র পরস্পরকে রুদ্ধ করিতে পারে এবং ফলে তাহাদের লব্ধি শূন্য হয়। কাজেই $P$ ও $Q$ বলের লব্ধি যদি $O$ বিন্দুগামী হয়, $R$ বলের ক্রিয়ারেখাও $O$ বিন্দুগামী। অতএব, $P$, $Q$ ও $R$ এই তিনটি সাম্যাবস্থাপন্ন বল সমবিন্দু।



88নং চিত্র

(ii) দ্বিতীয়ত, $P$, $Q$ ও $R$ বল যদি সমবিন্দু না হয়, তবে উহাদের অন্তত দুইটি সমান্তরাল। ধর, $P$ ও $Q$ সমান্তরাল। উহারা সদৃশ বা

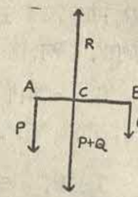
অসদৃশই হউক, উহাদের লব্ধি যেন $O$ বিন্দুগামী। এখন, যেহেতু $P$, $Q$ ও $R$ সাম্যাবস্থাপন্ন, সেইহেতু $P$ ও $Q$-র লব্ধি নিশ্চয়ই তৃতীয় বল $R$-এর সমান, বিপরীতমুখী ও সমরেখ। কিন্তু $P$ ও $Q$-র লব্ধি তাহাদের সমান্তরাল। কাজেই $R$ বলও $P$ ও $Q$-র সমান্তরাল। অতএব, সমবিন্দু না হইলে, সাম্যাবস্থায় $P$, $Q$ ও $R$ বল-তিনটি সমান্তরাল।



89নং চিত্র

## 13·10. তিনটি সমান্তরাল বলের সাম্যাবস্থার শর্ত (Condition of equilibrium of three parallel forces) :

(i) একটি কঠোর বস্তুর উপর একই সমতলে $P$, $Q$ ও $R$ এই তিনটি সমান্তরাল বল যেন যথাক্রমে $A$, $B$ ও $C$ বিন্দুতে সক্রিয়। ইহাদের যে-কোন দুইটি, ধর $P$ ও $Q$ বলের লব্ধি $(P+Q)$, তৃতীয় বল $R$-এর সমান, বিপরীতমুখী ও সমরেখ হইলেই সাম্যাবস্থার সৃষ্টি হইবে। তাহা হইলে, $P$ ও $Q$-এর লব্ধি নিশ্চয়ই $C$ বিন্দুতে $R$ বলের ক্রিয়ারেখায় উহার বিপরীতমুখী ও সমান ; অর্থাৎ $P+Q=R$.



90নং চিত্র

এখন, $P.AC=Q.BC$ বা $\dfrac{P}{BC}=\dfrac{Q}{AC}$ ... (i)

অথবা $\dfrac{P}{Q}=\dfrac{BC}{AC}$;

$\therefore\ \dfrac{P+Q}{Q}=\dfrac{AC+BC}{AC}$, ( যোগ প্রক্রিয়া )

অর্থাৎ $\dfrac{P+Q}{Q}=\dfrac{AB}{AC}$, অথবা, $\dfrac{P+Q}{AB}=\dfrac{Q}{AC}=\dfrac{P}{BC}$, [(i) হইতে ]

$\therefore\ \dfrac{P}{BC}=\dfrac{Q}{AC}=\dfrac{R}{AB}$, [ $\because\ P+Q=R$ ]

ইহাই তিনটি সমান্তরাল বলের সাম্যাবস্থার শর্ত।

(ii) দ্বিতীয়ত, পূর্বেই আলোচিত হইয়াছে যে, কয়েকটি বল যদি সাম্যাবস্থায় থাকে, তবে তাহাদের সমতলে যে-কোন বিন্দুর চারিদিকে তাহাদের ভ্রামকের বৈজিক সমষ্টি শূন্য হইবে। সুতরাং তিনটি সমান্তরাল বলের সাম্যাবস্থার জন্য ইহাও একটি শর্ত।

## 13·11. তিনটি অসমান্তরাল বলের সাম্যাবস্থার শর্ত (Conditions of equilibrium of three non-parallel forces) :

তিনটি বল যদি সমান্তরাল না হয়, অথচ সাম্যাবস্থায় থাকে, তবে—

(i) **তাহারা এক বিন্দুতে মিলিত হইবে এবং বল-ত্রিভুজের বিপরীত**

**প্রতিজ্ঞা অনুসারে ঐ বল-তিনটিকে একটি ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত বাহু-তিনটি দ্বারা দিকে ও মানে সূচিত করা যাইবে।**

ইহা অসমান্তরাল তিনটি বলের সাম্যাবস্থার জন্য প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত।

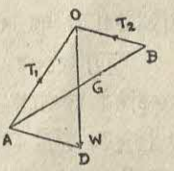
(ii) দ্বিতীয়ত, **সাম্যাবস্থাপন্ন অসমান্তরাল বল সমবিন্দু বলিয়া লম্বচ্ছেদী যে-কোন দুইটি রেখা বরাবর তাহাদের বিশ্লেষিতাংশের সমষ্টি স্বতন্ত্রভাবে শূন্য হইবে।** অর্থাৎ উক্ত রেখা-দুইটির একটি বরাবর বিশ্লেষিতাংশের সমষ্টি যদি $X$ এবং অপরটি বরাবর বিশ্লেষিতাংশের সমষ্টি যদি $Y$ হয়, তবে $X=0$ এবং $Y=0$ হইবে। পূর্বেই বলা হইয়াছে, ইহাও তিনটি সমবিন্দু বলের সাম্যাবস্থার জন্য প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত।

(iii) তৃতীয়ত, **সাম্যাবস্থাপন্ন যে-কোন তিনটি বলের সমতলে যে-কোন বিন্দুর চারিদিকে ঐ বল-তিনটির ভ্রামকের সমষ্টি শূন্য।** এ-বিষয়ে পূর্বেই আলোচনা করা হইয়াছে।

সমবিন্দু তিনটি বলের ক্ষেত্রে উল্লিখিত তিনটি ছাড়া আর একটি শর্তও আছে। উহা 'লামি'র সূত্র (Lami's theorem) নামে পরিচিত। আপাতত উপরি-উক্ত তিনটির যে-কোন একটি শর্তকে ভিত্তি করিয়া তিনটি সমবিন্দু বলের সাম্যাবস্থা-সংক্রান্ত প্রশ্নের সমাধান করা যায়।

তিনটির মধ্যে যে-কোন একটি বল যদি নির্ণেয় হয়, তবে (iii)-শর্তের প্রয়োগই সুবিধাজনক। নিচের উদাহরণগুলি দেখ :—

**উদাহরণ 1.** একটি সমদণ্ডের দুই মাথায় ও একটি পেরেকের সহিত দুইগাছি দড়ি বাঁধিয়া দণ্ডটিকে ঝুলাইয়া রাখা হইয়াছে। প্রমাণ কর যে, দড়ির টান উহাদের দৈর্ঘ্যের আনুপাতিক। [ W. B. H. S. 1970 ]



91নং চিত্র

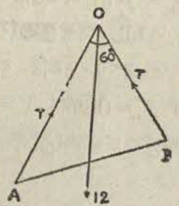
$AB$ দণ্ডটিকে $O$ বিন্দুস্থিত একটি পেরেকের সহিত $AO$ ও $BO$ দড়ির সাহায্যে যেন ঝুলানো হইয়াছে। দণ্ডটির মধ্যবিন্দু $G$ দিয়া উহার $W$-ভার নিম্নগামী। $\overline{OG}=\overline{GD}$ করিয়া, $\overline{OG}$ রেখাকে $D$ বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করা হইল। $\overline{AD}$ যুক্ত করিলে, স্পষ্টত $\triangle AGD$ ও $\triangle OGB$ সমান হয় এবং সেই কারণে $\overline{DA}=\overline{BO}$ এবং তাহারা সমান্তরাল। এখন, $\overline{AO}$ ও $\overline{BO}$ বরাবর দুইটি টান $T_1$ ও $T_2$ এবং দণ্ডের $W$-ভার এই তিনটি বলের ক্রিয়ায় দণ্ডটি সাম্যাবস্থায় রহিয়াছে। তাহা হইলে $OAD$ ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত $\overline{DA}$, $\overline{AO}$ এবং $\overline{OD}$ বাহু-তিনটি ঐ বল-তিনটিকে সূচিত করিবে।

$$\therefore \quad \frac{T_2}{AD}=\frac{T_1}{AO}=\frac{W}{OD}.$$

$\therefore$ দড়ির টান তাহাদের দৈর্ঘ্যের আনুপাতিক।

**দ্রষ্টব্য ঃ দড়ির দুইটি খণ্ড না লইয়া, একটি দড়ি লইলে, দড়ির টান দুই অংশেই সমান হইবে।**

**উদাহরণ 2.** 12 পাউণ্ড ভারী একটি সমদণ্ড একটি মসৃণ পেরেকের উপর দিয়া গলানো ও দণ্ডটির দুই মাথায় বাঁধা একখণ্ড দড়ির সাহায্যে ঝুলানো রহিয়াছে। যদি দুই অংশের অন্তর্বর্তী কোণটি 60° হয়, তবে দড়ির উপর টান নির্ণয় কর।




92নং চিত্র

$O$ বিন্দু পেরেকের এবং $AB$ দণ্ডটির অবস্থান সূচিত করে। $\overline{AO}$ এবং $\overline{BO}$ যেন একই দড়ির দুই অংশ। সুতরাং $\overline{AO}$ ও $\overline{BO}$ বরাবর টান সমান। এই টান $T$ এবং $\angle AOB = 60°$.

$\therefore$ $O$ বিন্দুতে এই দুইটি টানের লব্ধি

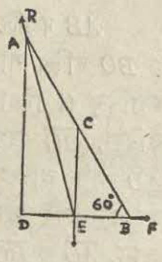
$$= \sqrt{T^2+T^2+2T.T.\cos 60°}$$
$$= \sqrt{2T^2+2.T^2.\tfrac{1}{2}}$$
$$= \sqrt{3T^2} = T\sqrt{3}.$$

দণ্ডটি যেহেতু সাম্যাবস্থায় রহিয়াছে, সেইহেতু এই লব্ধি দণ্ডটির ভারের সমান।

$\therefore \quad T\sqrt{3}=12; \qquad \therefore \quad T=\frac{12}{\sqrt{3}}=\frac{12\sqrt{3}}{3}=4\sqrt{3}$ পাউণ্ড।

এইভাবে দড়ির উপর টান $4\sqrt{3}$ পাউণ্ড।

**উদাহরণ 3.** 4 ফুট লম্বা ও 8 পাউণ্ড ভারী $AB$ সমদণ্ডটি $A$ প্রান্তে কব্জা দিয়া আটকানো। উহার $B$ প্রান্তে প্রযুক্ত $F$ পাউণ্ড অনুভূমিক বল দণ্ডটিকে অনুভূমিক রেখার সহিত 60° হেলাইয়া স্থির রাখিয়াছে। $A$ প্রান্তের প্রতিক্রিয়া $R$-এর দিক্ ও মান এবং $F$ বলের মান নির্ণয় কর।




93নং চিত্র

$\overline{AB}$ দণ্ডের মধ্যবিন্দু $C$ হইতে $\overline{CE}$ উল্লম্ব রেখা, $\overline{DB}$ অনুভূমিক রেখাকে $E$ বিন্দুতে এবং $A$ হইতে $\overline{AD}$ উল্লম্ব রেখা $D$ বিন্দুতে $\overline{BE}$ রেখাকে ছেদ করিয়াছে। $\overline{CE}$ বরাবর দণ্ডটির ভার 8 পাউণ্ড এবং $\overline{DB}$ বরাবর অনুভূমিক বল $F$ সক্রিয় এবং $\angle ABD = 60°$.

$\therefore$ সাম্যাবস্থার শর্তানুসারে দণ্ডটির ভার, অনুভূমিক বল $F$ এবং প্রতিক্রিয়া $R$ সমবিন্দু হইবে। যেহেতু ভার ও অনুভূমিক বল $F$-এর ক্রিয়ারেখা $E$ বিন্দুতে মিলিত, সেইহেতু $\overline{EA}$ বরাবর $A$ প্রান্তের প্রতিক্রিয়া $R$ সক্রিয়।

স্পষ্টতই, দণ্ডটির ভার 8 পা. বল, অনুভূমিক $F$ বল ও $R$ প্রতিক্রিয়া—এই তিনটি

$ADE$ ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত $\overline{AD}$, $\overline{DE}$ ও $\overline{EA}$ বাহু-তিনটির সমান্তরাল। সুতরাং বল-তিনটি সাম্যাবস্থাপন্ন বলিয়া, $\frac{8}{\overline{AD}}=\frac{F}{\overline{DE}}=\frac{R}{\overline{EA}}$.

$$\overline{AD}=\overline{AB}\sin 60^\circ=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3},\quad [\because\ \overline{AB}=4 \text{ ফুট}]$$

$$\overline{DE}=\tfrac{1}{2}\overline{BD}=\tfrac{1}{2}\overline{AB}\cos 60^\circ=\tfrac{1}{2}\times 4\times\tfrac{1}{2}=1\,;$$

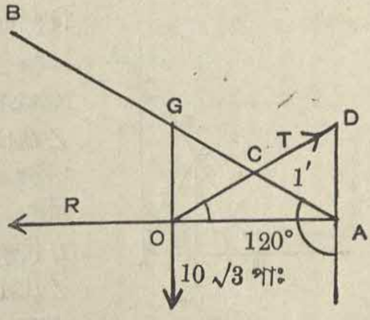
এবং $$\overline{EA}=\sqrt{\overline{AD}^2+\overline{DE}^2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{13}=3{\cdot}6.$$

$$\therefore\ F=\frac{8}{\overline{AD}}\times\overline{DE}=\frac{8}{2\sqrt{3}}\times 1=\frac{4\sqrt{3}}{3}\times 1=\frac{4\times 1{\cdot}73}{3}=2{\cdot}3 \text{ পাউণ্ড।}$$

$$R=\frac{8}{2\sqrt{3}}\times\overline{EA}=\frac{4}{1{\cdot}73}\times 3{\cdot}6=8{\cdot}3 \text{ পাউণ্ড।}$$

$R$ প্রতিক্রিয়া অনুভূমিক রেখার সহিত $\angle DEA$ কোণ উৎপন্ন করে, যেখানে $\tan DEA=\frac{\overline{AD}}{\overline{DE}}=\frac{2\sqrt{3}}{1}=2\sqrt{3}.$

**উদাহরণ 4.** 4 ফুট লম্বা ও $10\sqrt{3}$ পাউণ্ড ভারী $AB$ সমদণ্ডটির $A$ প্রান্ত একটি মসৃণ দেওয়ালে ঠেস দিয়া এবং $A$ হইতে 1 ফুট দূরে $C$ বিন্দু হইতে দেওয়ালের $D$ বিন্দুর সহিত বাঁধা হালকা একগাছি দড়িতে ঝুলানো আছে। দণ্ডটি যদি উল্লম্ব রেখার সহিত 120° কোণ উৎপন্ন করিয়া থাকে, তবে $D$ বিন্দুর অবস্থান, দড়ির টান ও $A$ বিন্দুতে দেওয়ালের প্রতিক্রিয়া নির্ণয় কর।




94নং চিত্র

দেওয়ালটি মসৃণ বলিয়া উহার প্রতিক্রিয়া $R$ দেওয়ালের উপর লম্ব। এই প্রতিক্রিয়া $R$ ও দড়ির টান $T$-র ক্রিয়া-রেখা যেন $O$ বিন্দুতে মিলিত হয়। সাম্যাবস্থার শর্তানুসারে দণ্ডটির ভার $10\sqrt{3}$ পাউণ্ড ও $O$ বিন্দুগামী হইবে। কাজেই দণ্ডটির মধ্যবিন্দু $G$ হইতে $\overline{GO}$ উল্লম্ব রেখা।

স্পষ্টতই, $\angle OAG=120^\circ-90^\circ=30^\circ$ এবং $\angle AOG=90^\circ$ বলিয়া, $\angle AGO=60^\circ$.

আবার $\overline{CG}=(2-1)=1$ ফুট। অর্থাৎ $C$ বিন্দু $\overline{AG}$ অতিভুজের মধ্যবিন্দু, কাজেই $\overline{OC}=\overline{CG}=1$ ফুট এবং $\triangle OCG$ সমবাহু। $\therefore\ \angle OCG=\angle ACD=60^\circ$ এবং $\angle AOD=30^\circ$.

$\therefore \quad \angle ADC = 90° - \angle AOD = 90° - 30° = 60°.$

$\therefore \quad ACD$ ত্রিভুজ সমবাহু এবং সেই কারণে $\overline{AC} = \overline{CD} = \overline{AD} = 1$ ফুট। অর্থাৎ $D$ বিন্দু $A$ বিন্দুর 1 ফুট উপরে অবস্থিত।

দ্বিতীয়ত, $AOD$ ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত $\overline{AO}$, $\overline{OD}$ ও $\overline{DA}$ যথাক্রমে $R$, $T$ ও $10\sqrt{3}$ পাউণ্ড বলের দিক্ সূচিত করে। বল-তিনটি সাম্যাবস্থাপন্ন বলিয়া,

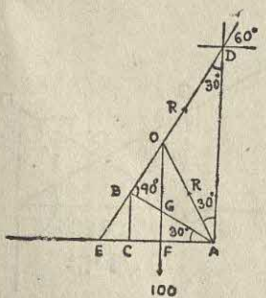
$$\frac{R}{\overline{OA}} = \frac{T}{\overline{OD}} = \frac{10\sqrt{3}}{\overline{DA}};$$

$$\therefore \quad R = 10\sqrt{3} \times \frac{\overline{OA}}{\overline{DA}} = 10\sqrt{3} \tan 60° = 10\sqrt{3}.\sqrt{3} = 30 \text{ পাউণ্ড।}$$

$$\therefore \quad T = 10\sqrt{3} \times \frac{\overline{OD}}{\overline{DA}} = 10\sqrt{3} \operatorname{cosec} 30° = \frac{10\sqrt{3}}{\sin 30°}$$

$$= \frac{10\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = 20\sqrt{3} \text{ পাউণ্ড।}$$

**উদাহরণ 5.** 100 পাউণ্ড ভারী একটি মই 6 ফুট উঁচু একটি দেওয়ালের উপর এক মাথা এবং ভূমিতলে অপর মাথা অনুভূমিক রেখার সহিত 30° কোণে রাখিয়া স্থির আছে। দেওয়ালের প্রতিক্রিয়া মই-এর লম্বদিকে ও ভূমির প্রতিক্রিয়ার সমান। মইটির নিম্নপ্রান্ত হইতে ভারকেন্দ্র কতদূর? ভূমির প্রতিক্রিয়া এবং ঐ প্রতিক্রিয়ার দিক্ নির্ণয় কর।




95নং চিত্র

$AB$ মইটি 6 ফুট উঁচু $\overline{CB}$ দেওয়ালের মাথায় এমনভাবে রহিয়াছে যে, অনুভূমিক রেখা $\overline{EA}$-র সহিত $\angle EAB = 30°$. $\overline{AB}$ মইয়ের $B$ বিন্দুতে লম্বভাবে সক্রিয় প্রতিক্রিয়ার $\overline{BD}$ ক্রিয়ারেখা $AD$ উল্লম্ব রেখার সহিত $D$ বিন্দুতে এবং $\overline{EA}$ অনুভূমিক রেখার সহিত $E$ বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। স্পষ্টতই, $\angle ABD = 90°$, $\angle BAD = 90° - 30° = 60°$. $\quad \therefore \quad \angle BDA = 30°$. যেহেতু $\overline{BD}$ বরাবর দেওয়ালের প্রতিক্রিয়া ও $A$ বিন্দুতে ভূমির প্রতিক্রিয়া সমান, সেইহেতু $\overline{AD}$ উল্লম্ব রেখার সহিত 30° কোণে ভূমির প্রতিক্রিয়া $\overline{AO}$ রেখায় সক্রিয় হইবে। দুইটি প্রতিক্রিয়ার ক্রিয়ারেখা $O$ বিন্দুতে ছেদ করায়, মইয়ের ভারও $\overline{OG}$ রেখায় সক্রিয় হইবে। $\therefore \quad \overline{OG}$ = উল্লম্ব রেখা।

দেওয়ালের প্রতিক্রিয়া $R$-এর ক্রিয়ারেখা অনুভূমিক রেখার সহিত 60° কোণ উৎপন্ন করিয়াছে। সেইরূপ ভূমির প্রতিক্রিয়াও অনুভূমিক রেখার সহিত $\angle OAE = 90° - 30° = 60°$ কোণ উৎপন্ন করিয়াছে।

এখন দেওয়ালের প্রতিক্রিয়া $R$ এবং ভূমির প্রতিক্রিয়া $R$ বলের $\overline{AD}$ বরাবর

বিশ্লেষিতাংশের সমষ্টি $= R \sin 60° + R \sin 60° = 2R \frac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$. উহা মইয়ের ভারের সমান।

$\therefore \quad R\sqrt{3} = 100$ অথবা $R = \frac{100}{\sqrt{3}} = \frac{100\sqrt{3}}{3}$ পা.।

$\therefore$ উভয় প্রতিক্রিয়ার মান $= \frac{100\sqrt{3}}{3}$ পা.।

আবার $A$ বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইয়া, $R.AB = 100.AF$ ... (i)

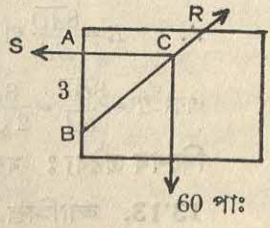
$ABC$ সমকোণী ত্রিভুজের 30° কোণের বিপরীত $\overline{BC}$ বাহু 6 ফুট বলিয়া, অতিভুজ $AB = 12$ ফুট এবং $AF = AG \cos 30° = \frac{AG.\sqrt{3}}{2}$.

$\therefore$ (i) হইতে, $\frac{100}{\sqrt{3}} \times 12 = 100.AG\frac{\sqrt{3}}{2}$;

অথবা $\quad AG = \frac{\overset{4}{\cancel{12}} \times 2}{\cancel{3}} = 8$ ফুট।

অর্থাৎ মইয়ের নিচ হইতে 8 ফুট উপরে উহার ভারকেন্দ্র অবস্থিত এবং উল্লম্ব রেখার সহিত 30° কোণে ভূমির প্রতিক্রিয়া $\frac{100\sqrt{3}}{3}$ পাউণ্ড।

**উদাহরণ 6.** দুইটি কব্‌জার সাহায্যে একটি দরজা এমনভাবে ধৃত যে, উপরের কব্‌জাটির প্রতিক্রিয়া সম্পূর্ণভাবে অনুভূমিক। কব্‌জা-দুইটির দূরত্ব 3 ফুট এবং দরজার ভার 60 পাউণ্ড, কব্‌জাদ্বয়ের যোজকরেখা হইতে $3\frac{1}{2}$ ফুট দূরে উল্লম্ব রেখায় সক্রিয়। প্রত্যেক কব্‌জার প্রতিক্রিয়া নির্ণয় কর। (C. U. I.Sc. 1944)



96নং চিত্র

$A$ ও $B$ কব্‌জা-দুইটির মধ্যে উপরিস্থ $A$ কব্‌জার প্রতিক্রিয়া $S$ অনুভূমিক বল এবং দরজার ভার 60 পাউণ্ডের ক্রিয়ারেখা যেন $C$ বিন্দুতে ছেদ করে। তাহা হইলে সাম্যাবস্থার শর্তানুসারে তৃতীয় বল $B$ বিন্দুর প্রতিক্রিয়াও $C$ বিন্দুগামী হইবে। এখন $B$ বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইলে,

$$S.AB = 60 \times 3\tfrac{1}{2} \text{ বা } S.3 = \frac{60 \times 7}{2}; \quad \therefore \quad S = \frac{60 \times 7}{2 \times 3} = 70 \text{ পাউণ্ড।}$$

আবার, $ABC$ ত্রিভুজের $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ ও $\overline{CA}$ বাহু যথাক্রমে দরজার ভার 60 পাউণ্ড, $B$ কব্‌জার প্রতিক্রিয়া $R$ এবং $A$ কব্‌জার প্রতিক্রিয়া $S$ বলের দিক্ সূচিত করে বলিয়া,

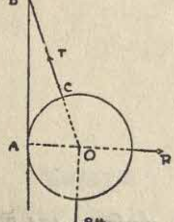
$$\frac{60}{AB} = \frac{R}{BC} \text{ অথবা } \frac{60}{3} = \frac{R}{\sqrt{3^2 + (\frac{7}{2})^2}} = \frac{R}{\frac{1}{2}\sqrt{85}};$$

$\therefore \quad R = 20 \times \frac{1}{2}\sqrt{85} = 10\sqrt{85}$ পাউণ্ড $= 92{\cdot}2$ পাউণ্ড।

**উদাহরণ 7.** একটি ধাতু-গোলকের ব্যাসার্ধের দ্বিগুণ লম্বা একগাছি দড়ির এক প্রান্ত একটি উলম্ব দেওয়ালে একটি বিন্দুর সহিত এবং অপর প্রান্ত গোলকটির উপরিস্থ একটি বিন্দুর সহিত যুক্ত আছে। গোলকটি সেই অবস্থায় দেওয়ালে ঠেস দিয়া স্থির রহিয়াছে। গোলকের ওজন 8 পাউণ্ড ও দেওয়ালটি মসৃণ হইলে, দড়ির টান ও দেওয়ালের উপর গোলকটির ক্রিয়ার পরিমাণ নির্ণয় কর।

[ Oxford and Cambridge Jt. Board ]

গোলকটির কেন্দ্র যেন $O$ বিন্দু। উহার উপরিস্থ $C$ বিন্দুর সহিত যুক্ত দড়িগাছি দেওয়ালের $B$ বিন্দুতে যুক্ত রহিয়াছে। গোলকটি এইভাবে ঝুলন্ত অবস্থায় দেওয়ালের উপর $A$ বিন্দুতে স্পর্শ করিয়া আছে। $A$ বিন্দুতে প্রতিক্রিয়া $R$, দড়ির টান $T$ এবং গোলকের ভার 8 পাউণ্ড—এই তিনটি বলের ক্রিয়ায় গোলকটি স্থির আছে। অতএব উহারা একই বিন্দু $O$-তে মিলিত হইবেই।




97নং চিত্র

স্পষ্টতই, উল্লিখিত বল-তিনটি $AOB$ ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত $\overline{AO}$, $\overline{OB}$ ও $\overline{BA}$ বাহু দ্বারা সূচিত হয়।

$\therefore \quad \dfrac{R}{AO} = \dfrac{T}{OB} = \dfrac{8}{BA}$ ; কিন্তু $\overline{BC} = 2\overline{OC} = 2\overline{AO}$ ;

$\therefore \quad 3\overline{AO} = \overline{OB}$ এবং $\overline{BA} = \sqrt{\overline{OB}^2 - \overline{AO}^2}$

$= \sqrt{9\overline{AO}^2 - \overline{AO}^2} = 2\sqrt{2}.\overline{AO}$

$\therefore \quad R = \dfrac{8\overline{AO}}{\overline{BA}}$ বা $\dfrac{8\overline{AO}}{2\sqrt{2}.\overline{AO}} = 2\sqrt{2}$ পাউণ্ড,

এবং $T = \dfrac{8\overline{OB}}{\overline{BA}} = \dfrac{8.3\overline{AO}}{2\sqrt{2}.\overline{AO}} = 6\sqrt{2}$ পাউণ্ড।

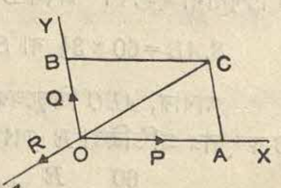
**বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ** মসৃণ সমতলের প্রতিক্রিয়া তলের লম্বাভিমুখী ধরিতে হয়।

**13·13. লামির সূত্র (Lami's theorem) ঃ একই বিন্দুতে সক্রিয় তিনটি বল সাম্যাবস্থাপন্ন হইলে, উহাদের প্রত্যেকটি অপর দুইটির অন্তর্বর্তী কোণের সাইনের সমানুপাতী হয়।**

$O$ বিন্দুতে যথাক্রমে $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY}$ এবং $\overrightarrow{OZ}$ বরাবর সক্রিয় $P$, $Q$ ও $R$ এই তিনটি বল যেন সাম্যাবস্থাপন্ন।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$\frac{P}{\sin YOZ} = \frac{Q}{\sin ZOX} = \frac{R}{\sin XOY}.$$




98নং চিত্র

এখন, $\overrightarrow{OX}$-এর $\overline{OA}$ অংশ যেন মানে $P$ একক স্থচিত করে, $\overrightarrow{OY}$-র $\overline{OB}$ অংশ যেন সেই মাপে $Q$ একক স্থচিত করে। তাহা হইলে $\overline{OA}$ ও $\overline{OB}$ যথাক্রমে $P$ ও $Q$ বলকে দিকে ও মানে স্থচিত করে। স্থতরাং, তাহাদের লব্ধি $OACB$ সামান্তরিকের $\overline{OC}$ কর্ণ দ্বারা দিকে ও মানে স্থচিত হইবে।

$P$, $Q$ ও $R$ সাম্যাবস্থাপন্ন বলিয়া, $P$ ও $Q$-র লব্ধি নিশ্চয় অবশিষ্ট বল $R$-এর সমান ও বিপরীতমুখী। কাজেই, $\overline{CO}$ দ্বারা $R$ বল অবশ্যই দিকে ও মানে স্থচিত হইবে।

এখন ত্রিকোণমিতি অনুসারে $OAC$ ত্রিভুজে,

$$\frac{\overline{OA}}{\sin ACO}=\frac{\overline{AC}}{\sin COA}=\frac{\overline{CO}}{\sin OAC};$$

কিন্তু, $\sin ACO=\sin COB=\sin(180°-YOZ)=\sin YOZ$,

$\sin COA=\sin(180°-ZOX)=\sin ZOX$,

$\sin OAC=\sin(180°-XOY)=\sin XOY$,

এবং $\overline{OA}$, $\overline{AC}$ ও $\overline{CO}$ যথাক্রমে $P$, $Q$ ও $R$-কে দিকে ও মানে স্থচিত করে।

$$\therefore\quad \frac{P}{\sin YOZ}=\frac{Q}{\sin ZOX}=\frac{R}{\sin XOY}.$$

**13·14. লামির সূত্রের বিপরীত প্রতিজ্ঞা (Converse of Lami's theorem) ঃ সমবিন্দু তিনটি বলের কোনটির ক্রিয়ারেখা যদি অপর-দুইটি বলের ক্রিয়ারেখার অন্তর্ভুক্ত কোণের মধ্যবর্তী না হয় এবং উহাদের প্রত্যেকটি ও অপর-দুইটির ক্রিয়ারেখার অন্তর্বর্তী কোণের sine-এর অনুপাত যদি একই হয়, তবে বল-তিনটি সাম্যাবস্থায় থাকিবে।**

$O$ বিন্দুতে যথাক্রমে $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY}$ এবং $\overrightarrow{OZ}$ বরাবর সক্রিয় $P$, $Q$ ও $R$—এই তিনটি বল এইরূপ যে,

$$\frac{P}{\sin YOZ}=\frac{Q}{\sin ZOX}=\frac{R}{\sin XOY}. \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (1)$$

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $P$, $Q$ ও $R$ বল-তিনটির লব্ধি শূন্য।

( 98নং চিত্রে ) $\overline{ZO}$ কে $C$ পর্যন্ত এরূপে বর্ধিত করা হইল, যেন $\overline{OC}=R$ একক হয়। $\overline{OC}$-কে কর্ণ লইয়া $OACB$ সামান্তরিক এরূপে সম্পূর্ণ করা হইল, যেন $\overline{OA}$ ও $\overline{OB}$ বাহুদ্বয় $\overrightarrow{OX}$ এবং $\overrightarrow{OY}$ বরাবর থাকে। এখন, $OAC$ ত্রিভুজে,

$$\frac{\overline{OA}}{\sin OCA}=\frac{\overline{AC}}{\sin AOC}=\frac{\overline{OC}}{\sin OAC}=\frac{R}{\sin OAC}.$$

কিন্তু $\sin OCA = \sin BOC = \sin (180° - YOZ) = \sin YOZ$ ;
$\sin AOC = \sin (180° - ZOX) = \sin ZOX$
এবং $\sin OAC = \sin (180° - XOY) = \sin XOY$.

$$\therefore \quad \frac{\overline{OA}}{\sin YOZ} = \frac{\overline{AC}}{\sin ZOX} = \frac{R}{\sin XOY}. \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

(1) ও (2) নং সমীকরণ হইতে পাওয়া যায়, $P = \overline{OA}$ এবং $Q = \overline{AC}$.

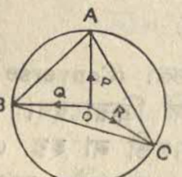
তাহা হইলে $O$ বিন্দুতে সক্রিয় $P$, $Q$ ও $R$ বল-তিনটিকে $OAC$ ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত বাহু-তিনটি দ্বারা দিকে ও মানে সূচিত করা যায়।

$\therefore$ $P$, $Q$ ও $R$ বল-তিনটি সাম্যাবস্থাপন্ন।

**উদাহরণ 1.** $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ ও $\overline{OC}$ বরাবর সক্রিয় $P$, $Q$ ও $R$ বল-তিনটি সাম্যাবস্থায় আছে। $O$, $ABC$ ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$\frac{P}{\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{a^2}{b^2c^2}} = \frac{Q}{\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}-\frac{b^2}{c^2a^2}} = \frac{R}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{c^2}{a^2b^2}},$$ যেখানে $a$, $b$, $c$ যথাক্রমে $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ ও $\overline{AB}$ বাহুর দৈর্ঘ্য।

$P$, $Q$ ও $R$ সাম্যাবস্থায় আছে। $\therefore$ লামির সূত্র অনুসারে,




99নং চিত্র

$$\frac{P}{\sin BOC} = \frac{Q}{\sin AOC} = \frac{R}{\sin AOB}.$$

কিন্তু কেন্দ্রস্থ $\angle BOC = 2 \times$ পরিধিস্থ $\angle BAC = 2A$,

অনুরূপে $\angle AOC = 2B$ এবং $\angle AOB = 2C$,

$$\therefore \quad \frac{P}{\sin 2A} = \frac{Q}{\sin 2B} = \frac{R}{\sin 2C},$$

বা, $$\frac{P}{2\sin A\cos A} = \frac{Q}{2\sin B\cos B} = \frac{R}{2\sin C\cos C}.$$

এখন, ত্রিকোণমিতির নিয়মে,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \text{ এবং}$$

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \ \cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

$$\text{এবং} \quad \cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

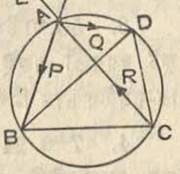
$$\therefore \frac{P}{2\cdot\frac{a}{2R}\frac{(b^2+c^2-a^2)}{2bc}} = \frac{Q}{2\cdot\frac{b}{2R}\frac{(c^2+a^2-b^2)}{2ca}} = \frac{R}{2\cdot\frac{c}{2R}\frac{(a^2+b^2-c^2)}{2ab}}$$

বা, $\dfrac{P}{a\,\dfrac{(b^2+c^2-a^2)}{abc.bc}}=\dfrac{Q}{b\,\dfrac{(c^2+a^2-b^2)}{abc.ca}}=\dfrac{R}{c\,\dfrac{(a^2+b^2-c^2)}{abc.ab}}$

বা, $\dfrac{P}{\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}-\dfrac{a^2}{b^2c^2}}=\dfrac{Q}{\dfrac{1}{c^2}+\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{b^2}{c^2a^2}}=\dfrac{R}{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}-\dfrac{c^2}{a^2b^2}}.$

**উদাহরণ 2.** একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের $\overline{AB}$ ও $\overline{AD}$ বাহু বরাবর সক্রিয় দুইটি বল $P$ ও $Q$-র লব্ধি $\overline{AC}$ কর্ণ বরাবর সক্রিয়। প্রমাণ কর যে,

$P:Q:R=\overline{CD}:\overline{CB}:\overline{BD}.$



100নং চিত্র

$P$, $Q$ বলের লব্ধি $R$, $\overrightarrow{AC}$ বরাবর সক্রিয়। সুতরাং, $\overrightarrow{AB}$ বরাবর $P$, $\overrightarrow{AD}$ বরাবর $Q$ এবং $\overrightarrow{CA}$ বরাবর $R$ (অর্থাৎ $P$ ও $Q$-এর লব্ধির সমান $R$ বলের বিপরীত দিকে) কাজ করিলে, $P$, $Q$ ও $R$ সাম্যাবস্থায় থাকিবে। অতএব, লামির সূত্র অনুসারে,

$$\frac{P}{\sin DAE}=\frac{Q}{\sin BAE}=\frac{R}{\sin BAD},$$

বা, $\dfrac{P}{\sin(180^\circ-CAD)}=\dfrac{Q}{\sin(180^\circ-EAF)}=\dfrac{R}{\sin(180^\circ-BCD)}$

[ ∵ বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণের সমষ্টি $=180^\circ$ ]

বা, $\dfrac{P}{\sin CAD}=\dfrac{Q}{\sin BAC}=\dfrac{R}{\sin BCD}$, [ ∴ $\angle EAF=\angle BAC$ ]

বা, $\dfrac{P}{\sin CBD}=\dfrac{Q}{\sin BDC}=\dfrac{R}{\sin BCD}$,

[ একই চাপের উপর দণ্ডায়মান কোণ-সকল সমান বলিয়া ]

কিন্তু ত্রিকোণমিতির নিয়মে,

$$\frac{\sin CBD}{CD}=\frac{\sin BDC}{BC}=\frac{\sin BCD}{BD}=2\frac{1}{2R},$$

[ যেখানে $R$ ত্রিভুজ $BCD$-র পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ ]

∴ $\sin CBD=\dfrac{1}{2R}\cdot\overline{CD}$, $\sin BDC=\dfrac{1}{2R}\cdot\overline{BC}$, এবং $\sin BCD=\dfrac{1}{2R}\cdot BD$.

∴ $\dfrac{P}{\dfrac{1}{2R}\cdot\overline{CD}}=\dfrac{Q}{\dfrac{1}{2R}\cdot BC}=\dfrac{R}{\dfrac{1}{2R}\cdot\overline{BD}}$,

বা, $\dfrac{P}{\overline{CD}}=\dfrac{Q}{\overline{BC}}=\dfrac{R}{\overline{BD}}$.

∴ $P:Q:R=\overline{CD}:\overline{BC}:\overline{BD}$.

## প্রশ্নমালা 16

1. একখানি ছবি উহার ফ্রেমের উপরের প্রান্তের দুই কোণায় বাঁধা একখণ্ড দড়ি দিয়া একটি মসৃণ পেরেকের উপর ঝুলানো রহিয়াছে। ছবিখানির ওজন যদি 36 পাউণ্ড হয় এবং দড়ির খণ্ডদ্বয়ের মধ্যেকার কোণটি যদি এক সমকোণ হয়, তবে দড়ির উপর টান নির্ণয় কর।

2. পরস্পর হইতে অনুভূমিক রেখায় 2 ফু. 6 ই. দূরে অবস্থিত দুইটি বিন্দু হইতে যথাক্রমে 2 ফু. ও 1 ফু. 6 ই. লম্বা দুইগাছি দড়ির সাহায্যে 25 পাউণ্ড-ভার ঝুলানো রহিয়াছে। দড়ির উপর টান নির্ণয় কর।

3. 50 পাউণ্ড ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুকণাকে 3 ফুট ও 4 ফুট দীর্ঘ দুইটি তার দ্বারা 5 ফুট দূরবর্তী একই অনুভূমিক রেখায় অবস্থিত দুইটি বিন্দু হইতে ঝুলানো হইয়াছে। তার-দুইটির টান নির্ণয় কর। [ W. B. H. S. 1962 ]

4. 7 ও 24 ইঞ্চি দুইখণ্ড দড়ির প্রত্যেকটির এক প্রান্তে 10 পা. ভর বাঁধা এবং অপর প্রান্ত-দুইটি একটি 25 ইঞ্চি দণ্ডের এক এক প্রান্তে বাঁধা। দণ্ডটিকে যদি এমনভাবে ধারণ করা যায় যে, উহার ঠিক মধ্যবিন্দুর তলার দিকে ভরটি ঝুলিয়া থাকে, তবে দড়ির টান-দুইটি নির্ণয় কর। [ W. B. H. S. 1966 ]

5. $A$ বিন্দুতে কব্‌জা দ্বারা বদ্ধ একটি সরল দণ্ড $\overline{AB}$ ও $\overline{BC}$ দড়ির সাহায্যে অনুভূমিক রেখায় ধৃত রহিয়াছে। $C$ বিন্দু $A$ বিন্দু হইতে উল্লম্ব রেখার উপরিস্থ এমন একটি বিন্দু যে, $\overline{BC}$ দড়ির দৈর্ঘ্য $\overline{AB}$ দণ্ডের দ্বিগুণ। $B$ বিন্দু হইতে দণ্ডটির সহিত 20 পাউণ্ড-ভার ঝুলানো থাকিলে, দড়ির উপর টান এবং কব্‌জার প্রতিক্রিয়া নির্ণয় কর।

6. 10 পাউণ্ড ভারী $\overline{BC}$ দণ্ডটি $B$ বিন্দুর চারিদিকে অবাধে ঘুরিতে পারে। $B$ বিন্দুর সহিত একই অনুভূমিক রেখায় কোন বিন্দু $A$ হইতে 8 ইঞ্চি লম্বা একটি দড়ি $C$ বিন্দুর সহিত যুক্ত রহিয়াছে। যদি $\overline{AB}=10$ ইঞ্চি এবং দণ্ডটি 6 ইঞ্চি লম্বা হয়, তবে $\overline{AC}$-র টান নির্ণয় কর। [ U. P. B. I.Sc. 1950 ]

7. 5 ইঞ্চি লম্বা ভারহীন একটি দণ্ড উহার দুই প্রান্তে যুক্ত 7 ইঞ্চি লম্বা একগাছি দড়ির সাহায্যে একটি মসৃণ পেরেকের উপর ঝুলানো রহিয়াছে এবং দণ্ডটির দুই প্রান্তে 3 ও 4 পাউণ্ডের ভার ঝুলিতেছে। প্রমাণ কর যে, দড়িগাছির দুই অংশ এবং দণ্ডটি একটি সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করিলে, দণ্ডটি সাম্যাবস্থায় থাকিবে। [ U. P. B. I.Sc. 1946 ]

8. $A$ বিন্দুতে কব্‌জাবদ্ধ $\overline{AB}$ দণ্ডটি $A$ বিন্দুর পিছনকার তলস্থিত $C$ বিন্দুর সহিত যুক্ত একগাছি দড়ির সাহায্যে এমনভাবে ধৃত যে, দণ্ডটি $A$ বিন্দুগামী অনুভূমিক তলের সহিত 60° কোণ উৎপন্ন করে। যদি $\overline{AC}=\overline{AB}$ হয়, তবে $A$ বিন্দুর প্রতিক্রিয়ার দিক্ নির্ণয় কর। [ C. U. I.Sc. 1943 ]

9. $ACB$ হালকা দণ্ডটি $A$ বিন্দুতে এমনভাবে কব্‌জাবদ্ধ যে, উহা একটি

উল্লম্বতলে ঘূর্ণনক্ষম। দণ্ডটির $C$ বিন্দু, $A$ বিন্দুর উল্লম্ব রেখার উপরিস্থ $D$ বিন্দুর সহিত একটি হালকা শিকল দিয়া যুক্ত। $ACD$ ত্রিভুজ সমবাহু এবং $\overline{AC} = 3\overline{CB}$. $B$ বিন্দু হইতে যখন একটি 9 পাউণ্ড-ভার ঝুলানো হয়, তখন শিকলের উপর টান এবং $A$ বিন্দুতে প্রতিক্রিয়ার দিক্ ও মান নির্ণয় কর।

10. $\overline{AB}$ সমদণ্ড 10 পাউণ্ড ভারী এবং 15 ইঞ্চি লম্বা। উহা একটি দেওয়ালের সহিত $A$ বিন্দুতে মসৃণভাবে কব্জা দিয়া আঁটা এবং $\overline{BC}$ দড়ির সাহায্যে অনুভূমিক রেখায় ধৃত। $C$ বিন্দু $A$ বিন্দুর উল্লম্বদিকে উপরে অবস্থিত এবং $\overline{AC}$, 8 ইঞ্চি দীর্ঘ। দড়ির টান এবং দণ্ডের উপর দেওয়ালের প্রতিক্রিয়ার দিক্ ও মান নির্ণয় কর। ভারী দণ্ডটির স্থলে যদি একই দৈর্ঘ্যের ভারহীন অপর একটি দণ্ড থাকে এবং উহার $B$ প্রান্তে যদি 10 পাউণ্ডের একটি ভার ঝুলানো হয়, তবে প্রমাণ কর যে, দেওয়ালের প্রতিক্রিয়া এইবার অনুভূমিক হইবে। [ Oxford & Cambridge Jt. Board ]

11. 20 ফুট লম্বা একটি মই-এর এক প্রান্ত ভূমি হইতে 20 ফুট উচ্চ একটি দেওয়ালের উপরে এবং অপর প্রান্ত অমসৃণ ভূতলে স্থাপিত। মই-এর ওজন 60 পাউণ্ড এবং সেই ভার মই-এর নিম্নপ্রান্ত হইতে 10 ফুট উপরে এক বিন্দু দিয়া সক্রিয়। ভূমির প্রতিক্রিয়ার দিক্ ও মান নির্ণয় কর।

12. 7 ফুট দীর্ঘ ও 5 ফুট প্রস্থ একটি আয়তাকার দরজার ওজন 100 পাউণ্ড। এই ওজন দরজাটির কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়া সক্রিয়। দরজাটি প্রস্থের দিকে খুঁটির সহিত $A$ ও $B$ বিন্দুতে কব্জার সাহায্যে ধৃত। $A$ ও $B$ বিন্দু প্রস্থের মধ্যবিন্দু হইতে প্রত্যেকে 2 ফুট দূরে অবস্থিত। উপরিস্থ কব্জা $A$-এর প্রতিক্রিয়া অনুভূমিক। $B$ কব্জার প্রতিক্রিয়ার দিক্ ও মান নির্ণয় কর। এইবার দরজাখানিকে যদি এমনভাবে লাগানো হয় যে, উভয় কব্জার প্রতিক্রিয়ার মান সমান হয়, তবে ঐ দুইটির প্রতিক্রিয়ার দিক্ নির্ণয় কর। [ Oxford & Cambridge Jt. Board ]

13. একটি আয়তাকার দরজার কব্জা-দুইটির দূরত্ব যদি 4 ফুট, দরজাটির প্রস্থ 10 ফুট এবং ওজন 500 পাউণ্ড হয় এবং নিচের কব্জাটিই যদি সমগ্র ভার বহন করে, তবে উপরের কব্জার উপর চাপ নির্ণয় কর। [ U. P. B. I.Sc. 1949 ]

14. একটি দরজা দুইটি কব্জার উপর এমনভাবে স্থাপিত যে, উপরের কব্জাটির প্রতিক্রিয়া সম্পূর্ণভাবে অনুভূমিক। কব্জা-দুইটির দূরত্ব 5 ফুট এবং দরজার ভার 100 পাউণ্ড। এই ভার কব্জা-দুইটির যোজকরেখা হইতে $3\frac{1}{2}$ ফুট দূরে উল্লম্ব রেখায় সক্রিয় হইলে, প্রত্যেক কব্জার প্রতিক্রিয়া নির্ণয় কর। [ C. U. I.Sc. 1950 ]

15. 5 ইঞ্চি ব্যাসার্ধযুক্ত 12 পাউণ্ড ভারী একটি গোলক অনুভূমিক তলের সহিত 60° কোণে নত একটি মসৃণ তলের উপর স্থির রহিয়াছে। গোলকটির উপরিস্থ একটি বিন্দু ও তলের উপর অপর একটি বিন্দুর সহিত 8 ইঞ্চি লম্বা একটি দড়ি যুক্ত রহিয়াছে।

দড়ি-রেখাটিকে বর্ধিত করিলে, কেন উহা অবশ্যই গোলকটির কেন্দ্র দিয়া যাইবে তাহা ব্যাখ্যা কর।

দড়ির টান এবং তলের উপর গোলকটির প্রতিক্রিয়া নির্ণয় কর।

[ Oxford & Cambridge Jt. Board ]

16. 200 গ্রামের একটি গোলক বরগার সহিত একটি আংটা হইতে দড়ির সাহায্যে ঝুলানো রহিয়াছে। উল্লম্ব রেখার সহিত 45° কোণে একটি বল ঐ গোলকটির কেন্দ্র বরাবর উপরের দিকে এমনভাবে ঠেলিয়া রাখিয়াছে যে, দড়িটি উল্লম্ব রেখার সহিত 30° কোণ উৎপন্ন করিয়াছে। একটি চিত্র অঙ্কন করিয়া গোলকটির উপর সক্রিয় বলগুলি দেখাও এবং উহাদের প্রত্যেকটির মান নির্ণয় কর। [ London University ]

17. $l$ দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি হাল্‌কা অপ্রসার্য তারের দুইপ্রান্ত '$a$' দূরবর্তী একই অনুভূমিক রেখায় অবস্থিত দুইটি বিন্দু $A$ ও $B$-তে বাঁধা হইয়াছে। $w$ ভারবিশিষ্ট একটি মসৃণ আংটি তারের মধ্য দিয়া গলিয়া যাইতে পারে। আংটিটি একটি অনুভূমিক বল $X$-এর ক্রিয়ায় $B$ বিন্দুর নিচে উল্লম্ব রেখায় স্থির হইলে, প্রমাণ কর যে, $X=\frac{aw}{l}$ এবং তারের টান হইল $\frac{w(a^2+l^2)}{2l^2}$. [ W. B. H. S. 1961 ]

18. একটি ভারী সমসত্ব দণ্ড $\overline{AB}$-র এক প্রান্ত $A$ একটি মসৃণ দেওয়ালের উপর স্থাপিত এবং অপর প্রান্ত $B$ হইতে দড়ি বাঁধিয়া $A$-র উল্লম্ব দিকে $C$ বিন্দুর সহিত ঝুলানো আছে। $\overline{AB}=\overline{AC}\sqrt{2}$ হইলে, উল্লম্ব রেখার সহিত দণ্ডটির কোণ এবং প্রতিক্রিয়ার মান নির্ণয় কর। [ W. B. H. S. 1963 ]

19. 3 ফুট লম্বা $\overline{AB}$ দণ্ডটির ভার 2 পাউণ্ড। উহার $A$ প্রান্ত একটি মসৃণ দেওয়ালের উপর স্থাপিত। $B$ প্রান্ত ও $A$-র উল্লম্ব দিকে $C$ বিন্দুর সহিত দড়ি বাঁধিয়া দণ্ডটিকে উল্লম্ব তলে এমনভাবে ধারণ করা হইয়াছে যে, উহা অনুভূমিক তলের সহিত 30° কোণ উৎপন্ন করে। $\overline{BC}$-র দৈর্ঘ্য ও দড়ির টান বাহির কর।

[ W. B. H. S. 1965 ]

20. 6 ফুট দীর্ঘ $\overline{AB}$ সমসত্ব দণ্ডটি $A$ বিন্দুতে একটি কব্‌জার চারিদিকে অবাধে ঘুরিতে পারে। $A$ হইতে 15 ইঞ্চি দূরে দণ্ডটির $E$ বিন্দুতে বাঁধা একটি দড়ির অপর প্রান্ত $A$ বিন্দুর উল্লম্ব দিকে উপরে $C$ বিন্দুতে আটকানো আছে। দণ্ডটির ওজন 40 পাউণ্ড এবং দড়ির টান 120 পাউণ্ড হইলে, দেখাও যে দড়িটির দৈর্ঘ্য 25 ইঞ্চি।

[ W. B. H. S. 1964 ]

21. একটি মসৃণ দেওয়ালের উপর এক প্রান্ত এবং ঐ দেওয়ালের সহিত $\theta$ কোণে নত একটি মসৃণ তলের উপর অপর প্রান্ত রাখিয়া একটি ভারী সমসত্ব দণ্ড সাম্যাবস্থায় রহিয়াছে। অনুভূমিক রেখার সহিত দণ্ডটির কোণ $\alpha$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$\tan\alpha=\frac{1}{2}\tan\theta$. [ W. B. H. S. 1967 ]

22. 1 মিটার লম্বা ও 8 কি.গ্রা. ভারী একটি সমসত্ত্ব দণ্ড $\overline{AB}$ মসৃণভাবে $A$ বিন্দুতে কব্‌জায় আঁটা। $F$ কি.গ্রা. পরিমাণ একটি অনুভূমিক বলের ক্রিয়ায় $B$ প্রান্তটি অনুভূমিক তলের সহিত 60° কোণ উৎপন্ন করিয়া সাম্যাবস্থায় আছে। $A$ প্রান্তের প্রতিক্রিয়ার দিক্ ও মান এবং $F$-এর মান নির্ণয় কর। [W. B. H. S. 1969]

23. $W$ ভারবিশিষ্ট $ACB$ সমদণ্ডটির $B$ বিন্দু সর্বোচ্চ প্রান্ত। $A$ প্রান্তটিকে একটি মসৃণ খাড়া দেওয়ালের গায়ে রাখিয়া $\overline{CD}$ দড়ির সাহায্যে ঐ দণ্ডটিকে টানিয়া রাখা হইয়াছে। $\overline{BD}$ অনুভূমিক এবং $\overline{CD}$ দেওয়ালটির সহিত 30° কোণে অবস্থিত। দড়িটির টান ও দেওয়ালের প্রতিক্রিয়া নির্ণয় কর। [W. B. H. S. 1971]

24. $O$, $ABC$ ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র। $O$ বিন্দুতে স্থাপিত কোন বস্তুকণার উপর তিনটি বল $P$, $Q$ ও $R$ যথাক্রমে $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ ও $\overline{OC}$ বরাবর সক্রিয়। প্রমাণ কর যে, বল-তিনটি সাম্যাবস্থায় থাকিলে

$$\frac{P}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{Q}{\cos\frac{B}{2}}=\frac{R}{\cos\frac{C}{2}}$$

25. $O$, $ABC$ ত্রিভুজের পরিবৃত্তের কেন্দ্র। $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ ও $\overline{OC}$ বরাবর সক্রিয় $P$, $Q$ ও $R$ বল-তিনটি সাম্যাবস্থায় থাকিলে, দেখাও যে,

$$\frac{P}{a^2(b^2+c^2-a^2)}=\frac{Q}{b^2(c^2+a^2-b^2)}=\frac{R}{c^2(a^2+b^2-c^2)},$$

যেখানে $a$, $b$ ও $c$ যথাক্রমে $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ ও $\overline{AB}$ বাহুর দৈর্ঘ্য।

26. $ABC$ ত্রিভুজের বাহু-তিনটির উপর লম্বভাবে সক্রিয় তিনটি বল সাম্যাবস্থায় আছে। দেখাও যে, বল-তিনটি $\sin A$, $\sin B$ ও $\sin C$-র সমানুপাতিক।

27. তিনটি বল $O$ বিন্দুতে নির্দিষ্ট অভিমুখে সক্রিয় এবং সাম্যাবস্থা-সম্পন্ন। $O$ বিন্দু দিয়া অঙ্কিত কোন বৃত্ত বল-তিনটির ক্রিয়ারেখাকে যথাক্রমে $A$, $B$ ও $C$ বিন্দুতে ছেদ করিলে, প্রমাণ কর যে, বল-তিনটি $ABC$ ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্যের সমানুপাতিক।

28. $A$, $B$ ও $C$ কোন বৃত্তের পরিধিস্থিত বিন্দু। $\overline{AB}$ এবং $\overline{BC}$ বরাবর উহাদের দৈর্ঘ্যের ব্যস্তানুপাতিক মানের দুইটি বল সক্রিয়। দেখাও যে, উহাদের লব্ধি $B$ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক বরাবর সক্রিয়।

## চতুর্দশ অধ্যায়

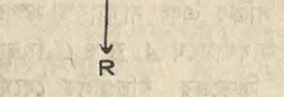
# সমান্তরাল বলশ্রেণী ও ভারকেন্দ্র

## ( System of a parallel forces and centre of gravity )

**14·1. সমান্তরাল বলশ্রেণীর লব্ধি : (Resultant of a system of parallel forces) :** দুইটি সমান্তরাল বলের ক্রিয়ারেখা একই সমতলে থাকিবেই। অথবা দুইটি সমান্তরাল বলের ক্রিয়ারেখা দিয়া একটি সমতল অবশ্যই আঁকা যায়। এখন দুইয়ের অধিক কয়েকটি সমান্তরাল বল দুইভাবে থাকিতে পারে : তাহারা হয় (i) একই সমতলে, নতুবা (ii) একাধিক সমতলে সক্রিয় হইতে পারে। প্রথমে একই সমতলে সক্রিয় একশ্রেণীর সমান্তরাল বলের লব্ধি-নির্ণয়ের প্রণালী আলোচনা করা হইতেছে।

(*a*) **একই সমতলে সমান্তরাল বলশ্রেণীর লব্ধি** (*Resultant of coplanar parallel forces*) :

$P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$,... প্রভৃতি বলগুলি যেন একশ্রেণীর সমান্তরাল বল। উহারা একই সমতলে সক্রিয়। উক্ত সমতলের যে-কোন একটি বিন্দু $O$ হইতে ঐ বলগুলির ক্রিয়ারেখাসমূহের উপর অঙ্কিত $OA$ লম্ব $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$,... প্রভৃতির ক্রিয়ারেখাকে যেন যথাক্রমে $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$,... প্রভৃতি বিন্দুতে ছেদ করে।




101নং চিত্র

বলগুলি সমান্তরাল বলিয়া, উহাদের বৈজিক সমষ্টিই উহাদের লব্ধির মান সূচিত করিবে।

$$\therefore \quad R = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 \cdots \quad \text{(i)}$$

দ্বিতীয়ত, এই লব্ধি যদি $\overrightarrow{OA}$ রেখায় $G$ বিন্দুতে সক্রিয় হয়, তবে $O$ বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইলে,

$$R.OG = P_1.OA_1 + P_2.OA_2 + P_3.OA_3 + P_4.OA_4 + \cdots$$

অথবা $(P_1 + P_2 + P_3 + \cdots)\, OG$

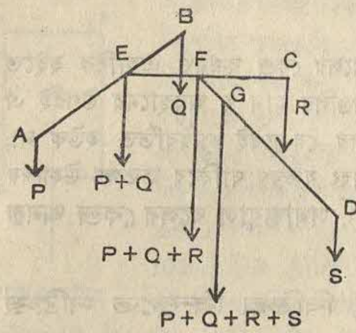
$$= P_1.OA_1 + P_2.OA_2 + P_3.OA_3 + P_4.OA_4 + \cdots$$

[ (i) হইতে, $R = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + \cdots$ বলিয়া ]

$$\therefore \quad OG = \frac{P_1.OA_1 + P_2.OA_2 + P_3.OA_3 + P_4.OA_4 + \cdots}{P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + \cdots\cdots} \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

এইরূপে (i) হইতে নির্ণেয় লব্ধির মান ও (ii) হইতে উহার অবস্থান পাওয়া যায়।

**(b) একাধিক সমতলে সক্রিয় সমান্তরাল বলশ্রেণীর লব্ধি ঃ**




102নং চিত্র

যথাক্রমে $A$, $B$, $C$ ও $D$ বিন্দুতে সক্রিয় $P$, $Q$, $R$ ও $S$ বল-কয়টি যেন সমান্তরাল ও বিভিন্ন সমতলে সক্রিয়। উহাদের লব্ধির মান ও অবস্থান নির্ণয় করিতে হইবে। $A$ ও $B$ যুক্ত হইল। $\overline{AB}$-র উপর $E$ এমন একটি বিন্দু যে, $P.AE = Q.BE$. তাহা হইলে $P$ ও $Q$-র লব্ধি $P+Q$ নিশ্চয়ই $E$ বিন্দুগামী এবং $P$ ও $Q$ বলের সমতলে সক্রিয়।

আবার, $E$ ও $C$ বিন্দু যুক্ত করিয়া $\overline{EC}$-র উপর এমন একটি বিন্দু $F$ লওয়া হইল যে, $(P+Q).EF = R.CF$ হয়। তাহা হইলে $E$ বিন্দুতে সক্রিয় $P+Q$ বল ও $C$ বিন্দুতে সক্রিয় $R$ বলের লব্ধি নিশ্চয়ই $F$ বিন্দু দিয়া যাইবে এবং উহার মান হইবে $(P+Q+R)$. উহা $P+Q$ ও $R$ বলের সমতলে সক্রিয়।

তৃতীয়বার, $F$ ও $D$ বিন্দু যুক্ত করিয়া, উহার উপর এমন একটি বিন্দু $G$ লওয়া হইল যে, $(P+Q+R)\times FG = S.DG$ হয়। তাহা হইলে, $F$ বিন্দুতে সক্রিয় $(P+Q+R)$ বল ও $D$ বিন্দুতে সক্রিয় $S$ বলের লব্ধি উহাদের সমতলে $G$ বিন্দু দিয়া যাইবে এবং উহার মান হইবে $(P+Q+R+S)$.

$\therefore$ $A$ বিন্দুতে সক্রিয় $P$ বল, $B$ বিন্দুতে সক্রিয় $Q$ বল, $C$ বিন্দুতে সক্রিয় $R$ বল ও $D$ বিন্দুতে সক্রিয় $S$ বলের লব্ধির মান $P+Q+R+S$ ও অবস্থান $G$ বিন্দু দ্বারা সূচিত হইবে। এইভাবে বিভিন্ন সমতলে সক্রিয় যে-কোন-সংখ্যক সমান্তরাল বলের লব্ধির সক্রিয় মান ও অবস্থান নির্ণয় করা যায়।

**14·2. সমান্তরাল বলের কেন্দ্র (Centre of parallel force) ঃ** একশ্রেণীর সমান্তরাল বলের লব্ধিও তাহাদের সমান্তরাল। এই লব্ধির মান ও অবস্থান ঐ বলগুলির বিভিন্ন মান ও অবস্থানের উপরই মাত্র নির্ভর করে। এইরূপ সমান্তরাল বলশ্রেণীর দিক্ যদি পরিবর্তিত হয়, তবে লব্ধিরও একই অভিমুখে দিক্ পরিবর্তিত হইবে ; কিন্তু যতক্ষণ প্রথমোক্ত বলগুলির মান ও অবস্থান অপরিবর্তিত থাকিবে, ততক্ষণ লব্ধিরও মান এবং অবস্থান অপরিবর্তিত থাকিবে।

তাহা হইলে, স্বভাবতই এইরূপ একটি সিদ্ধান্ত হয় ঃ

**এক শ্রেণীর যে-কোন-সংখ্যক বলের লব্ধি এমন একটি বিন্দু দিয়া যায়, যাহার অবস্থান ঐ বলশ্রেণীর দিক্-নিরপেক্ষভাবে কেবল মান ও অবস্থানেরই উপর নির্ভর করে।**

**এইরূপ এক শ্রেণীর সমান্তরাল বলের লব্ধির অবস্থানসূচক বিন্দুটিকেই ঐ সমান্তরাল বলশ্রেণীর কেন্দ্র বলা হয়।**

**অনুসিদ্ধান্ত।** এক শ্রেণীর সমান্তরাল বলের কেন্দ্র কখনও একাধিক হইতে পারে না। কারণ সংজ্ঞা অনুসারে সমান্তরাল বলগুলির মান ও অবস্থানের উপরই ঐ কেন্দ্রের অবস্থান নির্ভর করে। দিক্ তাহাদের যে-মুখেই পরিবর্তিত হউক না, তাহাদের মান ও অবস্থান সর্বদা একই থাকিবে এবং যতক্ষণ থাকিবে ততক্ষণ উহাদের কেন্দ্রের অবস্থানও এক ও অভিন্ন হইবে। সুতরাং, **সমান্তরাল বলের কেন্দ্র অনন্য** (unique).

**14·3. একই সরল রেখার বিভিন্ন বিন্দুতে সক্রিয় সমান্তরাল বলশ্রেণীর কেন্দ্র ঃ** (101নং চিত্র দেখ) $P_1, P_2, P_3, P_4,\ldots$ প্রভৃতি সমান্তরাল বলগুলি যদি একটি রেখা $\overline{OA}$-র যথাক্রমে $A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ldots$ প্রভৃতি বিন্দুতে সক্রিয় হয়, তবে (14·1 অনুচ্ছেদ অনুসারে) তাহাদের লব্ধি $\overline{OA}$ রেখারই এমন একটি বিন্দু $G$ দিয়া যাইবে যে,

$$OG = \frac{P_1.OA_1 + P_2.OA_2 + P_3.OA_3 + P_4.OA_4 + \cdots}{P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + \cdots\cdots}$$

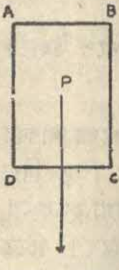
এই $\overline{OA}$ রেখাস্থিত $G$ বিন্দুই আলোচ্যমান সমান্তরাল বলগুলির কেন্দ্র।

**14·4. ভারকেন্দ্র (Centre of gravity) ঃ** পৃথিবী তাহার উপরিস্থ বা নিকটবর্তী সকল বস্তুকেই আপন কেন্দ্রের দিকে আকর্ষণ করে। বস্তুবিশেষকে পৃথিবী এইভাবে যে-বলে আকর্ষণ করে, তাহাকেই ঐ বস্তুর ভার বলা হয়। আমরা ইহাও জানি যে, বস্তুনিচয়ের ভার তাহাদের ভরের সমানুপাতিক।

এখন, বস্তুকণার উপর পৃথিবীর আকর্ষণ যে-রেখায় সক্রিয় হয়, তাহাকে উল্লম্ব রেখা বলে। এইরূপ উল্লম্ব রেখাগুলি অন্তিমে পৃথিবীর কেন্দ্রে যাইয়া মিলিত হয়। তবে কাছাকাছি দুইটি উল্লম্ব রেখাকে সমান্তরাল বলিয়া ধরা যায়। কারণ পৃথিবীর ব্যাসার্ধ প্রায় 4000 মাইল দীর্ঘ। যেহেতু এত বিপুল দূরত্বে যাইয়া উল্লম্ব রেখাগুলি মিলিত হয়, সেইহেতু উহাদিগকে সমান্তরালই বলিতে হয়।

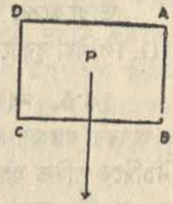
দ্বিতীয়ত, প্রত্যেক কঠোর বস্তু কতকগুলি সুসংহত ভারী বস্তুকণার দ্বারা গঠিত। ইহার প্রত্যেকটি বস্তুকণার ভর-পরিমাণ সমান ধরিলে, উহাদের প্রত্যেকের উপর পৃথিবীর আকর্ষণ-জনিত বল বা অভিকর্ষজ বলও সমান ধরিতে হইবে। এই বলশ্রেণী যেহেতু উল্লম্ব রেখায় সক্রিয়, সেইহেতু ইহাদিগকে এক শ্রেণীর সমান্তরাল বল বলা যায়। সুতরাং, যতক্ষণ বস্তুটির আকার ও অবয়ব অপরিবর্তিত থাকিবে, ততক্ষণ ঐ বলশ্রেণীর লব্ধি অর্থাৎ ভার নিশ্চয়ই একটি বিন্দু বা কেন্দ্র দিয়া যাইবে। এই বিন্দুটিই আলোচ্য বস্তুর **ভারকেন্দ্র** বলিয়া পরিচিত।

তাহা হইলে ভারকেন্দ্র বিশেষ শ্রেণীর সমান্তরাল বলেরই কেন্দ্র বলা চলে।



103(a)নং চিত্র

অভিকর্ষজ বলের দিক্ অবশ্য নির্দিষ্ট, কাজেই বস্তু-বিশেষের কণাগুলির উপর সক্রিয় এই বলসমূহের দিক্-পরিবর্তন করা মানুষের সাধ্য নয়। কিন্তু বস্তুটাকে ওলট-পালট করিলে, উহার তুলনায় ঐ বস্তুটির কণাগুলির উপর অভিকর্ষজ বলগুলির দিক্ও পাল্টাইয়া যাইতে পারে। উদাহরণস্বরূপ, $ABCD$ একটি আয়ত পাত। উহার $P$ কণার উপর 103($a$)-চিত্রে $\overline{BC}$-র সমান্তরালভাবে অভিকর্ষজ বল সক্রিয়, কিন্তু পাতটিকে 103($b$)-চিত্রের মতো



103($b$)নং চিত্র

ধরিলে, $P$ কণার উপর অভিকর্ষজ বল $\overline{AB}$-র সমান্তরালভাবে সক্রিয় হইবে। স্পষ্টতই, পাতটির তুলনায় একই কণার উপর অভিকর্ষজ বলের দিক্ বদলাইয়া গেল। কিন্তু এইরূপ উল্টাইয়া-পাল্টাইয়া যেমন খুশী করি-না কেন, পাতটির অবয়ব ও আকার যতক্ষণ অপরিবর্তিত থাকিবে, ততক্ষণ উহার কণাগুলির উপর অভিকর্ষজ বলশ্রেণীর কেন্দ্রও এক ও অভিন্ন থাকিবে ; এবং যেহেতু এই কেন্দ্রই ভারকেন্দ্র, সেইহেতু উহারও কোন পরিবর্তন হইবে না। তাহা হইলে কঠোর বস্তুর ভারকেন্দ্র ঐ বস্তুসাপেক্ষে নির্দিষ্ট। বস্তুটি নড়িলে-চড়িলে উহাতে নির্দিষ্ট থাকিয়াই ভারকেন্দ্রও সঙ্গে সঙ্গে নড়াচড়া করিবে।

তৃতীয়ত, ভারকেন্দ্র সর্বদাই যে বস্তুবিশেষের নিজের মধ্যেই অবস্থিত থাকিবে, তাহা নয়। উদাহরণস্বরূপ, বৃত্তাকার একটি ধাতুবলয়ের কেন্দ্রই উহার ভারকেন্দ্র, অথচ এই কেন্দ্র-বলয়টির ভরের উপর অবস্থিত নয়।

চতুর্থত, সকল বস্তুরই ভারকেন্দ্র আছে। বস্তু কঠোর হইলেই মাত্র ভারকেন্দ্র থাকে, নহিলে থাকে না—একথা সত্য নয়। কথাটা এইমাত্র যে, নমনীয় বস্তুর ভারকেন্দ্র ততক্ষণই নির্দিষ্ট থাকে, যতক্ষণ উহার আকার ও অবয়ব অপরিবর্তিত থাকে। উদাহরণ-স্বরূপ, একটি লম্বা, সরু ও সমসত্ত্ব (uniform) তার যতক্ষণ সরল রেখায় বিস্তারিত থাকে, ততক্ষণ উহার ঠিক মধ্যস্থলে থাকিবে উহার ভারকেন্দ্র। কিন্তু উহাকে যদি বাঁকাইয়া বৃত্তাকার করা হয়, তবে ঐ তারের ভারকেন্দ্র হইবে ঐ বৃত্তের কেন্দ্র।

উপরের আলোচনা হইতে ভারকেন্দ্র সম্বন্ধে এরূপ একটা সংজ্ঞা পাওয়া যায় :

**একটি বস্তুর আকার ও অবয়ব যতক্ষণ অপরিবর্তিত থাকে, ততক্ষণ উহার তুলনায় যে নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া উহার কণাগুলির উপর সক্রিয় অভিকর্ষজ বলশ্রেণীর লব্ধি সর্বদা সক্রিয় থাকে, সেই বিন্দুকে ঐ বস্তুর ভারকেন্দ্র বলে।**

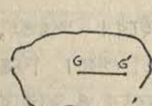
অথবা, আরও সংক্ষেপে বলা যায় যে—

**কোন নির্দিষ্ট আকার ও অবয়বযুক্ত বস্তুর ভারকেন্দ্র বলিতে সেই**

**বিন্দুকেই বুঝায়, যে-বিন্দুতে বস্তুটির যে-কোন অবস্থানে, উহার সমগ্র ভার সক্রিয় বলিয়া কল্পনা করা যায়।**

ভারকেন্দ্রের ইংরেজী নাম Centre of Gravity, সেইজন্য সংক্ষেপে উহাকে C.G. লিখিয়া বুঝানো হয়।

**14·5. বস্তু-বিশেষের ভারকেন্দ্র অনন্য :** বস্তুবিশেষের আকার ও অবয়ব যতক্ষণ অপরিবর্তিত থাকে, ততক্ষণ উহার ভার একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া নিচদিকে সক্রিয় হইবে। বস্তুটিকে উল্‌টাইয়া-পাল্‌টাইয়া যে অবস্থানেই রাখা হউক-না, ভারের ক্রিয়ারেখা সর্বদা সেই নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া উল্লম্বভাবে নিম্নমুখী হইবে। চিত্রে প্রদর্শিত বস্তুটির ভারকেন্দ্র যেন $G$. যদি উহার দ্বিতীয় আর-একটি ভারকেন্দ্র থাকা সম্ভব হয়, তবে তাহা যেন $G'$. এখন বস্তুটিকে এমন অবস্থানে রাখা হইল যে, $\overline{GG'}$ অনুভূমিক হয়। সংজ্ঞা অনুসারে বস্তুটির ভার উহার যে-কোন অবস্থানে নিম্নাভিমুখী হইবে। কাজেই এক্ষেত্রে $\overline{GG'}$ রেখায় সেই ভারকে নিম্নাভিমুখী হইতে হয়, কিন্তু তাহা অসম্ভব। $\overline{GG'}$ অনুভূমিক রেখা, উহার উপর উল্লম্ব দিক্‌ই ভারের অভিমুখ। $G$ ও $G'$ একই বিন্দুতে মিলিত হইলেই মাত্র ভার তাহাদের মধ্য দিয়া নিম্নাভিমুখী হইতে পারে। অতএব একটি নির্দিষ্ট আকার ও অবয়বযুক্ত বস্তুর একাধিক ভারকেন্দ্র থাকিতে পারে না। অর্থাৎ বস্তু-বিশেষের ভারকেন্দ্র অনন্য।



104নং চিত্র

**14·6. ভরকেন্দ্র : বস্তু-বিশেষের কণাসমূহের উপর সক্রিয় উহাদের ( কণাগুলির ) ভরের সমানুপাতিক একশ্রেণীর সমান্তরাল বলের যাহা কেন্দ্র, তাহাই ঐ বস্তুর ভরকেন্দ্র।**

আপাতদৃষ্টিতে ভরকেন্দ্র ও ভারকেন্দ্রের পার্থক্য ধরা পড়ে না। কিন্তু কার্যত এক হইলেও, যুক্তির দিক দিয়া উহারা এক ও অভিন্ন নহে। পরবর্তী অনুচ্ছেদে তাহাই আলোচনা করা হইতেছে।

**14·7. ভরকেন্দ্র ও ভারকেন্দ্র :** সাধারণত ভরকেন্দ্র ও ভারকেন্দ্রের কোন পার্থক্য ধরা পড়ে না। একটি বস্তুর মধ্যে যত কণা আছে, তাহাদের প্রত্যেকের উপর তাহাদের ভরের আনুপাতিক একশ্রেণীর সমান্তরাল বল সক্রিয় রহিয়াছে বলিয়া যদি কল্পনা করা যায়, তবে ঐ বলশ্রেণীর লব্ধি বস্তুটির একটি নির্দিষ্ট বিন্দুর মধ্য দিয়া যাইবে। উহাই উক্ত সমান্তরাল বলশ্রেণীর কেন্দ্র এবং বস্তুটির ভরকেন্দ্র। ভারকেন্দ্র বলিতেও, বস্তুবিশেষের কণাগুলির উপর সক্রিয় তাহাদের ভরের সমানুপাতিক অভিকর্ষজ বলসমূহের লব্ধির প্রয়োগ-বিন্দুই বুঝায়। কাজেই একই স্থানে বস্তুবিশেষের ভরকেন্দ্র ও ভারকেন্দ্র একই বিন্দু হইবেই।

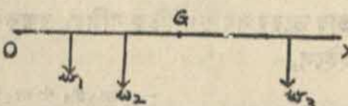
কিন্তু এমন স্থানও আছে যেখানে অভিকর্ষজ বল প্রায় নাই। সেখানে বস্তুর

ভারও থাকিবে না, ভারকেন্দ্রও থাকিবে না; কিন্তু ভরকেন্দ্র থাকিবে। দ্বিতীয়ত, অভিকর্ষজ বল পৃথিবীর সর্বত্র সমান নয়। একটি বর্গতলের উপর দণ্ডায়মান হিমালয়ের একটি সমসত্ত্ব স্তম্ভের ঠিক মাঝামাঝি একটি অনুভূমিক বর্গতল কল্পনা করিলে, ঐ বর্গের কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু হইতে স্তম্ভটির উপরে ও নিচে ভর নিখুঁতভাবে সমান হইবে। কাজেই উহার ঐ স্তম্ভটির ভরকেন্দ্র হইবে। কিন্তু ঐ ভরকেন্দ্রের উপরকার ভরের উপর অভিকর্ষজ বল নিচেকার ভরের উপর অভিকর্ষজ বল অপেক্ষা বেশ খানিকটা কম হইবে। কারণ দূরত্বের বর্গের সহিত অভিকর্ষজ বল ব্যস্ত সমানুপাতিক। সুতরাং, স্তম্ভটির ভারকেন্দ্র উহার ভরকেন্দ্র হইতে একটু নিচেই অবস্থিত হইবে।

স্পষ্টতই, তাহা হইলে, সূক্ষ্মবিচারে ভরকেন্দ্র ও ভারকেন্দ্র এক নয়। বাস্তব ক্ষেত্রে অবশ্য এত বিপুল বস্তুর বা অভিকর্ষজ বলের আওতার বাহিরে বস্তুর আলোচনা করা হয় না। সেইজন্য ভরকেন্দ্র ও ভারকেন্দ্র কার্যত এক ধরিলেও খুব একটা ভুল হয় না।

**14·8. বিশ্লেষণাত্মক পদ্ধতিতে ভারকেন্দ্র নির্ণয় (Analytical determination of centre of gravity):** নিচে বিশ্লেষণাত্মক পদ্ধতিতে কি-ভাবে ভারকেন্দ্র নির্ণয় করা যায়, তাহার বিবরণ দেওয়া হইতেছে।

(i) **একটি সরলরেখার বিভিন্ন বিন্দুতে অবস্থিত কয়েকটি ভারের ভারকেন্দ্র** (*Centre of gravity of a system of particles lying on a straight line*):



105নং চিত্র

$\overline{OX}$ সরল রেখায় $w_1, w_2, w_3, \cdots$ ইত্যাদি কয়েকটি বস্তুকণার ভার $O$ হইতে যথাক্রমে $x_1, x_2, x_3, \cdots$ প্রভৃতি দূরত্বে সক্রিয় রহিয়াছে। উহাদের ভারকেন্দ্র যদি ঐ রেখার $G$ বিন্দুতে অবস্থিত হয়, এবং $\overline{OG}$ দূরত্ব যদি $\bar{x}$ দ্বারা সূচিত হয়, তবে $O$ বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইয়া,

$$(w_1+w_2+w_3+\cdots).\bar{x}=w_1x_1+w_2x_2+w_3x_3+\cdots$$

$$\therefore \quad \bar{x}=\frac{w_1x_1+w_2x_2+w_3x_3+\cdots}{w_1+w_2+w_3+\cdots}=\frac{\Sigma wx}{\Sigma w}. \qquad \cdots \quad (1)$$

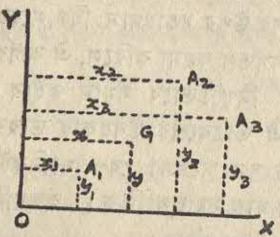
বস্তুকণাগুলির ভর $m_1, m_2, m_3, \cdots$ ইত্যাদি হইলে,

$$\bar{x}=\frac{\Sigma mx}{\Sigma m},$$ কারণ ভার, ভরের সমানুপাতিক।

(ii) **একই সমতলস্থিত বস্তুকণাসমূহের ভারকেন্দ্র** (*Centre of gravity of a system of particles lying on a plane*):

একটি সমতলে $w_1, w_2, w_3, \cdots$ ইত্যাদি ভারবিশিষ্ট কণা যথাক্রমে $A_1, A_2, A_3, \cdots$ ইত্যাদি বিন্দুতে অবস্থিত। ঐ সমতলে পরস্পর লম্বচ্ছেদী দুই রেখা $\overline{OX}$ ও $\overline{OY}$-কে

যথাক্রমে $x$ ও $y$ অক্ষ ধরিলে, $A_1$, $A_2$, $A_3$,$\cdots$ ইত্যাদি বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক হয় যথাক্রমে $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, $(x_3, y_3)$,$\cdots$ ইত্যাদি। কণাগুলির ভারকেন্দ্র যেন $G$ বিন্দু এবং $G$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক যেন $(\bar{x}, \bar{y})$, স্পষ্টতই $G$ বিন্দুতে কণাগুলির ভারের সমষ্টি, অর্থাৎ $w_1 + w_2 + w_3 + \cdots$ পরিমাণ ভার সক্রিয়।




106নং চিত্র

এখন, $\overline{OX}$ রেখাকে ঘুরাইয়া অনুভূমিক করিয়া লওয়া হইল। ইহাতে ভারকেন্দ্রের অবস্থান পরিবর্তিত হইবে না। এইবার $O$ বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইলে,

$$(w_1 + w_2 + w_3 + \cdots).\bar{x} = w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 + \cdots$$

$$\therefore \quad \bar{x} = \frac{w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 + \cdots}{w_1 + w_2 + w_3 + \cdots} = \frac{\Sigma wx}{\Sigma w} \qquad \cdots \quad 2(a)$$

আবার, তলটিকে এমনভাবে ঘুরানো হইল যে, $\overline{OY}$ রেখা অনুভূমিক হয়। ইহার পর $O$ বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইলে,

$$(w_1 + w_2 + w_3 + \cdots)\,\bar{y} = w_1y_1 + w_2y_2 + w_3y_3 + \cdots$$

$$\therefore \quad \bar{y} + \frac{w_1y_1 + w_2y_2 + w_3y_3 + \cdots}{w_1 + w_2 + w_3 + \cdots} + \frac{\Sigma wy}{\Sigma w} \qquad \cdots \quad 2(b)$$

ভার ভরের সমানুপাতিক বলিয়া, বস্তুকণাসমূহের ভর যথাক্রমে $m_1$, $m_2$, $m_3$,$\cdots$ ইত্যাদি হইলে,

$$\bar{x} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} = \frac{\Sigma mx}{\Sigma m}$$

এবং
$$\bar{y} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} = \frac{\Sigma my}{\Sigma m}.$$

কিন্তু বস্তুকণাসমূহ বিভিন্ন বিচ্ছিন্ন বিন্দুতে অবস্থিত না হইয়া, যদি একটি দৃঢ় বস্তুর বিভিন্ন বিন্দুতে অবিচ্ছিন্নভাবে বন্টিত হয় (continuously distributed), [ যেমন দণ্ড বা পাত-আকৃতির বস্তুর ক্ষেত্রে ], তাহা হইলে সমাকলন দ্বারা ঐসকল বস্তুর ভারকেন্দ্র নির্ণয় করা যায়। নিচে উহা আলোচনা করা হইল।

কোন বস্তুর কোন বিন্দুতে অবস্থিত একটি ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র বস্তুকণার ভর যদি $\delta m$ হয়, তবে (1) ও (2) নং সমীকরণ হইতে পাওয়া যায়,

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x.\delta m}{\Sigma \delta m} \qquad \cdots \quad (3)$$

এবং
$$\bar{x} = \frac{\Sigma x.\delta m}{\Sigma \delta m}, \quad \bar{y} = \frac{\Sigma y.\delta m}{\Sigma \delta m} \qquad \cdots \quad (4)$$

কলন গণিতের সমাকলনের প্রতীক অনুসারে, উপরোক্ত সমীকরণ-দুইটিকে লেখা যায়,

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dm}{\int dm} \quad \cdots \quad (5)$$

এবং $$\bar{x} = \frac{\int x\,dm}{\int dm},\ \bar{y} = \frac{\int y\,dm}{\int dm} \quad \cdots \quad (6)$$

যেখানে সমাকলন প্রক্রিয়াটি, যে-বস্তুটির ভারকেন্দ্র নির্ণয় করা হইবে, তাহার সমগ্র ভরের উপর প্রযুক্ত।

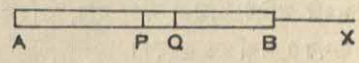
## 14·9. বিভিন্ন আকৃতির বস্তুর ভারকেন্দ্র নির্ণয় (Determination of centre of gravity of bodies of different shape) :

নিচে বিভিন্ন আকৃতির বস্তুর ভারকেন্দ্র নির্ণয়ের পদ্ধতি আলোচিত হইল।

(1) **একটি সরল ও সমসত্ত্ব দণ্ডের ভারকেন্দ্র** (*Centre of gravity of a straight uniform rod*) :

$AB$ সরল দণ্ডের দৈর্ঘ্য $l$ এবং $\overline{AX}$-কে যেন $x$-অক্ষ ধরা হইল।

এখন, $A$ বিন্দু হইতে যথাক্রমে $x$ ও $x+\delta x$ দূরে $P$ ও $Q$ যেন দুইটি সন্নিহিত বিন্দু। সুতরাং $\overline{PQ} = \delta x$. দণ্ডটির পদার্থের ঘনত্ব যেন $\rho$ এবং দণ্ডের সুষম প্রস্থচ্ছেদ যেন $a$. তাহা হইলে $P$ বিন্দুতে অবস্থিত অমিতক্ষুদ্র বস্তুকণার ভর $\delta m = a.\delta x.\rho$, যেখানে $a$ ও $\rho$ ধ্রুবক।



107নং চিত্র

$A$ বিন্দু হইতে দণ্ডটির ভারকেন্দ্রের দূরত্ব যেন $\bar{x}$ ; সুতরাং $A$ বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইলে,

$$\bar{x}.\Sigma\ a\ \delta x.\rho = \Sigma\ a\ \delta x \rho.x$$

বা, $$\bar{x}.\Sigma\delta x = \Sigma x.\delta x$$ ( উভয়পক্ষকে $a$, $\rho$ দ্বারা ভাগ করিয়া )

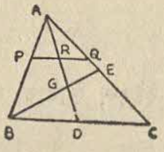
$\delta x \to 0$ হইলে, সীমান্তমান লইয়া,

$$\bar{x} = \frac{\int_0^l x\,dx}{\int_0^l dx} = \frac{\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^l}{\left[x\right]_0^l} = \tfrac{1}{2}l.$$

সমাকলনের সীমা 0 হইতে $l$ পর্যন্ত লওয়া হইয়াছে, কারণ সমগ্র দণ্ডটির ক্ষেত্রে $x$-এর মান 0 হইতে $l$ পর্যন্ত পরিবর্তিত হয়।

সুতরাং সমসত্ত্ব সরল দণ্ডের ভারকেন্দ্র উহার মধ্যবিন্দু।

(2) **ত্রিভুজাকৃতি সমসত্ত্ব পাতলা পাতের ভারকেন্দ্র (Centre of gravity of a thin uniform triangular lamina) :** $ABC$ যেন একটি ত্রিভুজাকৃতি সমসত্ত্ব পাতলা পাত। উহার ভূমি $\overline{BC}$-এর মধ্যবিন্দু $D$.




108নং চিত্র

এখন, সমগ্র পাতটিকে $\overline{BC}$ রেখার সমান্তরাল কতকগুলি সমসত্ত্ব ও সূক্ষ্ম দণ্ড দ্বারা গঠিত বলিয়া কল্পনা করা যায়। এইরূপ দণ্ডগুলির অন্যতম একটি $PQ$. $BC$ দণ্ডের ভারকেন্দ্র উহার মধ্যবিন্দু $D$. $A$ ও $D$ যুক্ত হইলে উহা যেন $PQ$ দণ্ডকে $R$ বিন্দুতে ছেদ করে। $\overline{PR}$ যেহেতু $BD$-এর সমান্তরাল সেইহেতু $\triangle ABD$ ও $\triangle APR$ সদৃশ।

$$\therefore \frac{\overline{PR}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AR}}{\overline{AD}} \qquad \cdots \qquad \cdots \quad \text{(i)}$$

অনুরূপভাবে, $\triangle ADC$ ও $\triangle ARQ$ সদৃশ বলিয়া, $\frac{\overline{RQ}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AR}}{\overline{AD}}$ $\qquad \cdots \quad$ (ii)

$\therefore \frac{\overline{PR}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{RQ}}{\overline{DC}}$. কিন্তু $\overline{BD} = \overline{DC}$. $\therefore \overline{PR} = \overline{RQ}$.

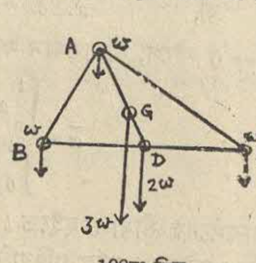
$\therefore$ $R$ বিন্দু $PQ$ দণ্ডের মধ্যবিন্দু, কাজেই উহার ভারকেন্দ্র। এইভাবে $BC$-র সমান্তরাল প্রত্যেকটি দণ্ডের ভারকেন্দ্র $\overline{AD}$ মধ্যমার উপর অবস্থিত।

আবার, পাতটিকে যদি $\overline{CA}$ বাহুর সমান্তরাল কতকগুলি সমসত্ত্ব ও সূক্ষ্ম দণ্ডের সমষ্টি বলিয়া কল্পনা করা যায়, তাহা হইলে সমগ্র পাতটির ভারকেন্দ্র $\overline{BE}$ মধ্যমার উপরও অবস্থিত হইবে।

অতএব, $\overline{AD}$ ও $\overline{BE}$-র সাধারণ বিন্দু যদি $G$ হয়, তবে সেই $G$ বিন্দুই পাতটির ভারকেন্দ্র। স্পষ্টতই $G$ মধ্যমাত্রয়ের ছেদবিন্দু।

সুতরাং, ত্রিভুজাকৃতি একটি সমসত্ত্ব পাতলা পাতের ভারকেন্দ্র ঐ ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের ছেদবিন্দু।

($2a$) **একটি ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষে স্থাপিত সমান তিনটি বস্তুকণার ভারকেন্দ্র (Centre of gravity of three equal particles placed at the vertices of a triangle) :** $ABC$ ত্রিভুজের প্রত্যেক শীর্ষে যেন একটি $w$-পরিমাণ ওজনের ভর স্থাপিত।




109নং চিত্র

$B$ ও $C$ বিন্দুস্থিত $w$ ও $w$ ওজন-দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল। সুতরাং তাহাদের লব্ধি $2w$ ভূমি $\overline{BC}$-র মধ্যবিন্দু $D$ দ্বারা সক্রিয়।

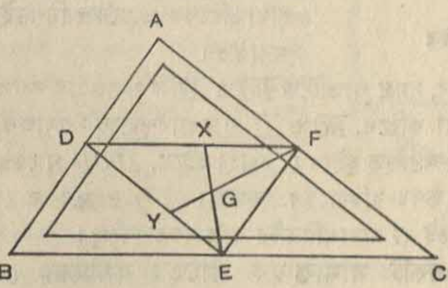
আবার, $A$ বিন্দুস্থিত $w$ এবং $D$ বিন্দুগামী $2w$ দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল। উহাদের লব্ধি $\overline{AD}$ রেখায়, ধরা যাক, $G$ বিন্দুতে সক্রিয়।

সুতরাং, $w.\overline{AG} = 2w.\overline{DG}$ ; $\therefore \quad \dfrac{\overline{DG}}{\overline{AG}} = \dfrac{w}{2w} = \dfrac{1}{2}$.

$\therefore$ $G$ বিন্দু মধ্যমাত্রয়ের ছেদবিন্দু, কাজেই ত্রিভুজটিরও ভারকেন্দ্র।

সুতরাং, নির্ণেয় ভারকেন্দ্র $G$.

(2b) **ত্রিভুজাকারে সজ্জিত সমসত্ত্ব সরল দণ্ডের ভারকেন্দ্র (Centre of gravity of three straight uniform rods forming a triangle)** : $AB$, $BC$ ও $CA$ এই তিনটি সমসত্ত্ব সরল দণ্ড $ABC$ ত্রিভুজের আকারে সজ্জিত। $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ ও $\overline{CA}$-র ভারকেন্দ্র যথাক্রমে তাহাদের মধ্যবিন্দু $D$, $E$ ও $F$. $D$ ও $E$, $E$ ও $F$ এবং $F$ ও $D$ যুক্ত হইল। $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ ও $\overline{CA}$ দণ্ড-তিনটির ভার তাহাদের দৈর্ঘ্যের আনুপাতিক। সুতরাং $D$ বিন্দুতে সক্রিয় $AB$-র ভার এবং $F$ বিন্দুতে সক্রিয় $AC$-ভারের লব্ধি যদি $\overline{DF}$ রেখার $X$ বিন্দু দিয়া যায়, তবে, $\overline{AB}.\overline{DX} = \overline{AC}.\overline{FX}$,




110নং চিত্র

অর্থাৎ, $\dfrac{\overline{DX}}{\overline{FX}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \dfrac{2DE}{2EF} = \dfrac{\overline{DE}}{\overline{FE}}$.

$\therefore$ $\overline{EX}$ রেখা $\angle DEF$-এর সমদ্বিখণ্ডক।

$\therefore$ $X$ বিন্দুতে $AB$ ও $AC$ দণ্ডের লব্ধি এবং $E$ বিন্দুতে $BC$ দণ্ডের ভারের লব্ধি নিশ্চয়ই $\overline{EX}$ রেখার কোন বিন্দুতে সক্রিয়।

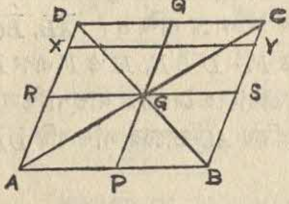
অনুরূপভাবে, $AB$ ও $BC$ দণ্ডের ভারের লব্ধি $\angle DFE$-এর সমদ্বিখণ্ডক $\overline{FY}$ ও $\overline{DE}$-র ছেদবিন্দু $Y$ বিন্দুতে সক্রিয় হইবে। সুতরাং $AB$ ও $BC$-র ভারের লব্ধি এবং $CA$-র ভারের লব্ধি $\overline{FY}$-এর কোন বিন্দুতে সক্রিয়।

অতএব, $AB$, $BC$ ও $CA$ দণ্ডের ভারের লব্ধি $\overline{EX}$ ও $\overline{FY}$ উভয় রেখার সাধারণ বা ছেদবিন্দু $G$ দিয়া যাইবে। ঐ বিন্দুই, তাহা হইলে, $AB$, $BC$ ও $CA$ দণ্ড-তিনটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ভারকেন্দ্র $G$. স্পষ্টতই $G$ বিন্দু $DEF$ ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্তের কেন্দ্র।

সুতরাং, **ত্রিভুজাকারে সজ্জিত সরল ও সমসত্ত্ব দণ্ডত্রয়ের ভারকেন্দ্র**

**উহাদের মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখা-তিনটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্তের কেন্দ্র।**

(3) **সমসত্ব সামান্তরিক পাতের ভারকেন্দ্র (Centre of gravity of a uniform lamina in the form of a parallelogram) ঃ** $ABCD$ যেন একটি সমসত্ব পাতলা পাত। পাতটি $\overline{AB}$ ও $\overline{CD}$-র সমান্তরাল কতকগুলি সরু ও সমসত্ব দণ্ডে গঠিত বলিয়া কল্পনা করা যায়। $XY$ যদি এইরূপ একটি দণ্ড হয়, তবে উহার মধ্যবিন্দুই উহার ভারকেন্দ্র। এখন, $\overline{AB}$ ও $\overline{CD}$-র মধ্যবিন্দু যথাক্রমে $P$ ও $Q$ যুক্ত করিলে, $\overline{AB}$ ও $\overline{CD}$-র সমান্তরাল $XY$ দণ্ডের ন্যায় প্রত্যেকটি দণ্ডের মধ্যবিন্দু $\overline{PQ}$ রেখার উপরই অবস্থিত হইবে। সুতরাং সমগ্র $ABCD$ সামান্তরিকের ভারকেন্দ্র নিশ্চয়ই $\overline{PQ}$ রেখার উপর অবস্থিত।



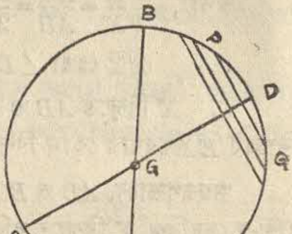
111নং চিত্র

অনুরূপভাবে, সমগ্র পাতটিকে $\overline{BC}$ ও $\overline{AD}$-র সমান্তরাল কতকগুলি সরু ও সমসত্ব দণ্ডে বিভক্ত কল্পনা করিলে, $\overline{BC}$ ও $\overline{AD}$-র মধ্যবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক $\overline{RS}$ রেখার উপরও পাতটির ভারকেন্দ্র অবস্থিত হইবে। তাহা হইলে, $ABCD$ পাতের ভারকেন্দ্র $\overline{PQ}$ ও ও $\overline{RS}$ উভয়েরই উপর রহিয়াছে। সুতরাং $\overline{PQ}$ ও $\overline{RS}$-এর ছেদবিন্দু $G$-ই সেই ভারকেন্দ্র। স্পষ্টতই $G$ সামান্তরিকটির কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু।

অতএব, **একটি সামান্তরিক পাতের কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দুই উহার ভারকেন্দ্র।**

(4) **বৃত্তাকার পাতের ভারকেন্দ্র (Centre of gravity of a uniform circular lamina) ঃ** $ADBC$ যেন একটি বৃত্তাকার সমসত্ব পাত। $\overline{AB}$ ও $\overline{CD}$ উহার দুইটি ব্যাস।

$\overline{AB}$-র উপর লম্ব $\overline{XY}$ একটি জ্যা। পাতটিকে $\overline{XY}$-এর সমান্তরাল জ্যা-সমূহের ন্যায় কতকগুলি দণ্ড দ্বারা গঠিত বলিয়া কল্পনা করা যায়। $XY$ দণ্ডের মধ্যবিন্দুই উহার ভারকেন্দ্র। $\overline{XY}$-এর সমান্তরাল অন্য সকল জ্যা-এর উপর লম্ব বলিয়া $\overline{AB}$ ব্যাসের উপর নিশ্চয়ই উহাদের মধ্যবিন্দুগুলি অবস্থিত। সুতরাং ঐ জ্যা-গুলির ভারকেন্দ্র-সমূহ, অর্থাৎ, সমগ্র পাতটিরই ভারকেন্দ্র $\overline{AB}$-র উপর অবস্থিত।



112নং চিত্র

অনুরূপভাবে, পাতটিকে যদি $\overline{CD}$-র উপর লম্ব-জ্যা $PQ$-র সমান্তরাল কতকগুলি দণ্ড দ্বারা গঠিত কল্পনা করা যায়, তবে পাতটির ভারকেন্দ্র $\overline{CD}$ ব্যাসের উপরও অবস্থিত হইবে।

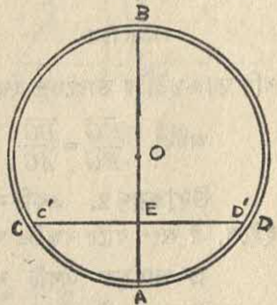
সুতরাং, বৃত্তাকার পাতটির ভারকেন্দ্র $\overline{AB}$ ও $\overline{CD}$ উভয় ব্যাসের উপরেই অবস্থিত। কাজেই উহাদের ছেদবিন্দু অর্থাৎ বৃত্তটির কেন্দ্রই ঐ পাতটির ভারকেন্দ্র।

**সুতরাং, বৃত্তাকার সমসত্ত্ব পাতের কেন্দ্রই উহার ভারকেন্দ্র।**

(4*a*) **সমসত্ত্ব পাতের বৃত্তাকার বলয়ের ভারকেন্দ্র (Centre of gravity of a uniform lamina in the form of a ring) :**

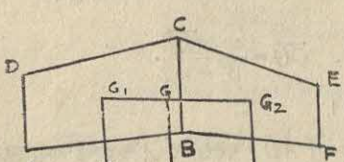
$ADBC$ যেন একটি ধাতুনির্মিত সমসত্ত্ব বলয়। $\overline{CD}$ উহার একটি জ্যা। $\overline{AB}$ এই $\overline{CD}$ জ্যা-এর লম্ব-দ্বিখণ্ডক ব্যাস। $\overline{CD}$ বরাবর বলয়টির অন্তর্বৃত্তের জ্যা-টি $C'D'$ হইলে, $DD' = CC'$.

বলয়টি সমসত্ত্ব বলিয়া, $CC'$ ও $DD'$-এর ভার সমান এবং সেই কারণে উহাদের লব্ধি $\overline{CD}$ জ্যা-এর মধ্যবিন্দু $E$-তে সক্রিয় হইবে। এইভাবে $\overline{CD}$-র সমান্তরাল অন্য জ্যা-গুলি বিবেচনা করিলে উহাদের মধ্যবিন্দুগুলি সমস্তই $\overline{AB}$ ব্যাসে অবস্থিত হইবে এবং এই ব্যাসের উভয় দিকে বলয়টির $\overline{DD'}$ ও $\overline{CC'}$-এর মতো প্রত্যেক জোড়া অংশের ভারকেন্দ্র $\overline{AB}$-র উপর থাকিবে। সুতরাং, সমগ্র বলয়টিরই ভারকেন্দ্র $\overline{AB}$-র উপর অবস্থিত হইবে। অনুরূপভাবে, অন্য যে-কোন ব্যাস লইয়া উপরিউক্ত পন্থায় দেখানো যায় যে, বলয়টির ভারকেন্দ্র উহার উপর অবস্থিত। অতএব, দুইটি ব্যাসের ছেদবিন্দু অর্থাৎ বলয়টির কেন্দ্রই উহার ভারকেন্দ্র।



113নং চিত্র

(5) **দুইটি বস্তুর ভারকেন্দ্র জানা থাকিলে, তাহাদের সমবেত ভারের ভারকেন্দ্র নির্ণয় :** দুইটি বস্তু $ABCD$ ও $BCEF$-এর ভারকেন্দ্র যেন যথাক্রমে $G_1$ ও $G_2$ এবং ভার যথাক্রমে $w_1$ ও $w_2$.



114নং চিত্র

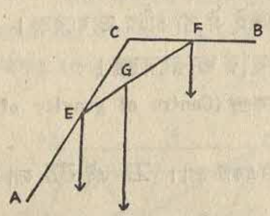
$G_1$ ও $G_2$ যুক্ত হইল।

$G_1$ ও $G_2$ বিন্দুতে যথাক্রমে $w_1$ ও $w_2$ ভার সক্রিয় বলিয়া ধরা যাইতে পারে। $w_1$ ও $w_2$ ভার-দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল। তাহাদের লব্ধি $\overline{G_1G_2}$ রেখার $G$ বিন্দুগামী হইলে, ঐ $G$ বিন্দু $w_1$ ও $w_2$-র সমবেত ভরের ভারকেন্দ্র এবং $w_1.\overline{GG_1} = w_2.\overline{GG_2}$.

$w_1$, $w_2$ ভার ও $\overline{G_1G_2}$ দৈর্ঘ্য জানা থাকায়, এই সমীকরণ দ্বারা সহজেই $G$ বিন্দুর অবস্থান বাহির করা যায়।

**বি. দ্র.।** উপরি-উক্ত পন্থায় দুইটি বস্তুর ভারকেন্দ্র ও তৃতীয় বস্তুর ভারকেন্দ্র লইয়া তিনটির ভারকেন্দ্র জানা যায়। তিনটির ভারকেন্দ্র ও চতুর্থ আর-একটি বস্তুর ভারকেন্দ্র জানা থাকিলে, সমবেতভাবে ঐ চারিটির ভারকেন্দ্র জানা যায়। এইভাবে যে-কোন-সংখ্যক বস্তুর ভারকেন্দ্র জানা থাকিলে, সমবেতভাবে উহাদের ভারকেন্দ্র নির্ণয় করা যায়।

**উদাহরণ 1.** $AB$ তারটি $C$ বিন্দুতে $ABC$ কোণে এমনভাবে বাঁকানো যে, $\overline{AC}$ ও $\overline{CB}$ সরল রেখা। তারটির ভারকেন্দ্র বাহির কর।



115নং চিত্র

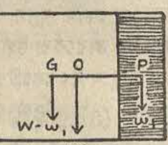
$\overline{AC}$ ও $\overline{CB}$ অংশের ভারকেন্দ্র যথাক্রমে $E$ ও $F$ হইলে, $E$ বিন্দু $\overline{AC}$-র এবং $F$ বিন্দু $\overline{CB}$-র মধ্যবিন্দু। $E$ ও $F$ যুক্ত হইল।

$\overline{AC}$ ও $\overline{CB}$ তারখণ্ড-দুইটির ভার তাহাদের দৈর্ঘ্যের আনুপাতিক। সুতরাং, $\overline{EF}$ রেখায় $G$ বিন্দু যদি তার-দুইটির ভারকেন্দ্র হয়, তবে $\overline{AC}.\overline{EG}=\overline{BC}.\overline{FG}$ ;

অথবা, $\dfrac{\overline{EG}}{\overline{FG}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$. ইহা হইতে $G$-র অবস্থান সূচিত হয়।

**উদাহরণ 2.** একটি সমগ্র বস্তুর ও উহার একটি অংশের ভার ও ভারকেন্দ্র প্রদত্ত হইলে, ঐ অংশ বাদে বস্তুটির অবশিষ্টাংশের ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর।

$W$-ভারযুক্ত একটি বস্তুর ভারকেন্দ্র $O$ এবং উহার $w_1$-ভারযুক্ত একটি অংশের ভারকেন্দ্র যেন $P$. এই অংশ বাদে বস্তুটির বাকী অংশের ভার $W-w_1$. এই $W-w_1$ ভারযুক্ত অংশের ভারকেন্দ্র নির্ণয় করিতে হইবে। $P$ ও $O$ যোগ করিয়া বর্ধিত করিলে, উহার উপর $G$ বিন্দুই যেন নির্ণেয় ভারকেন্দ্র। তাহা হইলে,



116নং চিত্র

$$(W-w_1).\overline{OG}=w_1.\overline{OP}\ ;\quad \therefore\quad \overline{OG}=\frac{w_1.\overline{OP}}{W-w_1}.$$

ইহা হইতে $G$ বিন্দুর অবস্থান পাওয়া যায়।

**উদাহরণ 3.** 8 ফুট লম্বা ও 8 পাউণ্ড ভারী $AB$ সমদণ্ডটির $A$ হইতে যথাক্রমে 1, 3, 6 ও 8 ফুট দূরে 3, 5, 7 ও 1 পাউণ্ড ভার যুক্ত আছে। উহাদের ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর।

দণ্ডটি ও উহার সহিত যুক্ত ভারসমূহের লব্ধি $=8+3+5+7+1$
$=24$ পাউণ্ড-ভার।

$A$ হইতে নির্ণেয় ভারকেন্দ্রের দূরত্ব যেন $x$ ফুট। দণ্ডটির ভার $A$ হইতে 4 ফুট দূরে সক্রিয়। $A$-র চারিদিকে ভ্রামক লইয়া,

$$24x=3\times1+5\times3+8\times4+7\times6+1\times8$$
$$=3+15+32+42+8=100.$$

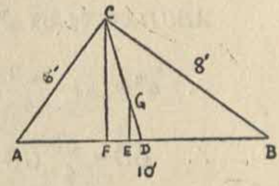
$\therefore\ x=\frac{100}{24}=\frac{25}{6}=4\frac{1}{6}$ ফুট।

$\therefore$ $A$ হইতে $4\frac{1}{6}$ ফুট দূরে নির্ণেয় ভারকেন্দ্র অবস্থিত।

## বিভিন্ন ক্ষেত্রে ভারকেন্দ্র বা ভরকেন্দ্র নির্ণয়

**উদাহরণ 1.** একটি ত্রিভুজাকৃতি পাতের বাহু-তিনটি যথাক্রমে 8, 6 ও 10 ফুট। উহার বৃহত্তম বাহু হইতে ভারকেন্দ্রের দূরত্ব নির্ণয় কর।

[ C. U. Matric. 1910 ]



117নং চিত্র

$ABC$ ত্রিভুজের $\overline{AB}=10$ ফুট, $\overline{BC}=8$ ফুট এবং $\overline{CA}=6$ ফুট। এখন $8^2+6^2=100=10^2$.
$\therefore$ $ABC$ একটি সমকোণী ত্রিভুজ। $C$ কোণ সমকোণ। $C$ হইতে মধ্যমা $\overline{CD}=\frac{1}{2}\overline{AB}=5$ ফুট। $\overline{CD}$ মধ্যমার উপর $G$ বিন্দু যেন ত্রিভুজটির ভারকেন্দ্র। তাহা হইলে, $\overline{GD}=\frac{1}{3}\overline{CD}=\frac{5}{3}$ ফুট।

$C$ হইতে $\overline{AB}$-র উপর $\overline{CF}$ লম্ব।

এখন $\triangle AFC$ ও $\triangle ACB$ সদৃশ।

$$\therefore\ \frac{\overline{CF}}{\overline{CA}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}},\ \text{অথবা}\ \overline{CF}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}\cdot\overline{CA}=\frac{8\times 6}{10}=\frac{24}{5}\ \text{ফুট।}$$

আবার, $\triangle CFD$, $\triangle GED$ সদৃশ বলিয়া,

$$\frac{\overline{GE}}{\overline{CF}}=\frac{\overline{GD}}{\overline{CD}}.$$

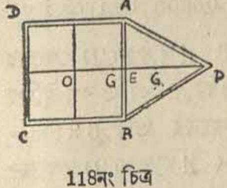
$$\therefore\ \overline{GE}=\frac{\overline{GD}}{\overline{CD}}\cdot\overline{CF}=\frac{1}{3}\cdot\frac{24}{5}=\frac{8}{5}=1\frac{3}{5}\ \text{ফুট।}$$

$\therefore$ বৃহত্তম বাহু হইতে ত্রিভুজাকৃতি পাতটির ভারকেন্দ্রের দূরত্ব $1\frac{3}{5}$ ফুট।

**উদাহরণ 2.** প্রত্যেকটি 4 ইঞ্চি লম্বা ছয়টি সমদণ্ড দ্বারা $PADCB$ ক্ষেত্রটি গঠিত। উহার মধ্যে $ABCD$ বর্গাকৃতি এবং $PAB$ বর্গক্ষেত্রটির বাহিরের দিকে একটি সমবাহু ত্রিভুজ। বর্গক্ষেত্রটির কেন্দ্র হইতে $PADCB$-এর ভরকেন্দ্রের দূরত্ব নির্ণয় কর।

[ W. B. S. F. 1952 ]

আমরা জানি, বর্গক্ষেত্রের ভরকেন্দ্র উহার বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু। উহাকেই বর্গের কেন্দ্র বলে। $ABCD$ বর্গক্ষেত্রের কেন্দ্র যেন $O$. $\triangle PAB$ সমবাহু বলিয়া $P$ হইতে $\overline{AB}$-র উপর $\overline{PE}$ মধ্যমা $\overline{AB}$-র উপর লম্ব।



118নং চিত্র

$\therefore$ এই মধ্যমা $O$ বিন্দুগামী।

$\triangle PAB$-র ভরকেন্দ্র যেন $\overline{PE}$ মধ্যমার $G_1$ বিন্দুতে অবস্থিত।

তাহা হইলে, $G_1E = \frac{1}{3}PE = \frac{1}{3}\sqrt{PA^2 - (\frac{1}{2}AB)^2}$

$$= \tfrac{1}{3}\sqrt{4^2 - 2^2} = \tfrac{1}{3}\sqrt{12} = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ ইঞ্চি।}$$

$PADCB$ ক্ষেত্রের ভরকেন্দ্র যেন $\overline{G_1O}$ রেখায় $G$ বিন্দুতে অবস্থিত।.

$ABCD$ ক্ষেত্রের ভর $a^2w$ হইলে, $PAD$ ত্রিভুজের ভর $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2w.$

$$\therefore \quad a^2w\,\overline{OG} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2w.\overline{GG_1}.$$

$$\therefore \quad \overline{OG} = \frac{\sqrt{3}}{4}\overline{GG_1} = \frac{\sqrt{3}}{4}(\overline{G_1E} + \overline{EG})$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}(2/\sqrt{3} + \overline{OE} - \overline{OG}) = \frac{\sqrt{3}}{4}(2/\sqrt{3} + 2 - \overline{OG}).$$

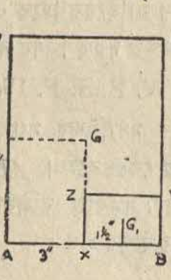
$$\therefore \quad \overline{OG}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2};$$

$$\therefore \quad \overline{OG} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \times \frac{4}{4+\sqrt{3}} = \frac{2+2\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}} = \frac{(2+2\sqrt{3})(4-\sqrt{3})}{16-3}$$

$$= \frac{2+6\sqrt{3}}{13} = \frac{2+6\times1{\cdot}732}{13} = \frac{2+10{\cdot}392}{13} = \frac{12{\cdot}392}{13} = {\cdot}95 \text{ ইঞ্চি।}$$

$\therefore$ $ABCD$ বর্গের কেন্দ্র হইতে $PADCB$ ক্ষেত্রের ভরকেন্দ্র ·95 ইঞ্চি দূরে অবস্থিত।

**উদাহরণ 3.** (i) $ABCD$ একটি আয়তাকার শক্ত মলাটের কাগজ। উহার $\overline{AB}$ বাহু = 6 ইঞ্চি, $\overline{AD}$ বাহু = 8 ইঞ্চি এবং $\overline{AB}$ বাহুর মধ্যবিন্দু $X$. $\overline{BC}$-বাহুর উপর $Y$ এমন একটি বিন্দু, যেন $\overline{BY}$ = 2 ইঞ্চি। $ABCD$ হইতে $BYZX$ আয়তটি কাটিয়া বাদ দেওয়া হইল। $\overline{AB}$ ও $\overline{AD}$ হইতে অবশিষ্ট অংশের ভারকেন্দ্রের দূরত্ব নির্ণয় কর।




119নং চিত্র

(ii) উপরের উদাহরণে, কাটা অংশ বাদে বাকী অংশটি $AX$-কে অনুভূমিক তলে রাখিলে, উল্লম্বভাবে স্থির থাকিবে কি? [ London University ]

(i) $ABCD$, $BXZY$ এবং $AXZYCD$ ক্ষেত্রের ভারকেন্দ্র যথাক্রমে যেন $G$, $G_1$ ও $G_2$. প্রতি বর্গ-ইঞ্চির ভার $w$ পাউণ্ড ধরিলে $ABCD$ ক্ষেত্রের ভার $6\times8w = 48w$ পা., $BXZY$ ক্ষেত্রের ভার $3\times2w = 6w$ পাউণ্ড এবং $AXZYCD$ ক্ষেত্রের ভার $(48-6)w = 42w$ পাউণ্ড। $\overline{AB}$ বাহু হইতে $G$ এবং $G_1$ বিন্দুর দূরত্ব

যথাক্রমে 4 ইঞ্চি ও 1 ইঞ্চি। ধর, $\overline{AB}$ ও $\overline{AD}$ হইতে $G_2$ বিন্দুর দূরত্ব যথাক্রমে $x$ ও $y$. $\overline{AB}$ বাহুকে উল্লম্বভাবে স্থাপন করিলে উল্লিখিত ক্ষেত্রগুলির ভার $\overline{AB}$-র সমান্তরাল হইবে। তখন $B$ বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইলে,

$$48w \times 4 = 6w \times 1 + 42wx,$$

অথবা, $186w = 42wx$, অথবা, $x = \frac{186}{42} = 4\frac{3}{7}$ ইঞ্চি।

$\therefore$ $\overline{AB}$ হইতে $G_2$ বিন্দুর দূরত্ব $4\frac{3}{7}$ ইঞ্চি।

আবার, $\overline{AD}$ হইতে $G$ ও $G_1$ বিন্দুর দূরত্ব যথাক্রমে 3 ইঞ্চি ও $4\frac{1}{2}$ ইঞ্চি।

$\overline{AD}$-কে উল্লম্ব রেখায় রাখিয়া $A$ বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইলে,

$$48w \times 3 = 6w \times \tfrac{9}{2} + 42wy,$$

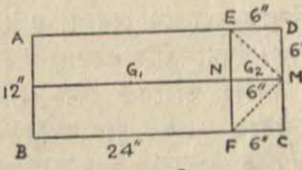
অথবা, $144 - 27 = 42y$ ; $\therefore$ $y = \frac{117}{42} = 2\frac{11}{14}$ ইঞ্চি।

$\therefore$ $BXZY$ ক্ষেত্র বাদে $ABCD$ ক্ষেত্রের ভারকেন্দ্র $\overline{AB}$ ও $\overline{AD}$ হইতে যথাক্রমে $4\frac{3}{7}$ ও $2\frac{11}{14}$ ইঞ্চি দূরে অবস্থিত।

(ii) $AX$ যদি অনুভূমিক থাকে, তবে বাকী অংশের ভারকেন্দ্র $G_2$ হইতে উল্লম্ব রেখা উহার ভিতর দিয়া যায়। কারণ $AX = 3$ ইঞ্চি, কিন্তু $AD$ হইতে $G_2$-গামী উল্লম্ব রেখার দূরত্ব $2\frac{11}{14}$ ইঞ্চি। কাজেই এই অবস্থানে ক্ষেত্রটি স্থির থাকিবে।

**উদাহরণ 4.** $ABCD$ এমন একটি আয়তক্ষেত্র যে, $\overline{AB} = 12$ ইঞ্চি এবং $\overline{BC} = 30$ ইঞ্চি। $M$ বিন্দু $\overline{CD}$-র মধ্যবিন্দু। $C$ ও $D$ কোণ মুড়িয়া $N$ বিন্দুতে মিলিত করা হইল। এইরূপে $ABFME$ ক্ষেত্র উৎপন্ন হইল। $ABFE$ ক্ষেত্রের ভারকেন্দ্র হইতে এই নূতন ক্ষেত্রের ভারকেন্দ্রের দূরত্ব নির্ণয় কর।

প্রতি বর্গ-ইঞ্চি ক্ষেত্রের ওজন যেন $w$ পাউণ্ড। $\overline{MN}$ রেখা স্পষ্টতই $ABFE$ আয়তের ভারকেন্দ্র $G_1$ দিয়া যাইবে। $EFCD$ ক্ষেত্রের $C$ ও $D$ কোণ মুড়িবার পর $MEF$ ত্রিভুজের সৃষ্টি হইল। ইহার ভারকেন্দ্র $G_2$-ও $\overline{MN}$ রেখায় অবস্থিত।



120নং চিত্র

$\therefore$ $\overline{G_2N} = \frac{1}{3}\overline{MN} = \frac{1}{3} \times 6 = 2$ ইঞ্চি।

$\overline{G_1N} = \frac{1}{2} \times 24 = 12$ ইঞ্চি।

$\overline{G_1G_2} = 12 + 2 = 14$ ইঞ্চি।

এখন, $ABFME$ ক্ষেত্রের ভারকেন্দ্র যেন $\overline{G_1G_2}$ রেখার উপর $G_1$ বিন্দু হইতে $x$ ইঞ্চি দূরে অবস্থিত $G$ বিন্দু। $\triangle EFM$-এর ভার $= EFCD$ আয়তের ভার $= 6 \times 12w = 72w$ পাউণ্ড এবং $ABFE$ ক্ষেত্রের ভার $= 12 \times 24w$ পাউণ্ড।

$\overline{G_1G} = x$ ইঞ্চি হইলে, $\overline{G_2G} = (14 - x)$ ইঞ্চি।

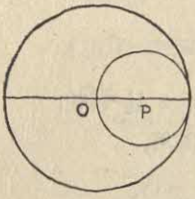
$\therefore$ $12 \times 24wx = 72w\,(14 - x)$,

অথবা, $4x = 14 - x$,

অথবা, $5x = 14$ ; $\therefore$ $x = \frac{14}{5}$ ইঞ্চি $= 2\frac{4}{5}$ ইঞ্চি।

**উদাহরণ 5.** $r$ ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তাকার পাত হইতে $r$-ব্যাসযুক্ত একটি বৃত্তাকার অংশ বাদ দেওয়া হইল। অবশিষ্ট অংশের ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর।

[ U. P. B. 1942 ]




121নং চিত্র

পাতটির ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$ বর্গ-একক এবং কাটিয়া বাদ-দেওয়া অংশের ক্ষেত্রফল $= \pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{\pi r^2}{4}$ বর্গ-একক। পাতের কেন্দ্র $O$ এবং কাটা অংশের বৃত্তটির কেন্দ্র যেন $P$. $O$ হইতে $\overline{PO}$ রেখায় নির্ণেয় ভারকেন্দ্র $G$ যেন $x$-একক দূরে। প্রতি বর্গ-একক ক্ষেত্রের ওজন যেন $w$ পাউণ্ড।

তাহা হইলে $\frac{\pi r^2}{4}$ পরিমাণ ক্ষেত্র বাদ যাওয়ার পর বাকী অংশের ক্ষেত্রফল $= \pi r^2 - \frac{\pi r^2}{4} = \frac{3}{4}\pi r^2$ বর্গ-একক।

$\therefore\ \frac{3}{4}\pi r^2 w \times x = \frac{1}{4}\pi r^2 w \times \overline{PO},$

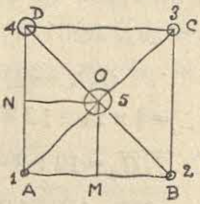
অর্থাৎ, $\frac{3}{4}x = \frac{1}{4}\overline{PO}$ ; অথবা, $3x = \overline{PO} = \frac{r}{2}$; $\therefore\ x = \frac{r}{6}$.

$\therefore$ পাতটির কেন্দ্র হইতে উহার ব্যাসার্ধের $\frac{1}{6}$ অংশ দূরে নির্ণেয় ভারকেন্দ্র অবস্থিত।

**উদাহরণ 6.** একটি বর্গক্ষেত্রের শীর্ষ-চারিটি ও উহার কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দুতে যথাক্রমে 1, 2, 3, 4 ও 5 পাউণ্ডের ভর স্থাপিত। উহাদের ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর।

[ C. U. I.Sc. 1950 ]

$ABCD$ বর্গক্ষেত্রের শীর্ষবিন্দু $A$, $B$, $C$ ও $D$ এবং উহার কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু $O$ বিন্দুতে যথাক্রমে যেন 1, 2, 3, 4 ও 5 পাউণ্ড-ভর স্থাপিত। বর্গক্ষেত্রটির প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য যেন $a$-একক এবং নির্ণেয় ভারকেন্দ্র যেন $\overline{AD}$ হইতে $x$-একক এবং $\overline{AB}$ হইতে $y$-একক দূরে অবস্থিত। $O$ হইতে $\overline{AB}$-র উপর $\overline{OM}$ এবং $\overline{AD}$-র উপর $\overline{ON}$ লম্ব।




122নং চিত্র

স্পষ্টতই $\overline{ON} = \overline{AM} = \frac{1}{2}a$ এবং $\overline{OM} = \overline{AN} = \frac{1}{2}a$.

ভারগুলির লব্ধি $= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ পাউণ্ড।

$\overline{AB}$-কে অনুভূমিক ধরিয়া $A$ বিন্দুর চারিদিকে ভারগুলির ভ্রামক লইলে,

$$15x = 1 \times 0 + 2a + 3a + 4 \times 0 + 5 \times \tfrac{1}{2}a$$
$$= 5a + \tfrac{5}{2}a = \tfrac{15}{2}a\ ;$$

$$\therefore\ x = \frac{15}{2 \times 15}a = \tfrac{1}{2}a.$$

আবার, $\overline{AD}$-কে অনুভূমিক রেখায় রাখিয়া $A$ বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইলে,

$$15y = 1 \times 0 + 2 \times 0 + 3a + 4a + 5 \times \tfrac{1}{2}a$$

$$= 7a + \frac{5}{2}a = \frac{19}{2}a;$$

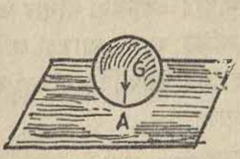
$$\therefore \quad y = \frac{19}{2 \times 15}a = \frac{19}{30}a.$$

$\therefore$ $\overline{AB}$ ও $\overline{AD}$-কে অক্ষদ্বয় ধরিলে নির্ণেয় ভারকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(\frac{1}{2}a, \frac{19}{30}a)$, যেখানে $a$ প্রদত্ত বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য।

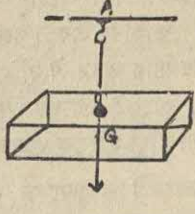
## ভারকেন্দ্রের ধর্ম ( Properties of Centre of Gravity ) : সুস্থিত, দুস্থিত ও উদাসীন স্থিতি ( Stable, Unstable and Neutral Equilibrium )

**14·10. অভিকর্ষজ বল ব্যতীত অন্য কোন বলের অধীন নয়, এমন একটি বস্তুকে যদি একটি বিন্দুতে স্থিরভাবে ধারণ করা যায়, তবে ঐ বিন্দু ও বস্তুটির ভারকেন্দ্র একই উল্লম্ব রেখায় থাকিবে।**

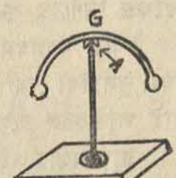
বস্তুটির ভারকেন্দ্র $G$. উহাকে $A$ বিন্দুতে স্থিরভাবে ধারণ করা হইয়াছে। তাহা হইলে বস্তুটির উপর (i) $G$ বিন্দুতে উহার ভার উল্লম্বভাবে নিচুদিকে এবং (ii) $A$ বিন্দুতে ভারের প্রতিক্রিয়া সক্রিয়।




123(a)নং চিত্র




123(b)নং চিত্র

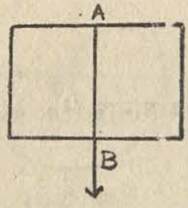



123(c)নং চিত্র

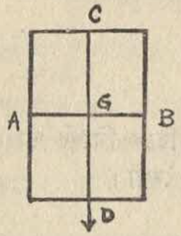
যেহেতু এই দুইটি বল সাম্যাবস্থায় রহিয়াছে, সেইহেতু তাহারা সমান, সমরেখ ও বিপরীতমুখী। সুতরাং $G$ ও $A$ একই উল্লম্বরেখায় অবস্থিত।

দ্রষ্টব্য : এখানে উল্লেখযোগ্য এই যে, একটি তলের উপর একটিমাত্র বিন্দুতে স্থাপিত ( $a$ চিত্র ) অথবা একটি বিন্দুতে ঝুলানো ( $b$ চিত্র ) অথবা একটি বিন্দুতে ঘূর্ণনক্ষম অবস্থায় স্থাপিত ( $c$ চিত্র ) বস্তুর ক্ষেত্রেই উপরের সূত্রটি প্রযোজ্য।

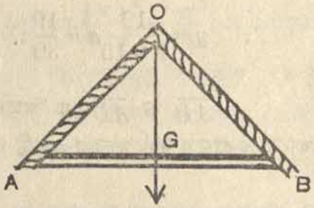
**14·11. পরীক্ষা দ্বারা সমসত্ত্ব পাত ও দণ্ডাদির ভার-কেন্দ্র নির্ণয় :** 14·9 অনুচ্ছেদে বর্ণিত সূত্রটির প্রয়োগে আমরা পরীক্ষা দ্বারা সমসত্ত্ব পাত ও দণ্ডের ভারকেন্দ্র অতি সহজে নির্ণয় করিতে পারি।




124(*a*)নং চিত্র




124(*b*)নং চিত্র




124(*c*)নং চিত্র

(i) একটি পাতকে একটি বিন্দু হইতে উল্লম্বভাবে ঝুলাইয়া পাতের উপর ঐ বিন্দু হইতে একটি উল্লম্বরেখা আঁকিতে হয়। আবার পাতটিকে ঘুরাইয়া ঝুলাইয়া দিলে, উহার উপর আর একটি উল্লম্বরেখা পাওয়া যায়। আমরা জানি, এই উভয় রেখার উপরই পাতটির ভারকেন্দ্র থাকিবে। কাজেই তাহাদের ছেদবিন্দুই পাতটির ভারকেন্দ্র নির্দেশ করিবে।

(ii) একটি সমসত্ত্ব দণ্ডের বেলায়, দণ্ডটিকে উভয় প্রান্তে একখণ্ড শক্ত, মসৃণ ও হালকা দড়ির দুই মাথায় আটকাইয়া ঝুলাইয়া দিতে হয়। দড়িটির যে-বিন্দুতে ধরিলে এই দণ্ডটি স্থস্থিত হয়, সেই বিন্দু হইতে উল্লম্বরেখাটি দণ্ডটিকে যে-বিন্দুতে ছেদ করে, উহাই তাহার ভারকেন্দ্র। দেখা যায়, এই ভারকেন্দ্র দণ্ডটির মধ্যবিন্দু।

**14·12. ওলন-দড়ি* (Plumb-line) :** পূর্ব অনুচ্ছেদে দেখা গেল ভারকেন্দ্র নির্ণয়ের সময় উল্লম্বরেখা টানা প্রয়োজন হয়। এইজন্য রাজমিস্ত্রীরা একটি সহজ উপায় অবলম্বন করে। তাহারা একটা সরু দড়ির মাথায় একটুকরা সীসার ভার বাঁধিয়া ঝুলাইয়া দেয়। সীসার ভার তখন ঐ দড়ি বরাবর সক্রিয় হয়। আমরা জানি, উহাই অভিকর্ষজ বলের দিক্, কাজেই ভারের দিক্। উহাকেই উল্লম্ব দিক্ বলিয়া ধরা হয়। রাজমিস্ত্রীর এইরূপ সীসা-বাঁধা দড়িকে **ওলন-দড়ি** বলে।

**14·13. কোন ভারী বস্তুকে যদি উহার ভারকেন্দ্রে ধারণ করা যায়, তবে উহা সকল অবস্থানেই সাম্যাবস্থায় থাকিবে :**

একটি বস্তু যদি তাহার ভারকেন্দ্রে ধৃত হয়, তবে—

(i) প্রথমত, বস্তুটির ভার উহার ধারণ-বিন্দুকে কোনদিকে সরাইতে পারিবে না।

* ল্যাটিন ভাষায় Plumbum শব্দের অর্থ সীসা। সুতরাং সীসা-বাঁধা দড়ি অর্থে Plumb-line কথাটির সৃষ্টি হইয়াছে।

কেননা, উহা বস্তুটির ভারকেন্দ্রের সহিত মিলিত। ভারকেন্দ্র যেহেতু বস্তুটির মধ্যে নির্দিষ্ট, ঐ ধারণ-বিন্দুর অবস্থানও সেইজন্য অনড় এবং সেই কারণে বস্তুটির ভার সর্বদা ঐ বিন্দু দিয়া যাইবেই।

(ii) দ্বিতীয়ত, বস্তুটির ভারকেন্দ্রের চারিদিকে উহার ভারের ভ্রামক শূন্য। কাজেই ঐ ধারণ-বিন্দুর চারিদিকেও বস্তুটির ভারের ভ্রামক শূন্য। সুতরাং ঐ বিন্দুর চারিদিকে বস্তুটির ভার নড়াচড়া করিতে পারে না।

অতএব, বস্তুমাত্রই উহার ভারকেন্দ্রে ধৃত হইলে, সকল অবস্থানে স্থির থাকিবে।

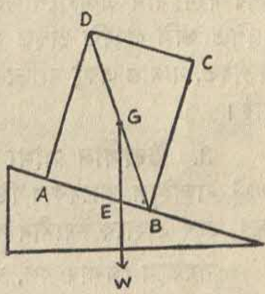
এইজন্য বস্তুর ভারকেন্দ্রকে অনেক সময় উহার **তৌল-বিন্দু** (Balancing point) বলা হয়।

**14·14. কোন সমতলের উপর বস্তু-বিশেষের স্থিতি-বিচার :** এইবার আমরা একটা সমতলের উপর বস্তু-বিশেষ কখন স্থির থাকিবে, কখনই বা থাকিবে না, তাহার বিচার করিব। তাহার জন্য একটি সংজ্ঞা জানা প্রয়োজন। নিচে সেই সংজ্ঞাটি দেওয়া হইল :

**ভূমি (*Base*) : কোন বস্তু যদি একটি তলের উপর অবস্থিত থাকে, তবে তাহার যে-অংশটুকু তলটির সহিত লাগিয়া থাকে, সেই পরিমাণ স্থান বা তলকে (*area*) বস্তুটির ভূমি (*Base*) বলে।**

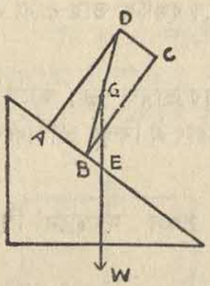
**14·15. কোন বস্তুকে যদি একটি তলের উপর রাখা যায়, তবে বস্তুটির ভারকেন্দ্র হইতে নিচুদিকে উল্লম্ব-রেখাটি ঐ বস্তুর ভূমির কোন-না-কোন বিন্দু দিয়া গেলেই মাত্র উহা ঐ তলের উপর স্থির থাকিবে; নচেৎ উহা উল্টাইয়া পড়িয়া যাইবে।**

(i) *ABCD* বস্তুটি একটি তলের উপর এমনভাবে রহিয়াছে যে, উহার ভারকেন্দ্র *G* হইতে অঙ্কিত উল্লম্বরেখাটি উহার ভূমির $\overline{AB}$ রেখাকে *E* বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। (*a*)-চিত্র যেন বস্তুটির অবস্থান সূচিত করে। এখন, $\overline{GE}$ রেখায় বস্তুটির ভার সক্রিয়। *B* বিন্দুর চারিদিকে এই ভারের ভ্রামক আছে এবং সেই ভ্রামক বস্তুটির *E* হইতে যে-পাশে *A*, সেই পাশের সমস্ত অংশটিকে নিচুদিকে ঘুরাইতে সচেষ্ট। কিন্তু তলটির প্রতিক্রিয়া এই ঘূর্ণনপ্রয়াসকে রোধ করিতেছে। সুতরাং বস্তুটির উপর অন্যতর



125(*a*)নং চিত্র

বলের ক্রিয়া নাই বলিয়া, উহা ঐ তলের উপর স্থির থাকিবে। বস্তুটিকে যদি একদিকে একটু তুলিয়া ছাড়িয়া দেওয়া যায়, তবে উহার ভার বস্তুটিকে আবার পূর্বের অবস্থানে ফিরাইয়া আনিবে।



125(b)নং চিত্র

বলা বাহুল্য, তলের প্রতিক্রিয়া থাকিলেই ইহা সম্ভব।

(ii) অপরপক্ষে, *ABCD* বস্তুটিকে যদি কোন তলের উপর (*b*)-চিত্রের ন্যায় এমনভাবে রাখা হয় যে, উহার ভারকেন্দ্র হইতে উল্লম্বরেখাটি ভূমির বাহিরের তলটির *E* বিন্দুতে স্পর্শ করে, তবে বস্তুটি উল্টাইয়া পড়িবে।

কারণ, *B* বিন্দুর চারিদিকে বস্তুটির ভারের ভ্রামক যে ঘূর্ণন সৃষ্টি করিবে, তাহাকে রোধ করার জন্য তলটির কোন প্রতিক্রিয়া নাই। ফলে বস্তুটির ভূমি উপর দিকে উঠিতে থাকিবে এবং সেই কারণে উহা হেলিয়া পড়িয়া যাইবে।

**14·16. তিনপ্রকার সাম্যাবস্থা:** সাম্যাবস্থা তিন প্রকারের: সুস্থিত, দুস্থিত ও উদাসীন।

1. **সুস্থিত সাম্য** (*Stable Equilibrium*): **কোন স্থিরবস্তুকে সামান্য একটু নাড়াইবামাত্র যদি উহা আগেকার স্থির অবস্থানে ফিরিয়া আসে, তবে ঐ বস্তুকে সুস্থিত বা সুপ্রতিষ্ঠ সাম্যে রহিয়াছে বলা হয়।** উদাহরণস্বরূপ, সাধারণ তুলাযন্ত্র এবং মেঝের উপর একটি কড়াই সুস্থিত সাম্যাবস্থায় থাকে। একটু নাড়াইবামাত্র তাহারা এদিক-ওদিক একটু দুলিয়া, আবার আগের অবস্থায় ফিরিয়া আসে।

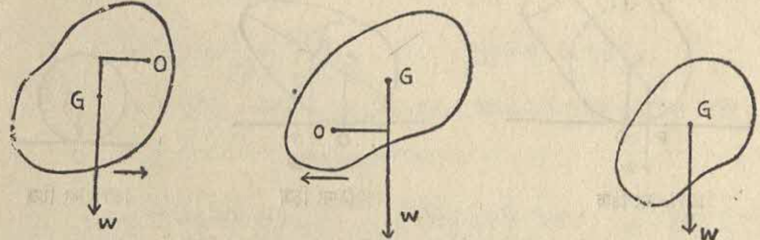
2. **দুস্থিত সাম্য** (*Unstable Equilibrium*): **কোন বস্তুকে সামান্য একটু নাড়াইলেই যদি স্থির অবস্থান হইতে ক্রমাগত দূরে সরিয়া যাইতে চায়, তবে তাহার স্থিতিকে দুস্থিত বা অপ্রতিষ্ঠ সাম্য বলা হয়।** টেবিলের উপর দণ্ডায়মান একটি পেন্সিল, রুদ্ধগতি সাইকেলের উপর মানুষ, বাটির উল্টা-পিঠে স্থাপিত গুলি প্রভৃতি দুস্থিত সাম্যের উদাহরণ। এইরূপ সাম্য লাভ করা কষ্টসাধ্য। দ্বিতীয়ত, সামান্য একটু নাড়িলেই উহা সেই সাম্যের অবস্থান হইতে অনেক দূরে সরিয়া যায়।

3. **উদাসীন সাম্য** (*Neutral Equilibrium*): কোন বস্তু যদি সামান্য একটু নাড়াইলে আগেকার স্থির অবস্থান হইতে নড়িয়া নূতনতর স্থির অবস্থান গ্রহণ করে, তবে তাহাকে উদাসীন সাম্যে অবস্থিত বলা হয়।

সমতলে খেলার বল, কব্‌জার উপর জানালা বা দরজা, মাটির উপর রোলার (উহার বক্রতলের উপর স্থাপিত) প্রভৃতি উদাসীন সাম্যের উদাহরণ। এইগুলিকে একটু নাড়িলে নূতন অবস্থান গ্রহণ করে এবং সেই নূতন অবস্থানে সাম্য লাভ করে।

শঙ্কু (cone)-কে তিনপ্রকার সাম্যাবস্থারই সাধারণ উদাহরণ বলা চলে। উহা যখন উহার সমতলভূমির উপর অবস্থিত, তখন উহার সুস্থিত সাম্যাবস্থা ; শীর্ষের উপর যদি উহাকে দাঁড় করানো যায়, তবে উহা তাহার দুস্থিত সাম্যের অবস্থা ; এবং যখন উহা বক্রতলের উপর অবস্থিত, তখন উহার উদাসীন সাম্যের অবস্থা।

**14·17. একটি বিন্দুতে টাঙানো বস্তুর সাম্যাবস্থা-বিচার :** $O$ বিন্দুর চারিদিকে অবাধে ঘুরিতে পারে এমন একটি ভারী বস্তুর ভারকেন্দ্র যদি $G$ হয়, তবে $G$ বিন্দু $O$ বিন্দুর উল্লম্বদিকে (i) নিচে থাকিলে, বস্তুটি সুস্থিত




126(*a*)নং চিত্র 126(*b*)নং চিত্র 126(*c*)নং চিত্র

সাম্যে এবং (ii) উপরে থাকিলে, দুস্থিত সাম্যে থাকিবে এবং (iii) $G$ বিন্দুর সহিত $O$ বিন্দু মিলিত হইলে, উহা উদাসীন সাম্যে থাকিবে।

(*a*)-চিত্রে $G$ বিন্দু $O$ বিন্দুর নিচে, কিন্তু ঠিক উল্লম্বরেখায় নাই। কাজেই $G$ বিন্দুতে বস্তুটির ভার $O$ বিন্দুর চারিদিকে যে-ভ্রামক উৎপন্ন করিবে, তাহার টানে বস্তুটির $G$ সরিয়া $O$ বিন্দুর নিচে উল্লম্বরেখায় সুস্থিত হইবে।

(*b*)-চিত্রে $G$ বিন্দু $O$ বিন্দুর উপরে। ছাড়িয়া দিলেই উহা $O$ বিন্দুর চারিদিকে নিজ ভারের ভ্রামক দ্বারা ঘুরিয়া ঐ বিন্দুর ঠিক নিচে উল্লম্বরেখায় স্থির হইবে। সুতরাং, উহা দুস্থিত সাম্যে আছে।

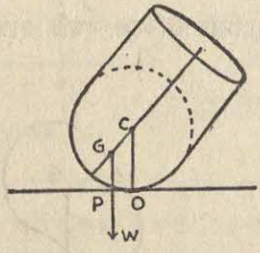
(*c*)-চিত্রে $G$ বিন্দুতেই বস্তুটি ধৃত বলিয়া, বস্তুটিকে যেমন খুশী অবস্থানে স্থির রাখা যায়। কাজেই, উহা উদাসীন সাম্যে অবস্থিত।

**14·18. সমতলে স্থাপিত বস্তুর স্থিতি-বিচার :** তলার অংশটুকু উত্তল এমন একটি ঘনবস্তুকে কোন সমতলে স্থাপন করিলে দেখা যায় যে, উহার স্পর্শবিন্দুতে সমতলের প্রতিক্রিয়া, ঐ বস্তুর উত্তল ভাগ যে-গোলকের অংশ, তাহার কেন্দ্র দিয়া যায়। বস্তুটির ভারকেন্দ্র এই গোলকের কেন্দ্রের উল্লম্বদিকে, (i) যদি নিচে থাকে, তবে উহা সুস্থিত সাম্যে, (ii) যদি উপরে থাকে, তবে উহা দুস্থিত সাম্যে এবং (iii) ভারকেন্দ্র ও কেন্দ্র একই বিন্দু হইলে, বস্তুটি উদাসীন সাম্যে থাকে।

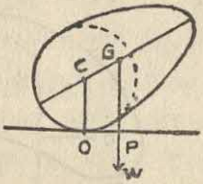
(*a*)-চিত্রে বস্তুর ভারকেন্দ্র উল্লিখিত গোলকের কেন্দ্র $C$ হইতে নিচে থাকায়,

$C$ বিন্দুর চারিদিকে বস্তুর ভার যে-ভ্রামক উৎপন্ন করে, তাহার টানে বস্তুটি সমতলে সুস্থিত হয়।

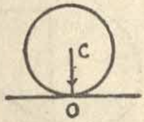
(*b*)-চিত্রে ভারকেন্দ্র $G$ গোলকের কেন্দ্র $C$-র উপরে থাকায়, বস্তুর ভার $C$ বিন্দুর চারিদিকে যে-ভ্রামক উৎপন্ন করে, তাহার টানে বস্তুটি সমতলে শুইয়া পড়ে ; কাজেই বস্তুটির সাম্য এখানে দুস্থিত।



127(*a*)নং চিত্র



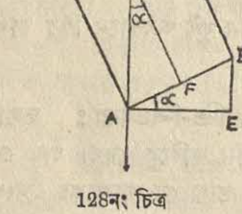
127(*b*)নং চিত্র



127(*c*)নং চিত্র

(*c*)-চিত্রে বস্তুটির ভারকেন্দ্র গোলকটির কেন্দ্র $C$-তে মিশিয়া আছে। কাজেই $C$ বিন্দুর চারিদিকে বস্তুটির ভারের কোন ভ্রামক নাই বলিয়া, উহাকে গড়াইয়া দিলে নূতনতর অবস্থানেও উহা স্থির থাকিবে। অতএব এক্ষেত্রে বস্তুটি উদাসীন সাম্যে অবস্থিত।

**উদাহরণ 7.** একটি চোঙ-এর ভূমির ব্যাস উহার উচ্চতার অর্ধেক। ঐ ব্যাস $2\sqrt{5}$ ফুট হইলে, চোঙটিকে না উল্টাইয়া উহার একটি কিনারাকে সর্বাধিক কত উচ্চে তোলা যাইবে?



128নং চিত্র

$ABCD$ যেন বৃত্তাকার চোঙটি। উহার ভূমির ব্যাস $\overline{AB}$, উচ্চতা $\overline{AD}$. প্রশ্নানুসারে, $\overline{AB}=\frac{1}{2}\overline{AD}$. $G$ যেন চোঙটির কেন্দ্র, $\overline{GF}$ যেন $\overline{AB}$-র উপর লম্ব। অতএব, $\overline{GF}=\frac{1}{2}\overline{AD}$. $\angle BAE=\alpha$ ধরা হইল। এখন চোঙটি সর্বাধিক ততটুকুই উপরে তোলা যায়, যতটুকু পর্যন্ত তুলিলে, $G$ হইতে উল্লম্বরেখা $\overline{GA}$, $\overline{EA}$ রেখার $A$ বিন্দুর বাহির দিয়া যায় না। ঐ উল্লম্বরেখা $A$ বিন্দু দিয়া গেলে চোঙটি উল্টাইবে না এবং সেই পর্যন্তই চোঙটিকে উপরে ওঠানো যাইবে।

এখন $\overline{FA}$ উল্লম্ব এবং $\overline{AE}$ অনুভূমিক হইলে, $\angle GAE=90°$ এবং $\angle GFA=90°$.

$\therefore$ $\alpha$ কোণ $=\angle GAF$-র পূরক $=\angle AGF$.

$\therefore \quad \tan \alpha = \tan \ AGF = \frac{\overline{AF}}{\overline{GF}} = \frac{\frac{1}{2}\overline{AB}}{\frac{1}{2}\overline{AD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\frac{1}{2}\overline{AD}}{\overline{AD}} = \frac{1}{2}$.

এখন, $\quad \overline{BE} = \overline{AB} \sin \alpha$.

এখন, $\quad \tan \alpha = \frac{1}{2}$ বলিয়া, $\cot \alpha = 2$ ;

$\therefore \ 1 + \cot^2 \alpha = 1 + 4 = 5$ ;

$\therefore \quad \operatorname{cosec}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} = 5$, অথবা, $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ;

$\therefore \quad \overline{BE} = \overline{AB} \times \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$, $\quad [\because \ \overline{AB} = 2\sqrt{5}$ ফুট ]

$= 2$ ফুট। সুতরাং, চোঙটির এক প্রান্ত 2 ফুট পর্যন্ত ওঠানো যাইবে।

## প্রশ্নমালা 17

1. $AB$, 6 পাউণ্ড-ভর ও 14 ফুট দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি সমদণ্ড। $A$ হইতে 3 ফুট পরপর 2, 4, 6 ও 8 পাউণ্ডের বস্তুগুলি স্থাপিত। দণ্ডটির যে-বিন্দু দিয়া লব্ধি-ভার যাইবে, $A$ বিন্দু হইতে তাহার দূরত্ব নির্ণয় কর।

2. একটি সমদণ্ডের দৈর্ঘ্য 6 ফুট ও ভর 9 পাউণ্ড। উহার প্রান্তদ্বয় হইতে যথাক্রমে 6 ও 12 পাউণ্ডের দুইটি ভর ঝুলানো আছে। দণ্ডটির কোন্ বিন্দু হইতে ঝুলাইলে, উহা অনুভূমিক রেখায় স্থির থাকিবে? [ C. U. Matric. 1910 ]

3. 3 পাউণ্ড ভরযুক্ত একটি সমসত্ত্ব দণ্ডের একপ্রান্ত হইতে 0, 1, 2, 3 এবং 4 ফুট দূরে, যথাক্রমে 1, 2, 3, 4 এবং 5 পাউণ্ডের ভরগুলি স্থাপিত রহিয়াছে। দণ্ডটির দৈর্ঘ্য 10 ফুট হইলে, ঐ দণ্ড ও উহার উপর স্থাপিত পাঁচটি ভরের ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর।

4. 12 ইঞ্চি লম্বা $\overline{AB}$ রেখায় $A$ ও $B$ হইতে যথাক্রমে 1 ও 3 ইঞ্চি দূরে 1 ও 3 একক ভর স্থাপিত হইয়াছে। 2 এককবিশিষ্ট তৃতীয় একটি ভরের এমন একটি অবস্থান নির্ণয় কর, যেখানে ঐ ভর থাকিলে, ভর-তিনটির ভারকেন্দ্র $\overline{AB}$ রেখার মধ্যবিন্দু হইবে। [ C. U. I.Sc. 1913, '24 ]

5. একটি মাছ ধরিবার ছিপ গোড়া হইতে আগার দিকে ছুঁচালো তিনটি অংশে বিভক্ত। এইরূপ প্রত্যেক অংশ 3 ফুট লম্বা এবং অংশগুলি পরস্পরের সহিত স্ক্রু দিয়া আঁটা। অংশগুলির ভার যদি 9 : 7 : 5 অনুপাতে থাকে এবং প্রত্যেক অংশের ভারকেন্দ্র যদি উহার বৃহত্তর প্রান্তের 1 ফুট দূরে থাকে, তবে সমগ্র ছিপটির গোড়া হইতে ভারকেন্দ্রের দূরত্ব নির্ণয় কর। [ London University ]

6. $ABC$ সমকোণী ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলিতে $P$, $P$ ও $P$ এই তিনটি সমান্তরাল বল এবং ত্রিভুজটির বাহুগুলির মধ্যবিন্দুতে $2P$, $2P$ ও $2P$ এই তিনটি সমান্তরাল বল

সক্রিয়। সমকোণের সন্নিহিত বাহু-দুইটির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 6 ও 8 ইঞ্চি হইলে, ঐ সমকোণ $C$ হইতে বলগুলির কেন্দ্রবিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় কর। [U. P. B. 1947]

7. একটি সমসত্ত্ব ত্রিভুজাকৃতি পাত একটি শীর্ষকোণ হইতে এমনভাবে ঝুলিতেছে যে, উহার ভূমি অনুভূমিক। প্রমাণ কর যে, পাতটি সমদ্বিবাহু।

8. একটি ত্রিভুজের শীর্ষকোণ-তিনটিতে তিনটি সমান্তরাল বল সক্রিয়। বল-তিনটি (i) সমান হইলে, অথবা, (ii) উহারা 1 : 1 : 4 অনুপাতের হইলে, তাহাদের ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর। [C. U. I.Sc. 1916]

9. (i) একটি সমসত্ত্ব সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের 5 ফুট করিয়া দুইটি বাহু এবং ভূমি 8 ফুট হইলে, উহার ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর।

(ii) ত্রিভুজটির ওজন 5 পাউণ্ড হইলে এবং উহার শীর্ষবিন্দু হইতে 10 পাউণ্ড ভার ঝুলাইলে, সমগ্র বস্তুটির ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর। [C. U. I.Sc. 1932]

10. একটি সমসত্ত্ব ত্রিভুজাকৃতি পাত $ABC$-র $A$ শীর্ষে ত্রিভুজটির ওজনের সমান ওজন স্থাপিত হইলে, ভারকেন্দ্র কোথায় থাকিবে? [C. U. Matric. 1930]

11. 14 ইঞ্চি লম্বা একটি সমসত্ত্ব তার $AB$-কে $A$ হইতে 6 ইঞ্চি দূরে $C$ বিন্দুতে এমনভাবে বাঁকানো হইল যে, উহার $AC$ ও $CB$ এই দুইটি সরল অংশের অন্তর্গত কোণটি এক সমকোণ হয়; $AC$-র মধ্যবিন্দু হইতে ভারের ভারকেন্দ্রের দূরত্ব নির্ণয় কর। [London University]

12. একটি আয়তাকার পাতলা পাত $ABCD$-এর ওজন নগণ্য। উহার $\overline{AB}$ ও $\overline{CD}$ বাহুদ্বয় 9 ইঞ্চি এবং $\overline{BC}$ ও $\overline{AD}$ বাহুদ্বয় 6 ইঞ্চি লম্বা। 1, 2, 3 এবং 4 পাউণ্ড ভর যথাক্রমে $A$, $B$, $C$ এবং $D$ শীর্ষকোণে স্থাপিত রহিয়াছে। পাতটির ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর।

পাতটিকে যদি উহার $A$ শীর্ষ হইতে ঝুলানো হয়, তবে $A$ হইতে ঝুলানো ওলন-দড়িটি ঐ পাতের একটি বাহুকে কোথায় ছেদ করিবে? [London University]

13. একটি ত্রিভুজের সমতলস্থিত একটি নির্দিষ্ট রেখা হইতে উহার শীর্ষত্রয়ের দূরত্ব যথাক্রমে $Z_1$, $Z_2$ ও $Z_3$. ঐ রেখা হইতে ত্রিভুজটির ভারকেন্দ্রের দূরত্ব নির্ণয় কর। [C. U. I.Sc. 1947, '49, W. B. H. S. 1968]

14. একটি বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর উপর বাহিরের দিকে একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ দণ্ডায়মান। ত্রিভুজটির উচ্চতা যদি উহার ভূমির সমান হয়, তবে ঐ ক্ষেত্রটির ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর।

15. দুইটি ত্রিভুজ একই ভূমির উপর দণ্ডায়মান হইলে, প্রমাণ কর যে, তাহাদের ভারকেন্দ্রের সংযোজক রেখা উহাদের শীর্ষদ্বয়ের সংযোজক রেখার সমান্তরাল। [C. U. Matric. 1911]

16. $ABC$ ত্রিভুজের ভূমি $BC$-এর মধ্যবিন্দু $D$; প্রমাণ কর যে, $ABD$ ও $ACD$ ত্রিভুজের ভারকেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব $\frac{1}{3}BC$. [C. U. Matric. 1925]

17. সমান-সমান চারিটি বর্গক্ষেত্রে বিভক্ত একটি বর্গক্ষেত্র হইতে ক্ষুদ্রতর ঐ চারিটির একটি বর্গক্ষেত্র বাদ দেওয়া হইল। অবশিষ্টাংশের ভারকেন্দ্র হইতে মূল বর্গক্ষেত্রটির ভারকেন্দ্রের দূরত্ব নির্ণয় কর। [C. U. Matric. 1912]

18. একটি সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় দ্বারা বিভক্ত চারিটি অংশের একটি কাটিয়া বাদ দেওয়া হয়। অবশিষ্ট অংশের ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর। [C. U. Matric. 1914]

19. $ABC$ ত্রিভুজের ভারকেন্দ্র $G$ বিন্দুকে $\overline{BC}$ বাহুর দুই প্রান্তের সহিত যুক্ত করিয়া প্রাপ্ত $BGC$ ত্রিভুজটিকে কাটিয়া বাদ দিলে, ত্রিভুজের অবশিষ্ট অংশের ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর। [C. U. Matric. 1932]

20. $ABCD$ বর্গক্ষেত্রে উহার কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু $O$; উহা হইতে $AOB$ ত্রিভুজটি কাটিয়া বাদ দিলে, অবশিষ্টাংশের ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর।

21. 3 ফুট ব্যাসার্ধযুক্ত একটি বৃত্তাকার থালার কোথায় 1 ফুট ব্যাসার্ধযুক্ত একটি ফুটা করা যায়; যাহাতে থালাটির অবশিষ্ট অংশের ভারকেন্দ্র থালার ভারকেন্দ্র হইতে 2 ইঞ্চি দূরে অবস্থিত হয়। [P. U. 1948, W. B. H. S. 1970]

22. $r$ ব্যাসার্ধযুক্ত একটি সমসত্ত্ব বৃত্তাকার থালা হইতে উহার কেন্দ্রগামী ও $\frac{1}{3}r$ ব্যাসযুক্ত একটি বৃত্ত কাটিয়া বাদ দেওয়া হইল। অবশিষ্ট অংশের ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর।

23. 12 সে.মি. ব্যাসার্ধযুক্ত একটি সমসত্ত্ব বৃত্তাকার ধাতুর পাত থেকে উহার কেন্দ্র হইতে 6 সে.মি. দূরস্থিত একটি বিন্দুর চারিদিকে 5 সে.মি. ব্যাসার্ধযুক্ত বৃত্তাকার অংশ কাটিয়া বাদ দেওয়া হইল। পাতটির মূল ভারকেন্দ্র এখন কত দূরত্বে সরিয়া গেল, তাহা নির্ণয় কর।

24. $ABCD$ বর্গক্ষেত্রের $\overline{AB}$ ও $\overline{AD}$ বাহুর যথাক্রমে $E$ ও $F$ মধ্যবিন্দু। বর্গক্ষেত্রটি হইতে $AEF$ অংশ বাদ দিলে, অবশিষ্টাংশের ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর।

25. একটি আয়তাকার পাত $ABCD$-এর $C$ শীর্ষটিকে এমনভাবে মুড়িয়া ভাঁজ করা হইল যে, $\overline{BC}$ যেন $\overline{BA}$-এর সহিত মিলিয়া যায়। $\overline{AB}=12$ ইঞ্চি এবং $\overline{BC}=4$ ইঞ্চি হইলে, $\overline{AB}$ ও $\overline{AD}$ হইতে ভারকেন্দ্রের দূরত্ব নির্ণয় কর।

26. $ABCD$ বর্গক্ষেত্রের প্রতিটি বাহু 8 ইঞ্চি দীর্ঘ। উহার $D$ ও $C$ শীর্ষকে মুড়িয়া এমনভাবে ভাঁজ করা হইল যে, উহারা বর্গক্ষেত্রটির কেন্দ্রে মিলিত হয়। এইরূপে পরিবর্তিত ক্ষেত্রটির ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর।

27. একটি সমসত্ত্ব বোর্ড 10 ইঞ্চি বাহুযুক্ত একটি সমবাহু ত্রিভুজ $ABC$-র ন্যায়। উহার ওজন 3 পাউণ্ড; 4 ও 5 পাউণ্ডের দুইটি ভার যথাক্রমে $A$ ও $B$ হইতে

ঝুলিতেছে। বোর্ডখানির উপর এমন একটি বিন্দু নির্ণয় কর, যে-বিন্দু হইতে ঝুলাইলে উহা উল্লম্বতলে $\overline{AB}$ বাহুকে অনুভূমিক রেখায় এবং $C$ বিন্দুকে $\overline{AB}$-র তলায় রাখিয়া ঝুলিতে থাকিবে। [ London University ]

28. একটি বৃত্তাকার চোঙ-এর ভূমির ব্যাসার্ধ 3 ইঞ্চি। চোঙটি অমসৃণ তলে স্থাপিত রহিয়াছে। তলটির এক প্রান্তকে ভূমি হইতে 30° পর্যন্ত উপরে উঠাইলে চোঙটি উল্টাইয়া পড়ে না। উহার উচ্চতা কত ?

29. একটি বৃত্তাকার চোঙ-এর ভূমির ব্যাসার্ধ 2 ফুট। উহার উচ্চতা 4 ফুট। না উল্টাইয়া কত উচ্চতা পর্যন্ত চোঙটির একটি ধার উপরে ওঠানো যাইতে পারে ?

30. একটি ধাতুর পাতের $ABCD$ অংশ একটি বর্গক্ষেত্র এবং অপর অংশ $\overline{BC}$-এর উপর একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ। বর্গক্ষেত্রটির বাহু 12 ইঞ্চি এবং ত্রিভুজটির উচ্চতা 9 ইঞ্চি হইলে, $\overline{AD}$ রেখা হইতে পাতটির ভারকেন্দ্রের দূরত্ব নির্ণয় কর।

[ W. B. H. S. 1962 ]

31. ট্রাপিজিয়ম আকারের $ABCD$ পাতটির সমান্তরাল বাহু $\overline{AB}$ ও $\overline{CD}$ যথাক্রমে $a$ ও $b$ একক দীর্ঘ। প্রমাণ কর যে, $\overline{AB}$ হইতে পাতটির ভারকেন্দ্রের দূরত্ব $\frac{1}{3}h\cdot\frac{a+2b}{a+b}$, যেখানে $\overline{AB}$ ও $\overline{CD}$-এর মধ্যে দূরত্ব $h$. [ W. B. H. S. 1963 ]

32. একটি বৃত্তাকার পাত হইতে বর্গাকৃতি একটি অংশ কাটিয়া বাদ দেওয়া হইল। ঐ বর্গাকৃতি অংশের কর্ণ বৃত্তটির একটি ব্যাসার্ধ। প্রমাণ কর যে, অবশিষ্ট অংশের ভারকেন্দ্র বৃত্তের কেন্দ্র হইতে $\frac{a}{8\pi-4}$ দূরত্বে অবস্থিত, যেখানে ঐ বৃত্তের ব্যাস $=a$. [ W. B. H. S. 1967 ]

33. একটি পাতলা পিতলের পাত, $ABCD$ আয়ত ও আয়তের বাহিরে $CDE$ ত্রিভুজের সমবায়ে গঠিত। $\overline{AB}=10$ সে.মি., $\overline{AD}=4$ সে.মি. এবং $\overline{CE}=\overline{DE}=13$ সে.মি. হইলে, $\overline{AB}$ বাহু হইতে সমগ্র পাতটির ভারকেন্দ্রের দূরত্ব নির্ণয় কর। [ W. B. H. S. 1964 ]

34. $ABCD$ একটি সমসত্ব বর্গাকৃতি কাগজ। উহার $A$ ও $B$ কোনা-দুইটিকে মুড়িয়া বর্গক্ষেত্রটির কেন্দ্র $O$ বিন্দুতে মিলাইয়া দেওয়া হইল। কাগজটির ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর। [ W. B. H. S. 1969 ]

35. একই ভূমি $\overline{AB}$-এর বিপরীত দিকে দুইটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ $CAB$ এবং $DAB$ অঙ্কিত হইয়াছে। প্রথম ত্রিভুজের উচ্চতা 9 ইঞ্চি এবং দ্বিতীয় ত্রিভুজের উচ্চতা 6 ইঞ্চি। $CADB$ ক্ষেত্রের ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর। [ W. B. H. S. 1971 ]

# উত্তরমালা

## প্রশ্নমালা 1

1. (i) $6\sqrt{3}$ ; (ii) 90° ; (iii) 60° ; (iv) 120° ; (v) 60°. 2. $6\sqrt{5}$ ফু./সে. ।
3. 120°. 4. 5 মা./ঘ. । 5. 120° ; $6\sqrt{3}$ ফু./সে. ।
6. পূর্বের 30° দক্ষিণে 80 ফু./সে. । 8. 3 মাইল। 10. 23·09 ফু./সে. ।
11. নদীর প্রস্থসূচক রেখার সহিত $a$ কোণে, যেখানে $\sin a = \frac{2}{3}$. 12. 100 ফুট।
13. নদীর প্রস্থসূচক রেখার সহিত $a$ কোণে, যেখানে $\sin a = \frac{2}{3}$ ; $20\sqrt{5}$ সেকেণ্ড।
14. দক্ষিণ-পূর্বদিকে $10\sqrt{2}$ মা./ঘ. ।
15. বিমানের গতিমুখের বিপরীতদিকে চূড়ার অনুভূমিক রেখায় 550 ফুট দূরে।
16. প্রারম্ভিক বেগের সহিত 120° কোণে 4 ফু./সে.$^2$ ।
17. প্রারম্ভিক বেগের সহিত 30° কোণে 12 ফু./সে. । 18. 90 ফুট দূরে।
19. উল্লম্ব রেখার সহিত 60° কোণে 192 ফু./সে. । 20. $6\sqrt{7}$ ফু./সে. ; 3 সেকেণ্ড।
21. $\frac{b}{tt'}\sqrt{t'^2 - t^2}$. 22. লম্বাভিমুখে ; 2 মিনিটে অপর পারে সোজা বিপরীত বিন্দু হইতে 880 ফুট দূরে। 23. নদীর প্রস্থের সহিত $a$ কোণে, যেখানে $\sin a = \frac{3}{5}$ ; 1 মি. 15 সে. । 24. 50 ফু./সে. ; অনুভূমিক রেখার সহিত $\theta$ কোণে, যেখানে $\tan \theta = \frac{3}{4}$.
26. 15 গ./মি. । 27. নদীর স্রোতমুখের সহিত $a$ কোণে, যেখানে $\cos a = -\frac{u}{v}$ ; নদীর লম্বাভিমুখে ; $a\left(\frac{v - \sqrt{v^2 - u^2}}{v\sqrt{v^2 - u^2}}\right)$ যেখানে নদীর প্রস্থ $a$.

## প্রশ্নমালা 2

1. (i) $15\sqrt{3}$ মা./ঘ. ; 15 মা./ঘ. । (ii) 6 ফু./সে. ; 0 ফু./সে. ।
(iii) 0 ফু./সে. ; 20 ফু./সে. । (iv) $7\frac{1}{2}$ মি./মি. ; $\frac{15\sqrt{3}}{2}$ মি./মি. ।
(v) প্রত্যেকটি $\frac{15\sqrt{2}}{2}$ গ./মি. । (vi) $-5\sqrt{2}$ ফু./সে. ; $5\sqrt{2}$ ফু./সে. ।
(vii) $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ গ./মি. ; $\frac{3}{2}$ গ./মি. ।
(viii) $-10$ কি.মি./ঘ. ; $10\sqrt{3}$ কি.মি./ঘ. । (ix) প্রত্যেকটি 24 ফু./সে. ।
2. $\sqrt{2}$ একক দক্ষিণ-পশ্চিমে। 3. 32 মাইল।
4. 13 ফু./সে. পূর্বদিকের সহিত $\theta$ কোণে, যেখানে $\tan \theta = \frac{12}{5}$.
5. $10\sqrt{2}$ ফু./সে. ; উত্তর-পূর্ব দিকে। 6. $(\sqrt{3} + 2)\,u$.

7. 4 ফু./সে. ; প্রথম বেগ 4 ফু./সে.-এর সহিত 60° কোণে সক্রিয়।

8. 20 মা./ঘ. পশ্চিমদিকের সহিত $\theta$ কোণে, যেখানে $\sin\theta = \frac{4}{5}$.

9. $2\frac{8}{11}$ সেকেণ্ড। 10. $2\sqrt{2}$ মা./ঘ. ; লোকটির গতিমুখের সহিত 135° কোণে।

11. 15 মা./ঘ. পশ্চিমদিকের সহিত $\theta$ কোণে, যেখানে $\sin\theta = \frac{4}{5}$.

12. 15 ফু./সে. ; ব্যক্তিটির গতিমুখের সহিত $\theta$ কোণে, যেখানে $\sin\theta = \frac{4}{5}$.

13. ( 6 মা./ঘ. বেগ ) উল্লম্ব রেখার সহিত 30° কোণে। 14. $8\sqrt{2}$ মা./ঘ. দ.-পূ.।

15. সম্মুখ হইতে লাইনের সহিত 30° কোণে 48 মা./ঘ.।

16. ( $\sqrt{73}$ মা./ঘ. বেগে ) উল্লম্ব রেখার সহিত $\theta$ কোণে, যেখানে $\tan\theta = \frac{8}{3}$.

17. 15 মা./ঘ. বেগে, উত্তর-পূর্ব দিকে।

18. $\sqrt{21}$ মা./ঘ. ; লোকটির গতিপথের সহিত $\theta$ কোণে, যেখানে $\tan\theta = \frac{-2\sqrt{3}}{3}$.

19. $4\sqrt{2}$ মা./ঘ., উত্তর-পশ্চিম দিক্ হইতে। 20. 45 মা./ঘ.।

21. 10 মা./ঘ., উত্তর-পশ্চিম দিক্ হইতে।

23. $3\sqrt{7}$ মা./ঘ., পূর্বের দক্ষিণে $a$ কোণে, যেখানে $\sin a = \frac{\sqrt{21}}{14}$.

24. বায়ুর বেগ দক্ষিণমুখী ও লোকটির বেগের সমান।

25. পশ্চিম-দক্ষিণ হইতে ঘণ্টায় $4\sqrt{2}$ মাইল।

26. যাত্রাবিন্দুতে একটি এবং বৃত্তের উপর তাহার ঠিক বিপরীত বিন্দুতে অপর কণাটি যখন একমুখী ও সমান্তরাল, তখন তাহাদের গরিষ্ঠ আপেক্ষিক বেগ $3v$. যাত্রাবিন্দুতে যখন তাহারা মিলিত ও বিপরীতমুখী তখন তাহাদের লঘিষ্ঠ আপেক্ষিক বেগ $2v$ বেগের অভিমুখে $= v$.

27. লোকটির গতিমুখের সহিত 150° কোণে ঘণ্টায় $2\sqrt{3}$ মাইল।

28. উল্লম্ব রেখার সহিত $\theta$ কোণে, যেখানে $\tan\theta = \frac{1}{3}$, $3\sqrt{10}$ কি.মি./ঘ.।

## প্রশ্নমালা 3

1. $6-2t$ ; $-2$ ; 2 ফুট প্রতি সেকেণ্ড.; $-2$ ফুট প্রতি বর্গ সেকেণ্ড। 2. 2 সেকেণ্ড ; 16 ফুট। 3. 40 ফুট প্রতি সেকেণ্ড ; 25 ফুট। 4. 1 ফুট প্রতি বর্গ সেকেণ্ড ; 9 ফুট প্রতি সেকেণ্ড। 5. 11 ফুট। 6. 11 ফুট প্রতি সেকেণ্ড ; 2 ফুট প্রতি বর্গ সেকেণ্ড। 7. $\frac{1}{6}$. 8. 16 ফুট প্রতি সেকেণ্ড। 10. 112·63 ফুট। 11. (i) 18 ফুট ; (ii) $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$. 12. (a) $\frac{2t^3}{3} - \frac{7t^2}{2} + 6t$; (b) $4t-7$ ; বস্তুকণাটি স্থির হইবে, যখন $S = \frac{27}{8}$ এবং $\frac{10}{3}$. 13. 280 ফুট প্রতি সেকেণ্ড ; $18\frac{3}{4}$ সেকেণ্ড ; 5625 ফুট।
14. 24 ফুট প্রতি সেকেণ্ড ; $-40$ ফুট প্রতি সেকেণ্ড ; 225 ফুট। 15. 45 ফুট।
16. 9 ফুট, 20 ফুট, 11 ফুট। 17. 24 ফুট ; 14 ফুট প্রতি বর্গ সেকেণ্ড।
18. 33 ফুট ; 27 ফুট প্রতি সেকেণ্ড। 19. $42\frac{2}{3}$ ফুট ; 24 ফুট প্রতি সেকেণ্ড।

20. 27 ফুট প্রতি সেকেণ্ড ; 9 সেকেণ্ড ; 162 ফুট। 21. 2 সে. ; 4 সে ; 4 ফুট প্রতি সেকেণ্ড ; 8 ফুট প্রতি সেকেণ্ড। 22. $1066\frac{2}{3}$ ফুট ; 72 ফুট প্রতি সেকেণ্ড। 23. 4 সে.মি./সে.$^2$।

## প্রশ্নমালা 4

1. $13\frac{1}{3}$ সে.। 2. 11 ফু./সে$^2$.। 3. 40 ফু./সে.।
4. 11 ফু./সে.$^2$। 5. 231 ফুট। 6. 7·5 সে.মি./সে.$^2$।
7. 8 ফু./সে.$^2$। 8. $\frac{19}{20}$ ফু./সে.$^2$, $1\frac{1}{19}$ সে.। 9. 10 গজ।
10. 90 ফুট। 11. 1 মাইল। 12. 30 ফু./সে. ; $-2$ ফু./সে.$^2$।
13. $\frac{4}{5}$ ফু./সে.$^2$। 14. 18 ফু./সে.$^2$। 15. 2 মিনিট।
16. 7 ফু./সে. ; 4 ফু./সে.$^2$। 17. 12 সে. ; 288 ফুট। 18. $\frac{1}{3}$ ইঞ্চি।
19. 8 সে.। 20. 35 ফুট। 21. 16 ফু./সে.$^2$ ; 30 ফু./সে.।
22. 5 ফু./সে., 4 ফু./সে.$^2$। 23. 30 সে., 10 সে., ফিরিবার সময় 30 সে. এবং যাইবার সময় 10 সে.। 24. 14 ফু./সে.$^2$। 25. $12\frac{1}{2}$ গজ।
26. 5 সে. ; 62·5 সে.মি.। 27. ·207 সে.। 28. 5 ফু./সে. ; $\frac{1}{2}$ ফু./সে.$^2$।
29. $\frac{22}{75}$ ফু./সে.$^2$ ; 44 গ.। 30. (i) 20 ফু./সে.$^2$ ; (ii) 75 ফুট।
31. সমত্বরণের সহিত সঙ্গতিপূর্ণ ; 2 ফু./সে.$^2$। 32. 48 সে., 16 সে.।
33. 1 ফু./সে.$^2$ ; 6 সে.। 34. 15 ফু./সে. ; 3 ফু./সে.$^2$।
35. 15·5 ফু./সে. ; 24·5 ফু./সে.। 37. (i) 8 ফু./সে.। (ii) 9 ফু./সে.। (iii) না।
38. 24 ফু. ; 4 সে.। 47. $3\frac{3}{4}$ মাইল।
50. $3\frac{2}{3}$ সে. ; 4 ফু./সে$^2$.। 51. $(1 \pm \sqrt{2})$ সে.।

## প্রশ্নমালা 5

1. (i) 144 ফুট ও 96 ফু./সে. ; 4410 সে.মি. এবং 2940 সে.মি./সে.।
(ii) 129600 ফুট ও 2880 ফু./সে. ; 3969000 সে.মি. এবং 88200 সে.মি./সে.।
(iii) 116640000 ফুট ও 86400 ফু./সে. ; 3572100000 সে.মি. এবং 2646000 সে.মি./সে.।
(iv) 4 ফুট ও 16 ফু./সে. ; 122·5 সে.মি. এবং 490 সে.মি./সে.।
2. (i) $2\sqrt{10}$ সে. ; $64\sqrt{10}$ ফু./সে.। (ii) $2\sqrt{5}$ সে. ; $64\sqrt{5}$ ফু./সে.।
(iii) $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{6}}$ সে. ; $8\sqrt{\frac{5}{6}}$ ফু./সে.। (iv) $\frac{5}{7}\sqrt{6}$ সে. ; $700\sqrt{6}$ সে.মি./সে.।
(v) $\frac{100\sqrt{5}}{7}$ সে. ; $14000\sqrt{5}$ সে.মি./সে.। 3. 96 ফু./সে.।
4. 1 সে. বা 4 সে. ; 48 ফু./সে.। 5. $\frac{15}{22}$ সে. ; $1\frac{1}{4}$ সে.। 6. 25 ফুট।
7. 100 ফুট ; $1\frac{1}{4}$ সে.। 8. $1\frac{1}{4}$ সে. ; 50 ফু.। 9. $\frac{15}{16}$ সে, ; $32\frac{13}{16}$ ফু.।
10. 10 সে.। 11. $1\frac{1}{2}$ সে. ; 36 ফু.। 12. 96 ফু./সে. ; 144 ফু.।
13. 1 সে.। 14. প্রথম হইতে 3 সেকেণ্ড পর মাটি হইতে 336 ফুট উচ্চে।
15. ঐ বিন্দু হইতে 176 ফুট উপরে ও 304 ফুট নিচে। 16. 150 ফুট।

17. 100 ফুট। 18. 3 সেকেণ্ড। 19. 625 ফুট ; 25 সে.।
20. 257·6 ফুট ; 4 সে.। 21. $2\frac{3}{4}$ সে.। 22. 25 ফুট ; 40 ফু./সে.।
23. 184 ফুট। 24. $29\frac{1}{3}$ ফু./সে.। 25. নিম্নমুখে 43 ফু./সে. ; 36 ফুট।
26. 4080 ফুট। 27. 784 ফুট। 28. 1024 ফুট। 29. 100 ফুট।
30. 15 সে.। 31. $68\frac{4}{23}$ ফু./সে. ; $306\frac{18}{23}$ ফুট। 32. 112 ফুট।
33 1296 ফুট ; 1280 ফুট। 34. 340 ফু./সে. ; 1800 ফুট।
38. 5 সেকেণ্ড ; 100 ফুট। 41. 64 ফুট।

## প্রশ্নমালা 6

1. $48\sqrt{5}$ ফু./সে. ; অনুভূমিক তলের সহিত 30° কোণে।
2. 24° 20′ ; 54·9 ফু./সে.। 3. 96 ফু./সে.। 4. 80 ফু./সে.।
5. 18·75 ফুট, 43·3 ফু.। 6. (*a*) 1600 ফুট। (*b*) $6400\sqrt{3}$ ফুট।
(*c*) 20 সে.। 7. $440\sqrt{5}$ ফুট। 8. $40\sqrt{330}$ ফু./সে.। 9. $160\sqrt{2}$ ফু./সে.।
10. $40\sqrt{2}$ ফু./সে.। 11. 80 ফু./সে. ; অনুভূমিক তলের সহিত $\tan^{-1}\frac{4}{3}$ কোণে।
12. $52\sqrt{3}$ ফু./সে. ; ( প্রায় ) 42 ফু.। 13. (i) $\frac{50}{44}$ সে. ; (ii) $45\frac{5}{11}$ ফু./সে. ; (iii) 2·6 ফুট। 14. $40\sqrt{6}$ ফু./সে. ; অনুভূমিক তলের সহিত 45° কোণে।
15. 4 সে. ; $64\sqrt{3}$ ফুট। 16. 30 সে.। 17. $60\sqrt{3}$ ফুট।
18. $96\sqrt{3}$ ফু.। 19. 69·6 ফু./সে. ; অনুভূমিক রেখার নিচে 73°18′ কোণে, 50·6 ফুট। 20. $9600\sqrt{3}$ ফুট। 21. $12\sqrt{29}$ ফু./সে. ; অনুভূমিক তলের সহিত $\tan^{-1}\frac{2}{5}$ কোণে। 22. 72 ফু. ; 15° ও 75°.
23. $\tan^{-1}\frac{4}{3}$ ; 200 ফু./সে. ; 10 সে.।

## প্রশ্নমালা 7

1. (i) 12 পা.-ফু.-সে. ; (ii) 5376 পা.-ফু.-সে. ; (iii) 8601600 পা.-ফু.-সে. ; (iv) 490 গ্রাম-সে.মি.-সে.।
2. (i) 25 পা.-ফু.-সে. ; (ii) 100 গ্রাম-সে.মি.-সে. ; (iii) 80 পা.-ফু.-সে. ; (iv) 10000 গ্রাম-সে.মি.-সে.।
3. (i) 720 পা.-ফু.-সে. ; (ii) 2688 পা.-ফু.-সে. ; (iii) $56\sqrt{2}$ গ্রাম-সে.মি.-সে. ; (iv) $700\sqrt{2}$ গ্রাম-সে.মি.-সে.।
4. (i) 1 পা.-ফু.-সে. ; (ii) 48 পা.-ফু.-সে. ; (iii) 10000 গ্রাম-সে.মি.-সে. ; (iv) 5 গ্রাম-সে.মি.-সে.।
5. 2 ফু./সে.$^2$। 6. 8 পা.। 7. (i) 40 পাউণ্ডাল ; (ii) $1\frac{1}{4}$ পা.।
8. (i) 200 পাউণ্ডাল ; (ii) $6\frac{1}{4}$ পা.-ভার।
9. (*a*) (i) 960 পাউণ্ডাল ; (ii) 71680 পাউণ্ডাল ; (iii) 16128 পাউণ্ডাল ; (iv) 8 পাউণ্ডাল ; (v) 100 পাউণ্ডাল। (*b*) (i) $49\times10^5$ ডাইন ; (ii) $29\frac{2}{5}$ ডাইন ; (iii) $49\times10^4$ ডাইন।

(c) (i) $31\frac{1}{4}$ পা.-ভার ; (ii) 4 পা.-ভার।
(d) (i) 50 গ্রাম ; (ii) $4\frac{39}{49}$ গ্রাম।
10. $15\frac{2}{5}$ পা.-ভার। 11. 6 পাউণ্ডাল ; 3 পাউণ্ডাল। 12. $6666\frac{2}{3}$ ডাইন।
13. 60 পাউণ্ডাল। 14. $37\frac{1}{2}$ ডাইন। 15. (i) 200 পা.-ভার ;
(ii) 400 পা.-ভার। 16. 180 ফু.। 17. $59\frac{11}{15}$ পাউণ্ডাল ;
$1\frac{13}{15}$ পা.-ভার। 18. $363\frac{19}{27}$ সে.মি./সে. ; $181\frac{23}{27}$ সে.মি. ;
$21822\frac{2}{9}$ সে.মি.। 19. $21\frac{9}{11}$ পা.। 20. 480 ফু.।
21. 40 সে.মি./সে.। 22. 20 ফু./সে. ; 100 ফু.। 23. 14 সে.।
24. $27\frac{1}{2}$ সে.। 25. 242 টন-ভার। 26. $\frac{1}{2}$ ফু.।
27. 404 পা.-ভার। 28. $50\frac{1}{2}$ পা.-ভার। 29. 420 পা.-ভার।
30. 1120 ফু./সে.। 31. $1\frac{1}{14}$ ই.। 32. (a) 246 পাউণ্ডাল ;
(b) 7596 পাউণ্ডাল। 33. 32 গ্রাম। 34. 260 গ্রাম।
35. $37\frac{5}{8}$ টন। 36. 1760 ফু. ; $197\frac{5}{8}$ পা.। 37. 2594·025 ডাইন।

## প্রশ্নমালা 8

1. (i) 6 পা.-ফু.-সে. ; (ii) 22 পা.-ফু.-সে.। 2. (i) $27\frac{1}{2}$ সে.-পাউণ্ডাল ;
60 ফু.-সে. বেগের দিকে। (ii) $8\frac{19}{32}$ পা.। 3. 150 পা. ফু./সে. ;
15,000 পাউণ্ডাল। 4. 20 ফু./সে. ; 100 ফু.। 5. $\frac{21}{F}$.
6. 140 একক ; $6\frac{2}{3}$ ফু./সে.। 8. 328·4 সে.মি./সে.। 9. 3 টন।
10. $4\frac{1}{2}$ মা./ঘ.। 11. 1 ফু./সে. ; 12 পা.-ভরের দিকে।
12. 8 ফু./সে.। 13. 6 পা.-ভরের গতিমুখে ; 1·2 ফু./সে.।
14. 12 ফু./সে.। 15. $8\times10^6$ পাউণ্ডাল। 16. 300 পাউণ্ডাল।
17. $7\frac{13}{16}$ ফু./সে.। 18. 31250 পাউণ্ডাল ; $\frac{1}{500}$ সে.।
19. $159468\frac{3}{4}$ পাউণ্ডাল। 20. $\frac{200\sqrt{3}}{3}$ ফু./সে.। 21. $1\frac{1}{3}$ ই.।
22. 1600 পাউণ্ডাল। 23. 200 ফু./সে.। 24. 9 : 7.
25. (i) $2\frac{1}{2}$ ফু./সে. ; (ii) $4\frac{113}{128}$ ফু. ; (iii) $3\frac{29}{32}$ সে.। 26. $\frac{1000}{16001}$ ফু./সে.।
27. 1238·4 ফু./সে.। 28. 8 ফু./সে. ; 8 সে.-পাউণ্ডাল।
29. 4·33 টন-ভার। 30. (a) 1050 পা.-ভার ; (b) $\frac{1}{120}$ সে.।
31. 2100 পা.-ভার। 32. 4 ফু.। 33. 100 পা.-ভার।
34. $22\frac{1}{2}$ পা.-ভার। 35. $336\frac{1}{9}$ পা.-ভার। 36. $75\frac{25}{128}$ পা.-ভার।
37. 25 পা.-ভার। 38. 960 পাউণ্ডাল ; 48 ফু./সে.$^2$।
39. (i) 3200 পা.-ভার ; (ii) 2320 পা.-ভার। 40. $586\frac{2}{3}$ ফু./সে.।
41. 6 ফু./সে.। 42. 3·8 ফু./সে. ; 200 পা.।

## প্রশ্নমালা 9

1. ত্বরণ 0 ; 8 ফুট প্রতি সেকেণ্ড। 2. $\pi$ সেকেণ্ড ; 5 ফুট ; 16 পাউণ্ডাল।
3. 10 ফুট প্রতি সেকেণ্ড ; $\pi$ সেকেণ্ড। 4. 13 ফুট ; $\pi$ সেকেণ্ড।
5. 4 সেকেণ্ড। 6. 0·167 সেকেণ্ড। 7. 3·47 সেকেণ্ড ; 111·8 সে.মি.।
9. 0, 20 সে.মি. প্রতি সেকেণ্ড ; 40 সে.মি. প্রতি সেকেণ্ড$^2$, 0 ; 32 সে.মি. প্রতি সেকেণ্ড$^2$, 12 সে.মি. প্রতি সেকেণ্ড। 10. $\frac{\sqrt{3}V}{2}$.

## প্রশ্নমালা 10

1. (a) 18 পা. ; (b) 3 টন বলের গতিমুখে 1 টন ; (c) 50 পা. ; (d) 15 পা. বলের গতিমুখে 5 পা. ; (e) 10 পা.। 3. 30 পা. ; 72 পা.।
4. 3 পা. ; 1 পা.। 5. 50 পা. ; না। 10. $3\overline{AC}$.
14. 12 পা.। 15. 120°. 16. 10 পা.।

## প্রশ্নমালা 11

1. $2P$ ; $\overrightarrow{OB}$ মুখে। 2. 2 পা. বলের মুখের সহিত 60° কোণে 10 পা.।
3. $P$ বলের সহিত সমকোণে $Q\sqrt{3}$. 4. 5 পা. ; 2 পা. বলের সহিত $\theta$ কোণে, যেখানে $\tan\theta = \frac{3}{4}$. 5. 20·19 পা.। 6. 19·5 পা.। 7. 5 পা.।
8. $3\frac{1}{3}$ পা. ; $2\frac{2}{3}$ পা.। 9. $2\sqrt{2}$ পা. ; $(3-2\sqrt{2})$ পা.।
11. $P\sqrt{3}$ ; $2P$-এর সহিত 210° কোণে। 12. $3P$-এর সহিত 210° কোণে ; $2\sqrt{3}P$.

## প্রশ্নমালা 12

1. (a) (i) 7 ; $A$ হইতে $9\frac{1}{7}$ ই. দূরে। (ii) 11 ; $A$ হইতে 2 ফু. দূরে। (iii) 16 ; $A$ হইতে $2\frac{1}{4}$ ফু. দূরে। (iv) 18 ; $A$ হইতে 14 ই. দূরে। (v) 14 ; $A$ হইতে $1\frac{1}{6}$ ফু. দূরে। (b) (i) 1 ; $B$ হইতে 4 ফু. দূরে। (ii) 3 ; $A$ হইতে $7\frac{1}{3}$ ফু. দূরে। (iii) 8 ; $B$ হইতে $1\frac{1}{3}$ ফু. দূরে। (iv) $7\frac{1}{8}$ ; $B$ হইতে $1\frac{1}{4}$ ফু. দূরে। 2. (a) (i) 10 ই. ; (ii) 4 একক ; (iii) 24 একক। (b) (i) 2 ই. ; (ii) $1\frac{7}{13}$ একক ; (iii) 4 একক।
3. 12 পা. ; 7 পা. বল হইতে 10 ই. দূরে। 4. $72\frac{8}{11}$ পা. ; $87\frac{3}{11}$ পা.।
5. $1\frac{1}{7}$ পা.। 6. 35 সের ; 25 সের। 7. অধিকতর শক্তিশালী ব্যক্তিটি হইতে 2 ফু. দূরে। 8. দুর্বলতর ব্যক্তিটি হইতে 4 ফু. দূরে।
9. 10 পা. ; 15 পা.। 10. $\frac{2}{3}$ ফু. ; $\frac{1}{3}$ ফু.। 11. দণ্ডটির মধ্যবিন্দু হইতে যথাক্রমে $\frac{3}{5}$ ফু. ; $\frac{2}{5}$ ফু. দূরে। 12. $18\frac{3}{4}$ ই. ; $16\frac{1}{2}$ ই.। 13. 8 ফু. ; 15 ফু.।
14. 12 ই.। 15. 8 পা.। 16. 5 ফু.।

17. দণ্ডটির মধ্যবিন্দু হইতে যথাক্রমে $5\frac{5}{8}$ ও $3\frac{3}{8}$ ই. দূরে। 18. দণ্ডটি যে-বিন্দুতে 53 : 258 অনুপাতে বিভক্ত, সেই বিন্দুতে। 19. 650 পা.।
20. 98 পা. ; 70 পা.। 21. 125 পা. ; 100 পা.। 22. $5\frac{1}{4}$ পা.।
23. $43\frac{1}{3}$ পা. ; $13\frac{1}{3}$ পা.। 24. $16\frac{4}{21}$ ই.। 25. $33\frac{1}{3}$ ফু.। 26. 1 ফু.।
27. $3\frac{1}{2}$ পা. ; যে-প্রান্তে 4 পা.-ভার ঝুলানো, সেই প্রান্ত হইতে $7\frac{1}{2}$ ই. দূরে।
29. $2\sqrt{2P}$. 32. $\frac{1}{2}$ ফু.। 33. 2 পা.। 34. 168 পা. ; 280 পা.।
35. 4 পা. বলের দিকে 1 ই. সরিয়া যাইবে। 36. 24 কি.গ্রা. ; 36 কি.গ্রা.।
37. 35 পা. ; 40 পা.।

## প্রশ্নমালা 13

1. 11 পা. ; ভারকেন্দ্র হইতে 2 ই. দূরে। 2. 17 একক ; প্রান্তটি হইতে $3\frac{7}{17}$ ফু. দূরে। 2. $15\frac{1}{2}$ পা. ; $19\frac{1}{2}$ পা.। 4. নিচুদিকে 1 পা. ; প্রথমোক্ত বলের 5 ফু. বামদিকে। 5. $17\frac{1}{2}$পা. ; $22\frac{1}{2}$ পা ; $A$ প্রান্ত হইতে $11\frac{1}{4}$ ফু. দূরে। 6. দণ্ডটির যে-প্রান্তে 6 পা.-ভার ঝুলানো আছে, সেই প্রান্ত হইতে $3\frac{2}{3}$ ফু. দূরে। 7. যে-প্রান্ত হইতে 4 পা.-ভার ঝুলানো আছে, সেই প্রান্ত হইতে $2\frac{1}{4}$ ফু. দূরে। 8. 16 ফু.। 9. 20 পা.।
10. যে-প্রান্তে চাপ 12 পা., সেই প্রান্ত হইতে $3\frac{11}{12}$ ফু. দূরে। 11. উল্লিখিত প্রান্ত হইতে 4 ফু. দূরে। 12. $2\frac{1}{3}$ পা.। 13. $AC = 30$ সে.মি.।
14. $3\frac{2}{3}$ টন ; $4\frac{1}{3}$ টন। 15. $3\frac{1}{2}$ টন ; $4\frac{1}{2}$ টন। 16. 44 পা.-ভারের বালকটি যে-প্রান্তে আছে, সেই প্রান্ত হইতে $8\frac{6}{7}$ ফু. দূরে। 17. লোকটি হইতে $1\frac{1}{3}$ ফু. দূরে। 18. অধিকতর শক্তিশালী লোকটি হইতে 3 ফু. দূরে।
19. 58 পা.-ভার ; 42 পা.-ভার। 20. $31\frac{1}{2}$ পা. ; $12\frac{1}{2}$ পা.।
21. 5 কি.গ্রা.। 22. 3 পা.। 23. পাগড়ি মাথায় থাকিলে লোকটি বেশী ভারী হইবে। 24. $20\sqrt{5}$ পা. ; $\overline{BC}$-র সহিত $\theta$ কোণে, যেখানে $\tan\theta = \frac{1}{2}$ ; 6 ফুট। 26. 5 একক। 27. ভূমি হইতে 20 ফু. উপরে দড়িটি বাঁধিতে হইবে। 28. 45° ; $100\sqrt{2}$ পা.। 29. 45 পা.।
30. 30 পা.। 31. 5 পা.। 32. 45°. 33. 9 পা.। 34. 1440 পা.।
35. ঘড়ির কাঁটার দিকে $\frac{1}{3}$ ফু.-পা. একক ; $A$ হইতে 2 ই. নিচে।
36. 20 পা. ; 15 পা.।

## প্রশ্নমালা 14

1. 5 পা.। 2. 5 ফু.। 3. $(8, a)$ যুগ্মবল, যেখানে বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্য $a$ ফু. ; (8, 10) যুগ্মবল। 4. 4 : 3. 5. $5a$ একক, যেখানে বর্গক্ষেত্রটির একটি বাহুর দৈর্ঘ্য $a$ একক। 6. $2a$ একক, যেখানে বর্গক্ষেত্রটির একটি বাহুর দৈর্ঘ্য $a$ একক। 7. $3\frac{3}{4}$ পা.-ফু. একক ; $ABCD$ মুখে। 8. প্রদত্ত 10 পা. বলের

সমান্তরাল ও 2 ফু. দূরে সক্রিয় 10 পা. বল। 9. $DC$ বরাবর সক্রিয় $2P$ বল। 10. 2 ফু.। 11. প্রদত্ত 10 কি.গ্রা. বলটি হইতে 20 ফুট দূরত্বে উহার একই মুখে সমান্তরাল 10 কি.গ্রা. বল।

## প্রশ্নমালা 15

4. লব্ধি $3\overrightarrow{AC}$.

## প্রশ্নমালা 16

1. $18\sqrt{2}$ পা.। 2. 15 পা. ; 20 পা.। 3. 40 পা. ; 30 পা.।

4. $2\frac{4}{5}$ পা., $9\frac{3}{5}$ পা.। 5. $\frac{40\sqrt{3}}{3}$ পা. ; $\frac{20\sqrt{3}}{3}$ পা. $\overrightarrow{AB}$ বরাবর।

6. 3 পা.। 8. $A$ বিন্দুগামী অনুভূমিক তলের সহিত $\theta$ কোণে, যেখানে $\tan\ \theta = \frac{5\sqrt{3}}{3}$. 9. 12 পা. ; 10·8 পা. ; উল্লম্ব রেখার সহিত 73° 56′.

10. 10·6 পা. ; অনুভূমিক রেখার সহিত 28° 4′ কোণে 10·6 পা.।

11. উল্লম্ব রেখার সহিত 16° 42′ কোণে, 62·64 পা.। 12. 87·5 পা. ; 132·5 পা. ; উল্লম্ব রেখার সহিত 41° 11′ ও 60° 15′. 13. 800 পা.।

14. 75 পা., 125 পা.। 15. 11·3 পা. ; 10·3 পা.। 16. 146·5 গ্রাম ; 103·5 গ্রাম ; 18. 45° ; দণ্ডটির ভারের অর্ধেক। 19. 3·9 ফু. ; 2·6 পা.।

22. উল্লম্ব রেখার সহিত $\theta$ কোণে 8·3 কি.গ্রা., যেখানে $\tan\ \theta = \frac{1}{2\sqrt{3}}$; 2·3 কি.গ্রা.।

23. $\frac{2W\sqrt{3}}{3}$, $\frac{W\sqrt{3}}{3}$, যেখানে $W$ দণ্ডটির ভার।

## প্রশ্নমালা 17

1. $8\frac{7}{13}$ ফু.। 2. বৃহত্তর ভর হইতে $2\frac{1}{3}$ ফু. দূরে। 3. উল্লিখিত প্রান্ত হইতে $3\frac{1}{18}$ ফু. দূরে। 4. $A$ হইতে 4 ই. দূরে। 5. $3\frac{3}{7}$ ফু.। 6. $3\frac{1}{3}$ ই.।

8. (i) ত্রিভুজটির ভারকেন্দ্র ; (ii) প্রথমোক্ত বলের প্রয়োগ-বিন্দু ও ত্রিভুজের ভারকেন্দ্রের সংযোজক রেখার মধ্যবিন্দু। 9. (i) ত্রিভুজটির শীর্ষ হইতে মধ্যমার উপর 2 ফু. দূরে ; (ii) শীর্ষ হইতে মধ্যমার উপর $\frac{8}{9}$ ফু. দূরে। 10. $A$ হইতে $BC$ বাহুর উপর মধ্যমা $AD$-র উপর $O$ এমন একটি বিন্দু, যেন $AO = \frac{1}{3}AD$.

11. $2\frac{6}{7}$ ই.। 12. $AD$ ও $AB$ হইতে 4 ই. দূরে ; ওলন-দড়ি রেখা $CD$ বাহুকে $E$ বিন্দুতে ছেদ করিবে, যেখানে $DE = 6$ ই.। 13. $\frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$ একক।

14. ত্রিভুজের শীর্ষ হইতে বর্গক্ষেত্রের কেন্দ্রগামী রেখার $\frac{11a}{9}$ একক দূরে, যেখানে বর্গক্ষেত্রের একটি বাহু $a$ একক দীর্ঘ। 17. কাটা-অংশ বাদে অবশিষ্ট অংশের

ভারকেন্দ্র $G$ এমন একটি বিন্দু, যেন $OG=\frac{a\sqrt{2}}{12}$, যেখানে $O$ বর্গক্ষেত্রটির ভারকেন্দ্র এবং $a$ একক উহার একটি বাহুর দৈর্ঘ্য। 18. সামান্তরিকটির কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু হইতে পরিত্যক্ত বাহুটির সন্নিহিত একটি বাহুর সমান্তরাল রেখায় এবং ঐ বাহুর $\frac{1}{9}$ অংশ দূরে। 19. $G$ হইতে $GA$ রেখায় $\frac{1}{6}AG$ অংশ দূরে। 20. $AB$ ও $CD$-র মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখায় $O$ হইতে $CD$-এর দিকে বর্গক্ষেত্রটির একটি বাহুর $\frac{1}{9}$ অংশ দূরে। 21. থালাটির ফুটা-অংশ বাদে, অবশিষ্টের ভারকেন্দ্রগামী ব্যাসের উপর থালার কেন্দ্রের অপরদিকে 16 ই. দূরে। 22. কাটা-অংশ বাদে, অবশিষ্টের ভারকেন্দ্রগামী ব্যাসের উপর থালাটির কেন্দ্রের অপরদিকে থালার ব্যাসার্ধের $\frac{1}{210}$ অংশ দূরে। 23. 1·26 সে.মি.। 24. বর্গক্ষেত্রটির কেন্দ্র হইতে $C$-দিকে $A$ বিন্দুগামী কর্ণের উপর উহার $\frac{1}{21}$ অংশ দূরে। 25. $AD$ হইতে $5\frac{7}{9}$ ই. এবং $AB$ হইতে $1\frac{7}{9}$ ই. দূরের বিন্দু। 26. $AB$ হইতে $3\frac{2}{3}$ ই. ও $BC$ হইতে 4 ই. দূরে। 27. $A$ হইতে 5·4 ই. দূরে। 28. $6\sqrt{3}$ ই.। 29. $2\sqrt{2}$ ফু.। 30. $8\frac{5}{11}$ ই.। 33. 5·6 সে.মি.। 34. $AB$ হইতে $\frac{13}{24}AB$ একক দূরে। 35. $AB$-র মধ্যবিন্দু $O$ হইতে $OD$ রেখায় 1 ই. দূরে।

## কলন গণিতে ব্যবহৃত পরিভাষার তালিকা

Bound—সীমা
Closed Interval—বদ্ধ-অবকাশ
Constant—ধ্রুবক
Continuity—সন্ততি
Continuous—সন্তত
Decreasing Function—হ্রসমান-অপেক্ষক
Derivative—তদ্ভবক
Differential—অবকল
Differentiation—অবকলন
Differential Coefficient—অবকলনাঙ্ক
Differential Equation—অবকল-সমীকরণ
Discontinuous—সন্ততি-চ্যুত
Domain—ব্যাপ্তি
Function—অপেক্ষক
Half-open Interval—অর্ধমুক্ত অবকাশ
Increasing Function—বর্ধমান অপেক্ষক
Integral—সমাকল
Integration—সমাকলন
Interval—অবকাশ
Inverse Circular Function—বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষক
Limit—সীমান্তমান
Limits of Integration—সমাকলন সীমা
Lower Limit—নিম্নসীমা
Monotonic Decreasing—ক্রমহ্রসমান
Monotonic Increasing—ক্রমবর্ধমান
Open Interval—মুক্ত অবকাশ
Primitive Function—আদিম অপেক্ষক
Range—প্রসার
Trigonometrical Function—ত্রৈকোণমিতিক অপেক্ষক
Variable—চলক

## শুদ্ধিপত্র

পৃষ্ঠা — 1, পঙ্‌ক্তি — 11, 'সংখ্যা' স্থানে 'সংখ্যার' হইবে।

" — 20, শেষের পঙ্‌ক্তি, ']1, 3]' স্থানে ']1, 3[' হইবে।

" — 25, পঙ্‌ক্তি — 4, '$\sqrt{9-9=0}$' স্থানে '$\sqrt{9-9}=0$' হইবে।

" — 31, চিত্র নং — 10, $\sin x$ স্থানে $\cos x$ হইবে।

" — 53, পঙ্‌ক্তি — 10, '$x=e$' স্থানে '$x=e^{y}$' হইবে।

" — 58, " — 13, '$f^{-1}(u)=\frac{1}{2}=(u-1)$' স্থানে '$f^{-1}(u)=\frac{1}{2}(u-1)$' হইবে।

" — 69, " — 10, '$x\to\frac{\pi}{2}$' স্থানে '$x\to-\frac{\pi}{2}$' হইবে।

" — 70, " — 5, '$x=\frac{2}{\pi}=6$' স্থানে '$u=\frac{2}{\pi}=\cdot 6$' হইবে।

" — 76, " — 4, '41' স্থানে '·41' হইবে।

" — 77, " — 7, '$\underset{x\ t0}{L}$' স্থানে '$\underset{x\to 0}{Lt}$' হইবে।

" — 77, শেষের পঙ্‌ক্তি $\because$ স্থানে $\therefore$ হইবে।

" — 85, পঙ্‌ক্তি— 11, 12, '$a$' স্থানে '$a_n$' হইবে।

" — 100, " — 7, '$x$ মানের অবকলনযোগ্য' স্থানে '$x$ মানের জন্য অবকলনযোগ্য' হইবে।

" — 104, " — 10, '$\underset{\partial u\to}{Lt}$' স্থানে '$\underset{\partial u\to 0}{Lt}$' হইবে।

" — 107, " — 10, $e$ স্থানে $e^{x}$ হইবে।

" — 237, " — উত্তরমালায় (প্রশ্নমালা—16), 25নং অঙ্কের উত্তরে $\frac{1}{2}$ স্থানে $\frac{9}{4}$ হইবে।